Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad Examen extraordinario 5 de septiembre de 2014	Apellidos . . . . Nombre . . . . Nº.................... 3er curso

Ejercicio 1. (Se recogerá a las 17,30 h aprox.)

La viga biapoyada *CAB* de la figura *a)* tiene por sección la mixta en cajón de acero con losa de hormigón de la figura *b)*. Se pide:

a) Dibujar y acotar la ley de esfuerzos cortantes. (*1 punto)*

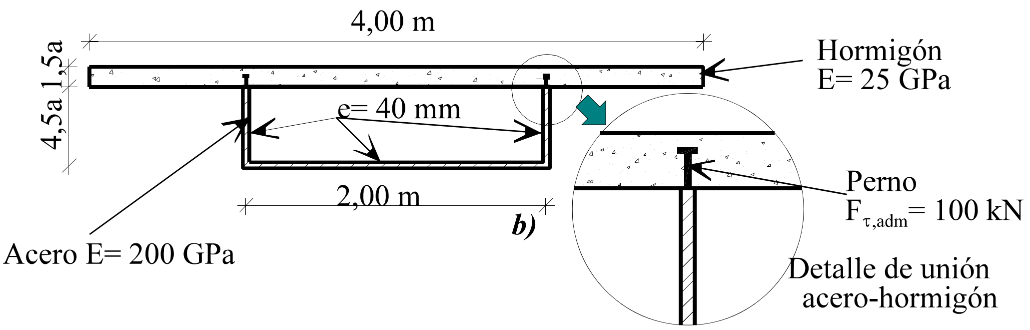
b) Dibujar y acotar la ley de momentos flectores. Es imprescindible encontrar el valor del máximo momento flector positivo y la posición donde se produce. (*2 puntos)*

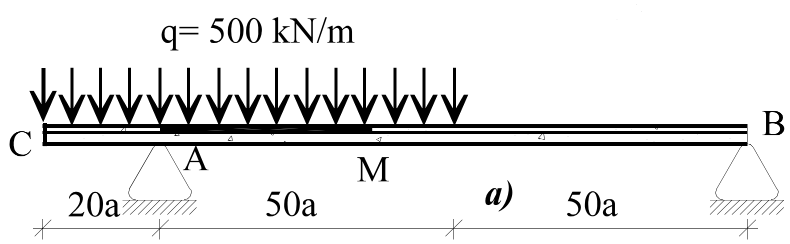
c) Dibujar y acotar la distribución de tensiones tangenciales en la sección de máximo esfuerzo cortante en valor absoluto. (*2 puntos)*

d) Dibujar y acotar la distribución de tensiones normales en la sección de máximo momento flector en valor absoluto. (*2 puntos)*

e) Comprobar el equilibrio entre tensiones normales y tangenciales en la porción de cabeza de hormigón comprendida entre el apoyo *A* y la sección *M* de máximo momento flector (en negro en la figura *a)*). (*2 puntos)*

e) Si las tensiones tangenciales en la conexión entre el acero y el hormigón (calculadas en el apartado anterior) se resisten mediante pernos que pueden soportar el esfuerzo rasante indicado en el detalle de la figura *b)*, determinar el número de pernos a colocar entre las secciones *A* y *M*. (*1 punto)*



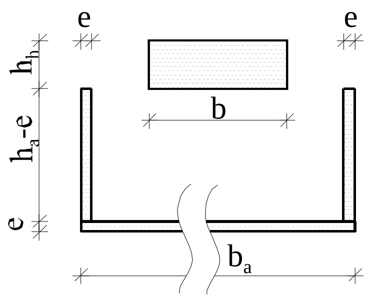


Viga cajón $a := 0.12$ $E_a := 200\cdot 10^6$ $E_h := 25\cdot 10^6$ $F_{\tau adm} := 100$

$b_h := 4$ $h_h := 1.5\cdot a$ $b_a := 2$ $h_a := 4.5\cdot a$ $e := 4\cdot 10^{-2}$

