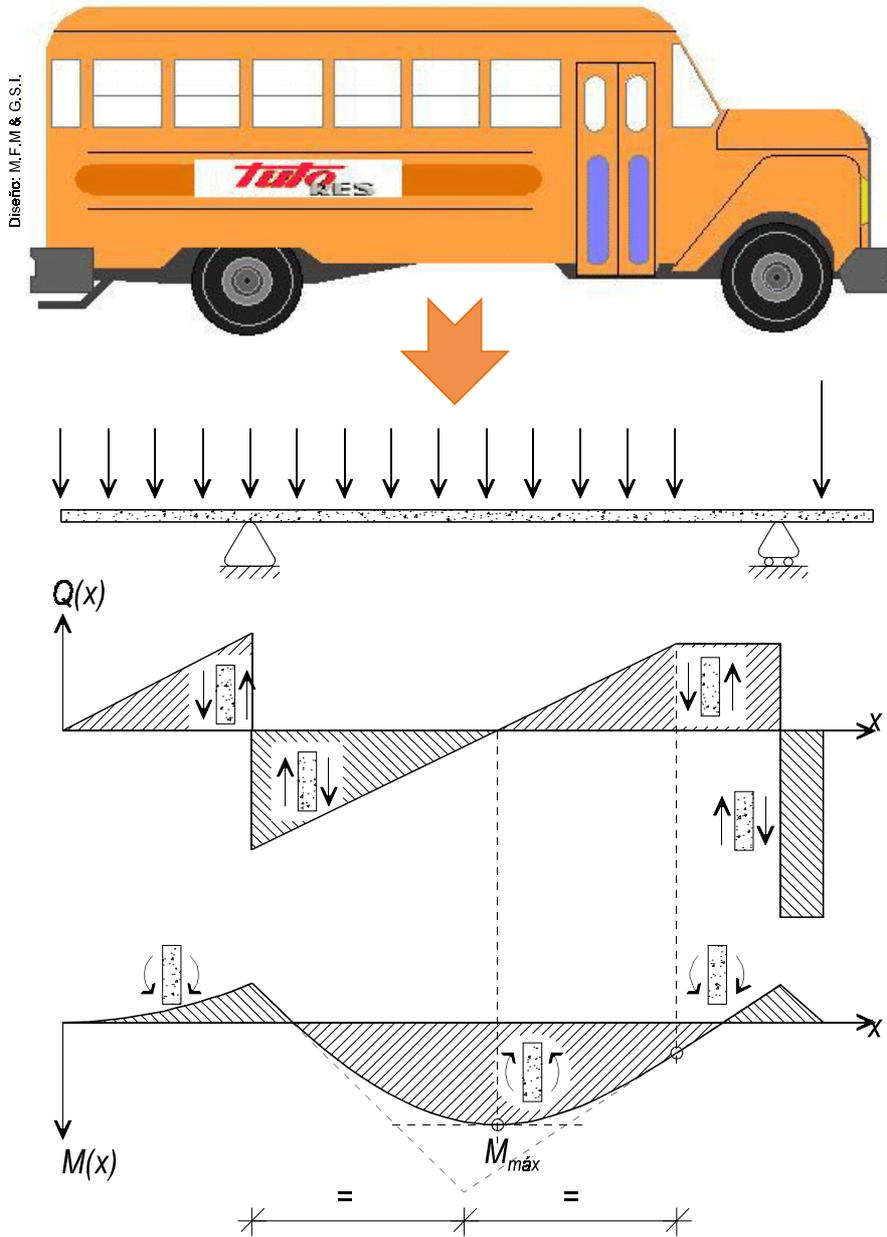


TutoRES

Curso tutorial de Resistencia



Rafael Fernández Díaz-Munío

*Tuto*RES

Curso tutorial de Resistencia

Rafael Fernández Díaz-Munío

Profesor titular

Dr. Ingeniero de Caminos, Ph.D.

