POLITÉCNICA

Análisis en el Dominio de la Frecuencia de un Sistema de N Grados de Libertad

Grupo de Innovación en Ingeniería de Estructuras
Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Madrid

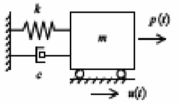
InnStruct

http://ingstruct.mecanica.upm.es

Matriz de respuesta en frecuencia

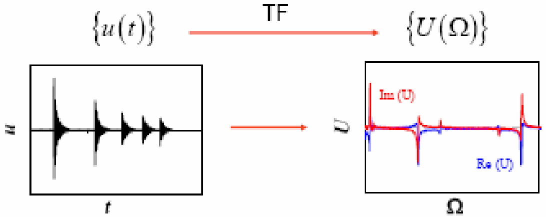
La ecuación de la Dinámica de un sistema de N grados de libertad en el dominio del tiempo se expresa:

$$M\{\ddot{u}(t)\}+C\{\dot{u}(t)\}+K\{u(t)\}=\{p(t)\}$$



Esquema de 1 GDL

La Transformada de Fourier permite pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia cualquier serie temporal. Así, los movimientos:



La ecuación de la Dinámica se puede formular en el dominio de la frecuencia:

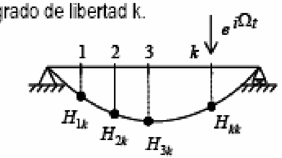
$$\left(-\Omega^2 M+i\Omega C+K\right)\{U(\Omega)\}=\{P(\Omega)\}$$

Es decir: $$\{U(\Omega)\}=H(\Omega)\{P(\Omega)\}$$

Donde la matriz $H(\Omega)$ es la matriz de respuesta en frecuencia:

$$H(\Omega)=\left(-\Omega^2 M+i\Omega C+K\right)^{-1}$$

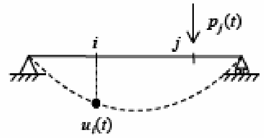
Las componentes del vector $\{H_k\}$ de la columna k de $H(\Omega)$ definen la respuesta en los distintos grados de libertad a la acción de un impulso $e^{i\Omega t}$ sobre el grado de libertad k.



Componentes de $H(\Omega)$

Las componentes de $H(\Omega)$ se pueden obtener como el cociente de las transformadas de Fourier de la respuesta en cada grado de libertad y una acción en cada grado de libertad.

$$H_{ij}(\Omega)=\frac{U_i(\Omega)}{P_j(\Omega)}$$



La matriz $H(\Omega)$ se puede descomponer de la siguiente forma:

$$H(\Omega)=[a]H^*(\Omega)[a]^T$$

Siendo $[a]$ la matriz de modos, y $H^*(\Omega)$ una matriz diagonal, cuyo elemento j es:

$$H_j^*(\Omega)=\frac{1}{K_j}\frac{\left[1-\left(\frac{\Omega}{\omega_j}\right)^2-2i\xi_j\left(\frac{\Omega}{\omega_j}\right)\right]}{\left[1-\left(\frac{\Omega}{\omega_j}\right)^2\right]^2+\left[2\xi_j\left(\frac{\Omega}{\omega_j}\right)\right]^2}$$

Donde ω_j es la frecuencia natural asociada al modo $\{a\}_j$, ξ_j es la razón de amortiguamiento modal y $K_j=\{a\}_j K\{a\}_j^T$ la rigidez reducida. A la matriz de respuesta en frecuencia también se le denomina matriz de flexibilidad.

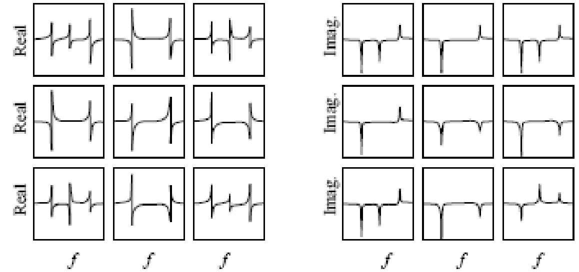
Financiación

Convocatoria 2010 de ayudas a la innovación educativa y a la mejora de la calidad de la enseñanza. Universidad Politécnica de Madrid.

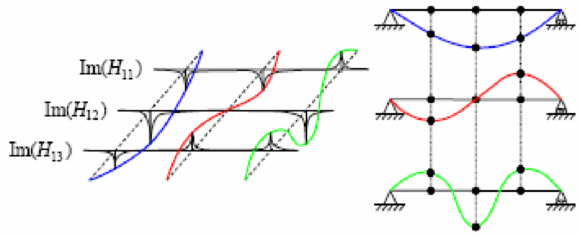
Análisis Modal

Por la descomposición del apartado anterior, los elementos de cualquier fila o columna de $H(\Omega)$ contienen suficiente información sobre las frecuencias propias del sistema, los modos de vibración y los amortiguamientos modales.

Obtención de $H(\Omega)$ para la viga biapoyada con 3 GDL



Las tres primeras frecuencias corresponden a los tres picos de las componentes de $H(\Omega)$. Las correspondientes formas modales se pueden dibujar a partir de la parte imaginaria de una sola fila o columna de $H(\Omega)$.



Participantes

Pablo de la Fuente Martín
Juan Carlos Mosquera Feijóo
Carlos Zanuy Sánchez
Rafael Fernández Díaz-Munío