$n := \frac{E_a}{E_h}$ $b := \frac{b_h}{n}$ $A := b\cdot h_h + 2\cdot e\cdot\left(h_a - e\right) + b_a\cdot e$ $A = 0.21$

$$c_s := \frac{b\cdot\frac{h_h^2}{2} + 2\left(h_a - e\right)\cdot e\cdot\left(h_h + \frac{h_a - e}{2}\right) + b_a\cdot e\cdot\left(h_h + h_a - \frac{e}{2}\right)}{A}$$



Sección homogeneizada

$c_s = 0.387$ $c_i := h_h + h_a - c_s$ $c_i = 0.333$

$$I := \frac{1}{12}\left[b\cdot h_h^3 + 2\cdot e\cdot\left(h_a - e\right)^3 + b_a\cdot e^3\right] + b\cdot h_h\cdot\left(c_s - \frac{h_h}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(h_a - e\right)\cdot e\cdot\left(c_i - \frac{h_a + e}{2}\right)^2 + b_a\cdot e\cdot\left(c_i - \frac{e}{2}\right)^2$$

$10^3\cdot I = 16.937$

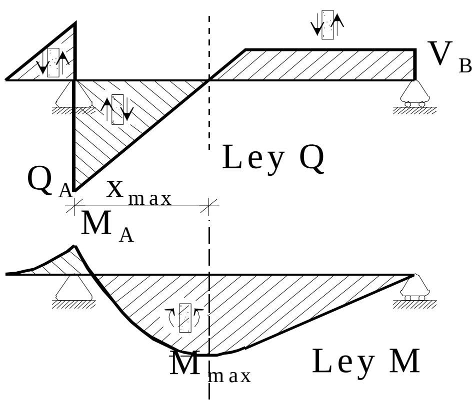
$q := 500$ $P := q\cdot 70\cdot a$ $V_A := P\cdot\frac{100\cdot a - 15\cdot a}{100\cdot a}$ $V_B := P\cdot\frac{15\cdot a}{100\cdot a}$

$V_A = 3.57\cdot 10^3$ $V_B = 630$ $P - V_A - V_B = 0$

$Q_A := V_A - q\cdot 20\cdot a$ $Q_A = 2.37\cdot 10^3$

$x_{max} := \frac{50\cdot a}{Q_A + V_B}\cdot Q_A$ $x_{max} = 4.74$

$$M_{max} := -q\cdot\frac{\left(20\cdot a + x_{max}\right)^2}{2} + V_A\cdot x_{max}$$



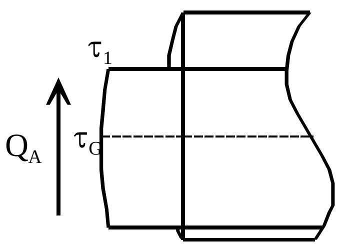
$M_{max} = 4.177\cdot 10^3$

Tensiones tangenciales en A+ $\mu_1 := b\cdot h_h\cdot\left(c_s - \frac{h_h}{2}\right)$ $\mu_1 = 0.027$

$\mu_G := b_a\cdot e\cdot\left(c_i - \frac{e}{2}\right) + 2\cdot\frac{\left(c_i - e\right)^2}{2}\cdot e$ $\mu_G = 0.028$