Edición 0a
Febrero, 2006

© Rafael Fernández Díaz-Munío

Reservados los derechos para todos los países. Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño de cubierta, puede ser reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma ni por ningún medio, sea éste electrónico, químico, mecánico, electro-óptico, grabación fotocopia o cualquier otro, sin autorización escrita de la editorial.

I.S.B.N. 84-7493-342-0

Agradecimientos:

A **Manolo Negrón**, que hace muchos años me puso en el buen camino de la Resistencia (aunque se lamentará de lo poco que me ha lucido).

A **Jesús de Pablo**, mi alumno más motivado del curso 04-05.
A **Rafael Rodríguez Molina**.

(En este espacio seguiré incluyendo los nombres de los muchos alumnos y compañeros que me vais a corregir errores y erratas.)

|
|
|
|
|

A mi hijo Miguel y a Guillermo Santa Isabel, hijo de mi editor,

Prólogo

*Me lo contaron y lo olvidé;
lo vi y lo entendí;
lo hice y lo aprendí.*

Confucio

Con la asignatura de Resistencia vas a realizar el primer intento de sacar partido de tus conocimientos de Matemáticas y Física para modelizar fenómenos del mundo real, si bien en su aspecto más simple, el comportamiento de las vigas cargadas; comportamiento sencillo pero nada trivial. Conviene que no pierdas de vista que estarás tratando de *predecir* un fenómeno natural; si llegas a resultados antinaturales tendrás que corregir tus cálculos y/o tus modelos e hipótesis. Y ésta puede ser la idea más importante contenida en estas páginas. Por eso, los **objetivos** de este curso TUTORIAL DE RESISTENCIA son ayudarte a:

- **Desarrollar tu intuición física** para que entiendas cómo funcionan las estructuras de vigas y te resulte fácil su análisis (y el de otros fenómenos naturales, más adelante);
 - y *no*, asimilar técnicas complejas de cálculos abstractos.
- **Aprobar la asignatura**, y para esto intento proporcionarte dos cosas:
 - una **teoría** resumida, sin concesiones al rigor (que tan a menudo se convierte en *rigor mortis*¹) ni al amor propio, suficiente para resolver casi todos los problemas bienintencionados que te puedan caer en los exámenes, y
 - un gran número de **problemas** de examen, **resueltos** a mi manera, para que, resolviéndolos tú con tu propio esfuerzo², te ayuden:
 - ▶ a *comprender* la teoría;
 - ▶ a *corregir* tus errores de concepto y/o de cálculo, comparando resultados y métodos; y
 - ▶ a adquirir la *soltura* indispensable para enfrentarte al temido examen,
 - exponiéndote a casi todos los tipos de problemas que maliciosos profesores hemos concebido —y parido— durante años, y que aquí he intentado *catalogar*.

Siendo ésta una *Edición 0*, no revisada ni corregida por nadie, tendrás que usarla con prudencia, consciente del riesgo que entraña y aceptando no reclamar a nadie más que al maestro armero por los perjuicios que te causen sus erratas y errores; que pueden ser hasta de la categoría de esos *horrores de concepto* que los profesores castigamos con absoluta impiedad. Tú, en cambio, serás clemente conmigo y me los harás saber discretamente para corregirlos. Me encontrarás en mi despacho del Laboratorio de Estructuras, bien dispuesto a atender tus dudas, sugerencias, correcciones,...

Gracias.

Rafael Fernández

¹ **Hamming**, *Digital Filters*, Prentice-Hall, Inc., second edition, 1983. Hago más sus frases de la p. 10 : «We will avoid becoming too involved with mathematical rigor, which all too often tends to become rigor mortis» y de la p. 65 : «Those who believe that mathematical rigor justifies de use of mathematics in applications are referred to... [lista de autores] for rigor. Those who believe that is the usefulness in practice that justifies the mathematics are referred to the rest of this book».