$\tau_G := \frac{Q_A}{I}\cdot\frac{\mu_G}{2\cdot e}$ $\tau_G = 4.978\cdot 10^4$

$\tau_1 := \tau_G\cdot\frac{\mu_1}{\mu_G}$ $\tau_1 = 4.678\cdot 10^4$



Tensiones nomales en M_{max}

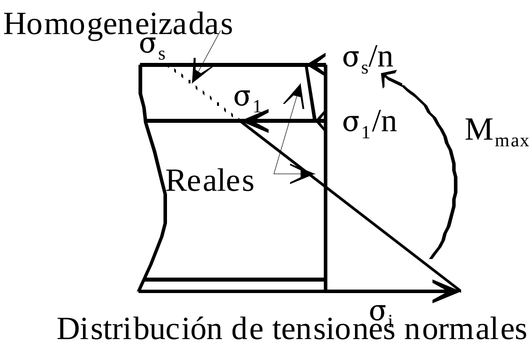
Distribución de tensiones tangenciales

$\sigma_s := -\frac{M_{max}}{I}\cdot c_s$ $\sigma_i := \frac{M_{max}}{I}\cdot c_i$

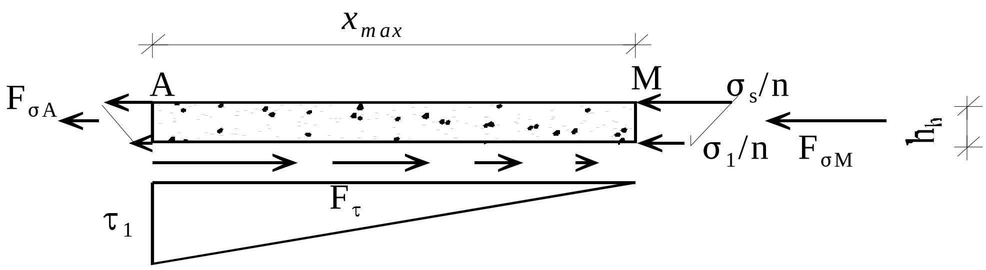
$\sigma_s = -9.547\cdot 10^4$ $\sigma_i = 8.209\cdot 10^4$

$\sigma_1 := \sigma_s\cdot\frac{c_s - h_h}{c_s}$ $\sigma_1 = -5.108\cdot 10^4$

$\frac{\sigma_s}{n} = -1.193\cdot 10^4$ $\frac{\sigma_1}{n} = -6.385\cdot 10^3$



Distribución de tensiones normales



Equilibrio de losa

$F_{\sigma M} := \frac{\sigma_s + \sigma_1}{2} \cdot b \cdot h_h$ $\quad F_{\sigma M} = -6.595 \cdot 10^3$

En A $\quad M_A := -q \cdot \frac{(20 \cdot a)^2}{2}$ $\quad M_A = -1.44 \cdot 10^3$ $\quad F_{\sigma A} := F_{\sigma M} \cdot \frac{-M_A}{M_{max}}$ $\quad F_{\sigma A} = -2.274 \cdot 10^3$

$F_\tau := \frac{1}{2} \cdot \tau_1 \cdot 2 \cdot e \cdot x_{max}$ $\quad F_\tau = 8.869 \cdot 10^3$ $\quad$ Equilibrio $\quad F_\tau + F_{\sigma M} + F_{\sigma A} = 2.728 \cdot 10^{-12}$

$N_{pernos} := \frac{F_\tau}{F_{\tau adm}}$ $\quad N_{pernos} = 88.687$

Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad Examen extraordinario 5 de septiembre de 2014	Apellidos . . . . Nombre . . . . Nº.................... 3er curso

Ejercicio 2. (Se recogerá a las 18,00 h aprox.)

La viga continua de la figura *a)* es de rigidez constante (*EI* dado en la figura) excepto en el tramo *BD*, cuya rigidez es infinita. Para la carga mostrada en la figura *a)* (consistente en un momento exterior aplicado en *B*) se pide:

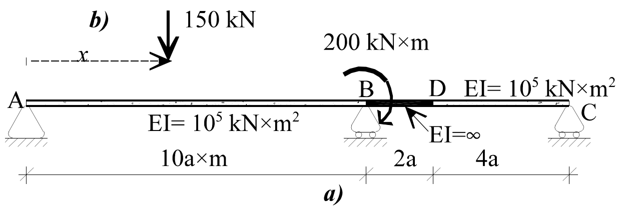
a) Dibujar y acotar la ley de momentos flectores. (*2 puntos*)

b) Dibujar a estima la deformada y acotar sobre ella el máximo movimiento vertical (en valor absoluto) y el lugar donde se produce. (*3 puntos*)