² Si te limitas a leer los problemas (o, mucho peor, a intentar memorizarlos) descubrirás —ojalá no demasiado tarde— que pierdes el tiempo, preciosa sustancia no reciclable. «Time is the stuff life is made of», se lee al principio de la película *Lo que el viento se llevó*.

Índice

1. Pre-Resistencia

1.0 Justificación, objetivos y contenido	1.1
1.1 Estática básica	1.2
Fuerza, momento; álgebra. Acción y reacción. Apoyos y reacciones. Fuerzas repartidas; equivalencia estática. Centro de gravedad. Equilibrio estático. Reacciones en ménsulas. Peso propio de viga curva. Primer teorema de Guldin. Presión hidráulica. Depósito cilíndrico. Segundo teorema de Guldin. Reacciones en vigas biapoyadas. Intercambio de ecuaciones. Momentos de inercia. I del rectángulo. Teorema de Steiner. Ejemplo práctico. Otras inercias; ejes principales. Inercias del círculo. Resumen.	

2. Esfuerzos

2.0 Importancia, objetivos y contenido	2.1
2.1 Resistencia, o Teoría de vigas	2.2
Concepto de estructura. Elasticidad, Resistencia. Viga y pieza prismática. Estructuras reticuladas planas. Resumen.	
2.2 Isostatismo	2.3
Símil hidráulico. Hiperestatismo= redundancias. Estructuras isostáticas <i>patrón</i> . Tres coacciones no <i>bastardas</i> . Propiedad. Resumen.	
2.3 Esfuerzos en estructuras isostáticas	2.4
Definición provisional. Tres clases de esfuerzos. Concepto doliente. Concepto cruento. Definición depurada. Concepto práctico. Convenio de signos. Exterior, absoluto; interior, relativo. Cálculo. Advertencia, ¡peligro! Resumen.	
2.4 Ejemplos de esfuerzos en vigas	2.8
Ejemplo 2.4.1: Carga axil uniforme. Enseñanzas. Ejemplo 2.4.2: Carga axil lineal. Enseñanzas. Ejemplo 2.4.3: Momento exterior. Enseñanzas. Ejemplo 2.4.4: Carga puntual. Enseñanzas. Ejemplo 2.4.5: Carga uniformemente repartida. Enseñanzas. Ejemplo 2.4.6: Carga repartida sobre la mitad de la luz. Enseñanzas. Resumen.	
2.5 Relaciones entre esfuerzos y cargas exteriores	2.15
Quién se relaciona con quién. Objetivos. El equilibrio manda. Fórmulas valiosas. Ejemplo 2.5.1: Axiles, de otra manera. Enseñanzas. Ejemplo 2.5.2: Flexión, de otra manera. Enseñanzas. Dificultades. Condiciones de contorno. Resumen.	
2.6 Problemas de esfuerzos en vigas	2.19
Problema 2.6.1: Ménsulas. Enseñanzas. Problema 2.6.2: Vigas biapoyadas. Enseñanzas. Problema 2.6.3: Más vigas biapoyadas. Enseñanzas. Problema 2.6.4: Teórico. Enseñanzas.	
2.7 Cálculo de esfuerzos en pórticos isostáticos	2.29
Novedad 1: Fuenteovejuna. Novedad 2: evolución de signos. Ejemplo 2.7.1: Práctico. Enseñanzas. Ejemplo 2.7.2: Filosófico. ¡Cuidado con el <i>tipo</i> de carga repartida! ¡Es isostática! Cálculo de reacciones. Obtención analítica. Obtención <i>filosófica</i> . Descomposición vectorial. Resiste por axil cuando puede. Enseñanzas. Ejemplo 2.7.3: Teórico. Enseñanzas.	
2.8 Problema inverso: dados los esfuerzos encontrar las cargas	2.35
Método. Ejemplo 2.8.1: Vigas. Isostáticas, siempre. Hiperestáticas, excepcionalmente. Enseñanzas. Ejemplo 2.8.2: Pórtico. Enseñanzas. Resumen.	