Además:

c) Dibujar a estima la línea de influencia del giro en *B* y acotar su ordenada máxima (en valor absoluto). (*3 puntos*)

d) Calcular el máximo giro (positivo o negativo) que puede producir en *B* la carga puntual de la figura *b)* (que puede actuar en cualquier punto de la viga). (*2 puntos*)

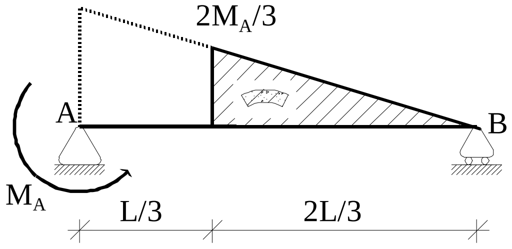


Viga continua y línea de influencia

$a := 1 \qquad L_1 := 10 \cdot a \qquad L_2 := 6 \cdot a \qquad EI := 10^5 \qquad M_{ext} := -200 \qquad P := 150$

Giro en extremo rígido de viga con L/3 rígido. Flecha en B nula

$$\theta_A \cdot L - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot M_A}{3 \cdot EI} \cdot \frac{2 \cdot L}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot L}{3} := 0 \qquad \theta_A := \frac{8 \cdot M_A \cdot L}{81 \cdot EI}$$



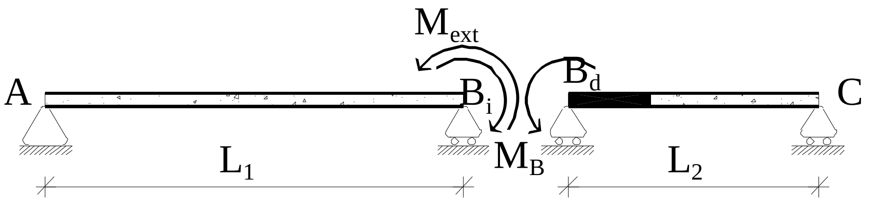
Flexibilidad de viga con tramo rígido

Continuidad de giro en B

$$\theta_B{}^i = \frac{M_{ext} \cdot L_1}{3 \cdot EI} - \frac{M_B \cdot L_1}{3 \cdot EI} := \frac{8 \cdot M_B \cdot L_2}{81 \cdot EI} = \theta_B{}^d$$

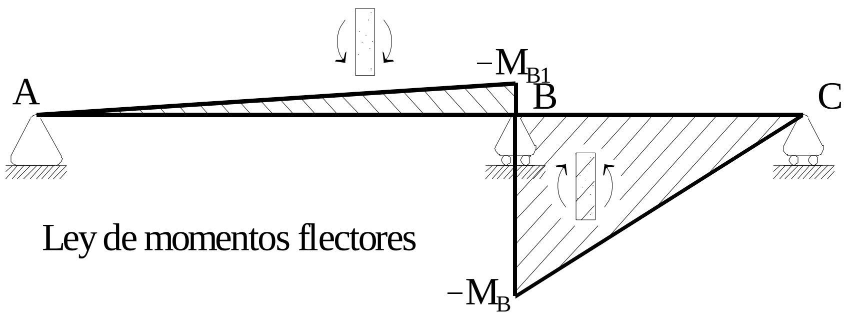
$$M_B := \frac{\frac{M_{ext} \cdot L_1}{3}}{\frac{L_1}{3} + \frac{8 \cdot L_2}{81}}$$

$M_B = -169.811$



Ecuación de compatibilidad de giro en B

$M_{B1} := M_{ext} - M_B \qquad M_{B1} = -30.189$

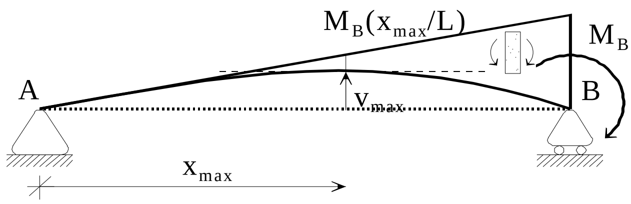


Ley de momentos flectores

Buscamos flecha máxima en vano 1 donde giro es cero.