3 Tensiones y deformaciones

3.0 Objetivos y contenido	3.1
3.1 Conceptos de tensión: total, normal y tangencial	3.2
Concepto intuitivo. Tensión total. Componentes σ y τ . Esfuerzos. Resumen.	
3.2 El material de la Resistencia de Materiales	3.3
Deformarse para resistir. Como el muelle. El cuerpo, conocido. El material de Hooke. Diagrama $F-\Delta L$. Diagrama $\sigma-\epsilon$. $E = \sigma/\epsilon$. Ejemplo 3.2.1: Deformación limitada. Enseñanzas. Resumen.	

(3 Tensiones y deformaciones, continuación)

3.3 Reparto de tensiones normales, según Navier	3.5
Objetivo. Hipótesis de Navier. Equivalencia estática entre esfuerzos y paquete de tensiones. La superfórmula. Ejemplo 3.3.1: Material mejor y peor distribuido. Enseñanzas. Sección no-homogénea. Ejemplo 3.3.2: Distintos materiales. Comprobación. Enseñanzas. Si no valen tracciones... Ejemplo 3.3.3: Con fisuración. Enseñanzas. Núcleo central. Pretensado. Zapatas. Ejemplo 3.3.4: Zapata. Enseñanzas. Secciones discretas. Ejemplo 3.3.5: Sección colgada. Enseñanzas. Resumen.	
3.4 Reparto de tensiones tangenciales	3.14
Objetivos. Cometido: hacer el hojaladre monolítico. ¡Las τ 's son cuatrillizas! Las τ 's se determinan por equilibrio. Limitaciones. Sección rectangular. Saltos en las secciones en T ; τ 's en las alas. Ejemplo 3.4.1: τ 's bidireccionales. Enseñanzas. Caso patológico: la sección triangular. Sección circular. Resumen.	
3.5 Deformaciones mecánicas	3.20
Paquete de deformaciones. El axil sólo produce alargamiento. El momento flector sólo produce curvatura. El cortante... Resumen.	
3.6 Deformaciones térmicas	3.21
Tensiones, <i>casi</i> sólo mecánicas. Deformaciones, mecánicas y térmicas. ϵ_g y χ por $\Delta T(y)$ lineal. Sentido físico. ϵ_g , χ y $\sigma(y)$ por $\Delta T(y)$ no lineal. Ejemplo 3.6.1: Variación térmica parabólica sobre el canto. Método <i>del dictador</i> . Diagrama autoequilibrado. Liberación. Deformaciones, <i>siempre</i> planas. Enseñanzas. Resumen.	
3.7 Problemas de secciones	3.25
Problema 3.7.1: Sección evolutiva. Enseñanzas. Problema 3.7.2: Objetivos del pretensado. Enseñanzas. Problema 3.7.3: Cabeza caliente, alma fría. Enseñanzas. Problema 3.7.4: No se aceptan tracciones. Enseñanzas. Problema 3.7.5: Flexión esviada, núcleo central y pretensado. Enseñanzas.	

4 Movimientos

4.0 Importancia, objetivos y contenido	4.1
4.1 Simplificaciones de la microcinemática	4.2
Simplificación fundamental. Causas aisladas, sucesivas, simultáneas. Principio de Superposición. Forzados a despreciar. Movimientos causados por un giro pequeño. La circunferencia degenera. Hipotenusa= cateto grande. Giro \times distancia perpendicular. Discriminación angular. Resumen.	
4.2 Movimientos por esfuerzo axil	4.4
Muelle. Movimientos como suma de deformaciones discretas. Ejemplo 4.2.1: Alargamientos discretos. Enseñanzas. Movimientos como integrales de deformaciones continuas. Ejemplo 4.2.2: Alargamientos continuos. Enseñanzas. Movimientos adicionales por apoyos <i>aviesos</i> . Ejemplo 4.2.3: Alargamientos con restricciones externas. Enseñanzas. Movimientos adicionales por coacciones internas. Ejemplo 4.2.4: Alargamientos con restricciones internas. De otro modo. Contragradiencia. Enseñanzas. Resumen.	
4.3 Movimientos por flexión	4.8
Muelle rotativo. Ejemplo 4.3.1: Flexión discreta en una ménsula. Enseñanzas. Ejemplo 4.3.2: Flexión discreta en una viga; giros en los apoyos. Enseñanzas. Comprobación. Hallazgos. Siguiente objetivo. Ejemplo 4.3.3: Ménsula con momento en la punta. Interpretación geométrica: teoremas de Mohr. Enseñanzas. «Giros gordos». C.d.g.'s siempre sobre la directriz. Ejemplo 4.3.4: Ménsula con carga en la punta. Enseñanzas. Vigas apoyadas: novedades viejas. Ejercita tu memoria. Ejemplo 4.3.5: Viga apoyada con carga puntual. Enseñanzas. Ejemplo 4.3.6: Viga biapoyada con carga uniforme. Enseñanzas. Giros en rótulas. Ejemplo 4.3.7: Viga con rótula. Enseñanzas. Curvaturas térmicas. Ejemplo 4.3.8: Curvatura térmica. Enseñanzas. Resumen.	
4.4 Más sobre movimientos. Bresse	4.20
Dilatación uniforme. La estructura se agranda homotéticamente. Paradoja. Giros de compatibilidad Otros giros de compatibilidad. Método general. Dilatación no uniforme. Ejemplo 4.4.1: Viga con dilatación no uniforme. Enseñanzas. Añadimos términos. Bresse. Resumen.	

(4 Movimientos, continuación)

4.5 Problemas de cálculo de movimientos	4.23
Problema 4.5.1: Viga en flexión. Enseñanzas. Problema 4.5.2: Otra viga en flexión. Enseñanzas. Problema 4.5.3: Viga con rótula. Enseñanzas. Problema 4.5.4: Dilatación de un pórtico. Enseñanzas. Problema 4.5.5: Dilatación de un arco. Enseñanzas. Problema 4.5.6: Dilatación de un arco con rótula. Enseñanzas. Problema 4.5.7: Flexión de un arco bajo presión hidrostática. Enseñanzas.	

5 Ecuaciones

5.0 Objetivos y contenido	5.1
5.1 Ecuación de la barra	5.2
Qué es. Qué queremos. Relación movimiento-deformación. Condiciones de contorno. Resultados. Ejemplo 5.1.1: Barra con carga en su extremo. Enseñanzas. Ejemplo 5.1.2: Barra con carga uniforme. Enseñanzas. Ejemplo 5.1.3: Carga uniforme en barra hiperestática. Enseñanzas. Ejemplo 5.1.4: Carga puntual en barra hiperestática. Enseñanzas. Resumen.	
5.2 Ecuación de la viga	5.6
Objetivo. Pasos. Relación movimiento-deformación. Condiciones de contorno. Ecuaciones reducidas. Resultados. Ejemplo 5.2.1: Viga con carga parabólica. Enseñanzas. Resumen.	
5.3 La viga flotante	5.9
Qué es. Hipótesis. Coeficiente de balasto. Ancho×balasto. Zapata; muelles equivalentes. Ejemplo 5.3.1: Hundimientos de zapata excéntrica. Ecuación diferencial. Solución. Condiciones de contorno. Fórmula recurrente. Ejemplo 5.3.2: Viga flotante infinita con carga puntual. Enseñanzas. Ejemplo 5.3.3: Viga flotante semiinfinita con cargas en el extremo. Enseñanzas. Resumen.	
5.4 Problemas	5.12
Problema 5.4.1: Viga empotrada en un terreno. Enseñanzas.	