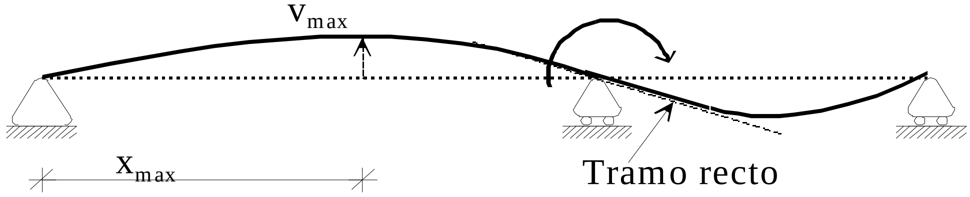
$$\frac{M_B \cdot L_1}{6 \cdot EI} - \frac{1}{2} x_{max} \cdot \frac{M_B}{EI} \cdot \frac{x_{max}}{L_1} := 0$$

$$x_{max} := \frac{L_1}{\sqrt{3}} \qquad x_{max} = 5.774$$

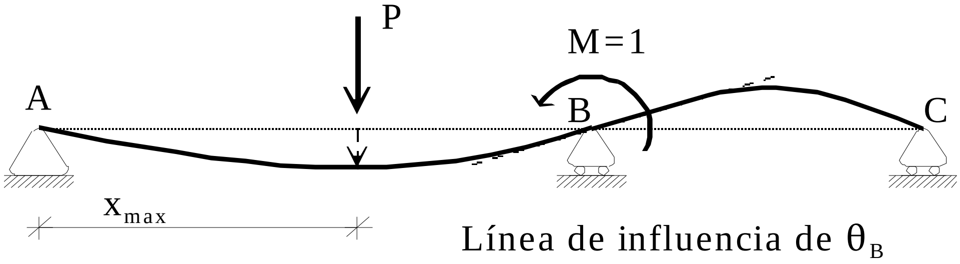


Cáculo de fleca máxima (positiva hacia abajo)

$$v_{max} := \frac{M_{B1} \cdot L_1}{3 \cdot EI} \cdot x_{max} - \frac{1}{2} x_{max} \cdot \frac{M_{B1}}{EI} \cdot \frac{x_{max}}{L_1} \cdot \frac{x_{max}}{3} \qquad v_{max} = -4.842 \cdot 10^{-3}$$



Deformada



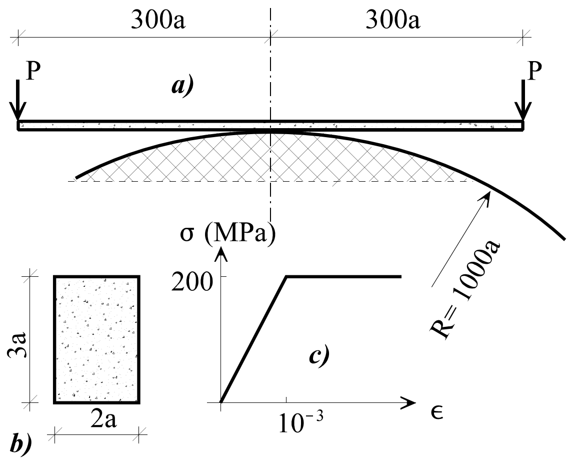
Giro máximo en B debido a P en x_{max}

$$\theta_{Bmax} := \frac{v_{max}}{M_{ext}} \cdot P \qquad \theta_{Bmax} = 3.631 \cdot 10^{-3}$$

Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad Examen extraordinario 5 de septiembre de 2014	Apellidos . . . . Nombre . . . . Nº.................... 3er curso Alumnos de Adaptación marcad X aquí ☐

Ejercicio 3. (Se recogerá a las 20,00 h aprox.)

La viga de la figura *a)* está apoyada como un balancín sobre un terreno indeformable en montículo de perfil circular cuyo radio se acota en la propia figura. La sección de la viga se muestra en la figura *b)* y las características elastoplásticas del material, en la figura *c)*. La viga está cargada con sendas cargas puntuales P en los extremos. Al flectar, conforme las cargas aumentan, la viga se apoyará progresivamente sobre el terreno. Se pide:



a) Dibujar los diagramas de deformaciones y de tensiones de las secciones que en un momento dado reposan sobre el terreno. (*2 puntos*)

b) Determinar el valor del momento flector de las secciones anteriores. (*2 puntos*)

c) Determinar el valor de la carga P que hace que un cuarto de la longitud de la viga repose sobre el terreno. (*1 punto*)

d) Dibujar el diagrama de curvaturas de la viga cuando P alcanza el valor anterior. (*3 puntos*)

e) Calcular la flecha en el extremo de la viga producida por la carga P del apartado anterior. (Para un cálculo aproximado se acepta linealizar el diagrama de curvaturas entre los puntos con curvatura elástica y con curvatura máxima.) (*2 puntos*)

Balancín

$a := 0.02 \quad h := 3\cdot a \quad b := 2\cdot a \quad \sigma_p := 200\cdot 10^3 \quad \varepsilon_e := 10^{-3} \qquad E := \frac{\sigma_p}{\varepsilon_e}$

$I := \frac{1}{12}\cdot b\cdot h^3 \qquad I = 7.2\cdot 10^{-7} \qquad EI := E\cdot I \qquad EI = 144 \qquad L := 300\cdot a \qquad L = 6 \qquad R := 1000\cdot a \qquad R = 20$

$M_e := \frac{b\cdot h^2}{6}\cdot\sigma_p \qquad M_e = 4.8 \qquad \chi_e := \frac{10^{-3}}{\frac{h}{2}} \qquad \chi_e = 0.033 \qquad R_e := \frac{1}{\chi_e} \qquad R_e = 30$

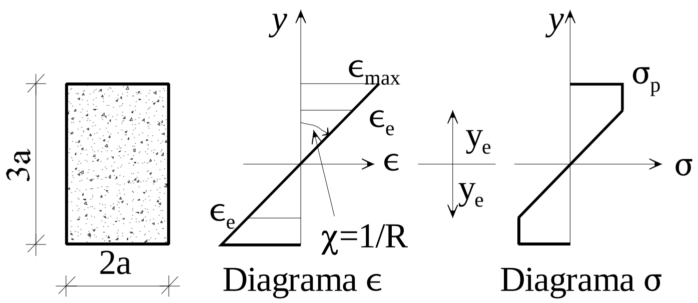
$M_p := 1.5\cdot M_e \qquad M_p = 7.2$

$\chi_{max} := \frac{1}{R} \qquad \chi_{max} = 0.05 \qquad \varepsilon_{max} := \chi_{max}\cdot\frac{h}{2} \qquad \varepsilon_{max} = 1.5\cdot 10^{-3} \qquad y_e := \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_{max}}\cdot\frac{h}{2} \qquad y_e = 0.02$

$M_{max} := M_p - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot b\cdot\sigma_p\cdot y_e\cdot\frac{y_e}{3}$

$M_{max} = 6.133$

$P := \frac{M_{max}}{\frac{3\cdot L}{4}} \qquad P = 1.363$



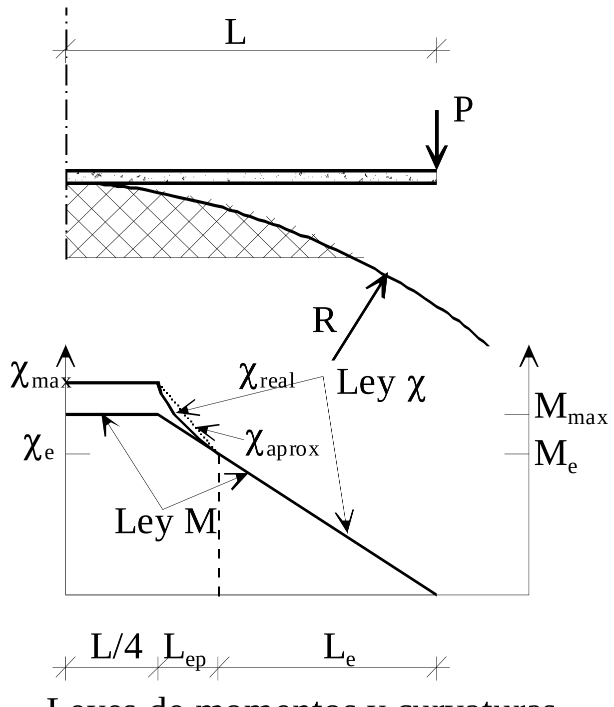
Longitud elática $\qquad L_e := \frac{M_e}{P} \qquad L_e = 3.522$

Longitud con curvatura elatoplástica variable $\qquad L_{ep} := L - L_e - \frac{L}{4} \qquad L_{ep} = 0.978$

Cálculo de la flecha

$$v := \frac{1}{2}\chi_e\cdot L_e\cdot\frac{2}{3}\cdot L_e + \chi_e\cdot L_{ep}\cdot\left(L_e + \frac{L_{ep}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\chi_{max} - \chi_e\right)\cdot L_{ep}\cdot\left(L_e + \frac{2}{3}\cdot L_{ep}\right) + \frac{L}{4}\cdot\chi_{max}\cdot\left(L - \frac{L}{8}\right)$$

$v = 0.696$



Leyes de momentos y curvaturas

Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad Examen extraordinario 5 de septiembre de 2014	Apellidos . . . . Nombre . . . . Nº.................... 3er curso Alumnos de Adaptación marcad X aquí ☐

Ejercicio 4. (Se recogerá a las 20,30 h aprox.)

El tetraedro irregular de vértices *A(0,1,0)*, *B(0,1,1)*, *C (0,0,1) y D(1,0,0)* de la figura se encuentra en el interior de un sólido elástico sometido a unas cargas exteriores que producen en su interior un estado de tensión constante. Se conocen los vectores tensión total sobre tres de las cuatro caras del tetraedro, que son (en MPa):

$$t_{ABD} = \begin{Bmatrix} 4{,}243a \\ 2{,}121a \\ 1{,}414a \end{Bmatrix} \quad ; \quad t_{BCD} = \begin{Bmatrix} 5{,}657a \\ 0 \\ 0{,}707a \end{Bmatrix} \quad ; \quad t_{ABC} = \begin{Bmatrix} -6a \\ 0 \\ -2a \end{Bmatrix}$$

Se pide:

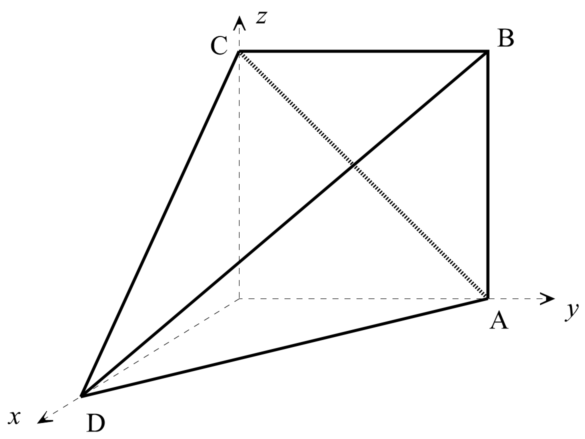
a) Determinar el tensor de tensiones en cualquier punto del sólido. (*4 puntos*)

b) Obtener las tensiones principales y sus direcciones. (*3 puntos*)

d) Encontrar las tensiones tangenciales máximas y sus direcciones. (*1 punto*)

e) Determinar el coeficiente de seguridad frente a la rotura del sólido si las tensiones de rotura son en (MPa):

- — a tracción 2,5,
- — a compresión 30 y
- — a cortante 1,5,



e indicar la causa de la rotura. (Se acepta la hipótesis de que las tensiones crecen linealmente con la carga exterior hasta la rotura.)

(*2 puntos*)

Tetraedro

$a := 1\cdot\sqrt{2}$ $\quad \sigma_T := 25$ $\quad \sigma_C := 300$ $\quad \tau_{adm} := 15$

[T] [n_1,n_2,n_3]=[t_1,t_2,t_3] $\quad$ ORIGIN := 1

$$T := \begin{bmatrix} 6\cdot a & 8\cdot a & -12 \\ 3\cdot a & 0 & 0 \\ 2\cdot a & a & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \qquad T = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Tensiones principales

Por observación $\quad \sigma_1 := T_{2,2} \qquad d_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_1 = 6$

Las otras dos están en el plano x-z $\quad \sigma_x := T_{1,1} \quad \sigma_z := T_{3,3} \quad \tau_{xz} := T_{1,3}$

$$\sigma_2 := \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^{\,2}} \qquad \sigma_2 = 13.062$$

$$\sigma_3 := \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^{\,2}} \qquad \sigma_3 = -3.062$$

$$\theta_2 := \operatorname{atan}\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xz}}\right) \qquad \theta_2\cdot\frac{180}{\pi} = 14.872 \qquad \theta_3 := \operatorname{atan}\left(\frac{\sigma_3 - \sigma_x}{\tau_{xz}}\right) \qquad \theta_3\cdot\frac{180}{\pi} = -75.128$$

$$d_2 := \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) \\ 0 \\ \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \qquad d_2 = \begin{bmatrix} 0.966 \\ 0 \\ 0.257 \end{bmatrix} \qquad d_3 := \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) \\ 0 \\ \sin(\theta_3) \end{bmatrix} \qquad d_3 = \begin{bmatrix} 0.257 \\ 0 \\ -0.966 \end{bmatrix}$$

Comprobaciones: $\quad d_1^{\,T}\cdot d_2 = 0 \quad d_2^{\,T}\cdot d_3 = 0 \quad d_3^{\,T}\cdot d_1 = 0$

Tensiones tangenciales

$$\tau_{max} := \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \qquad \tau_{max} = 8.062 \qquad \tau_1 := \frac{d_2 + d_3}{\sqrt{2}} \qquad \tau_1 = \begin{bmatrix} 0.865 \\ 0 \\ -0.502 \end{bmatrix}$$

$$\tau_2 := \frac{d_2 - d_3}{\sqrt{2}} \qquad \tau_2 = \begin{bmatrix} 0.502 \\ 0 \\ 0.865 \end{bmatrix}$$

Comprobaciones $\quad \tau_2^{\,T}\cdot d_1 = 0 \quad \tau_2^{\,T}\cdot d_2 = 0.707 \quad \tau_1^{\,T}\cdot d_2 = 0.707$

Coeficientes de seguridad

$$\gamma_T := \frac{\sigma_T}{\sigma_2} \qquad \gamma_T = 1.914 \qquad \gamma_C := \frac{\sigma_C}{-\sigma_3} \qquad \gamma_C = 97.967 \qquad \gamma_\tau := \frac{\tau_{adm}}{\tau_{max}} \qquad \gamma_\tau = 1.861$$