6 Hiperestáticas

6.0 Objetivos y contenido	6.1
6.1 Hiperestatismo	6.2
Qué es. Tipos. Recuento de hiperestáticas. Hiperestáticas efectivas. Ventaja e inconveniente. Cálculo. Resumen.	
6.2 Estructuras hiperestáticas simples	6.5
Ejemplo 6.2.1: Reparto de una fuerza horizontal. Isostática asociada. Superposición. Esfuerzos, movimientos. ¿Deformación por axil. Ecuación hiperestática. Enseñanzas. Ejemplo 6.2.2: Cargas mecánica y térmica sobre estructuras de tres barras. Isostática asociada, compatibilidad. Esfuerzos, movimientos; contragradencia. Carga horizontal. Carga térmica. Enseñanzas. Ejemplo 6.2.3: Viga biempotrada. Grado de hiperestatismo. Método 1: una incógnita. ¿La ley de M_f se mueve! Método 2: dos incógnitas. Método 3: truco de profe repelente. Enseñanzas.	
6.3 Problemas de estructuras hiperestáticas sencillas	6.11
Problema 6.3.1: cargas oblicuas. Enseñanzas. Problema 6.3.2: Apoyo avieso. Solución 1. Solución 2. Enseñanzas. Problema 6.3.3: Losa rígida colgada. Enseñanzas. Problema 6.3.4: Barra de sección variable. Enseñanzas. Problema 6.3.5: Losa flexible colgada. Enseñanzas.	
6.4 Vigas continuas	6.20
Caso particular frecuente. Hiperestáticas de flexión y de axil. Hiperestatismo solidario. Método: incógnitas y ecuaciones. Ejemplo 6.4.1: Cargas mecánicas. Enseñanzas. Asientos de apoyo. Ejemplo 6.4.2: Asiento de apoyo. Enseñanzas. Curvatura térmica. Extensión a pórticos intraslacionales. Ejemplo 6.4.3: Pórtico intraslacional. Enseñanzas. Ecuación de los tres momentos. Resumen.	
6.5 Problemas de vigas continuas —y asimilables—	6.26
Problema 6.5.1: Viga continua con temperatura y asiento de apoyo. Enseñanzas. Problema 6.5.2: Viga continua con rótula y asiento de apoyo. Enseñanzas. Problema 6.5.3: Viga continua infinita y con rigidez variable. Enseñanzas. Problema 6.5.4: Pórtico con traslacionalidad conocida. Enseñanzas. Problema 6.5.5: Pórtico con tramos infinitamente rígidos. Enseñanzas. Problema 6.5.6: Pórtico traslacional peculiar.	

(6 Hiperestáticas, continuación)

6.6 Método general de resolución de hiperestáticas	6.37
Repaso. Método automático. Hiperestatismo de apoyo rígido. Hiperestatismo múltiple. Hiperestatismo de apoyo flexible (muelle). Ejemplo 6.6.1: Hiperestatismos de muelles longitudinal y rotativo. Enseñanzas. Hiperestáticas internas. Ejemplo 6.6.2: Hiperestatismo de tirante. Enseñanzas. Ejemplo 6.6.3: Hiperestatismo de tirante con carga en el tirante. Enseñanzas. Resumen.	

7 Pórticos y arcos (Hiperestáticas, 2)

7.0 Objetivos y contenido	7.1
7.1 Pórticos	7.2
Novedades. Viga con patas. Ayuda hiperestática. Ejemplo 7.7.1: Pórtico con apoyo inteligente. Enseñanzas. Efecto pórtico. Ejemplo 7.1.2: Hiperestática <i>afinada</i> . Advertencia 1: la hiperestática no valdrá lo que tú quieras. Advertencia 2: la condición hiperestática no desaparece. Enseñanzas. Resumen.	
7.2 Arcos y antifuniculares	7.8
Efecto arco. Dificultades de cálculo. Antifuniculares. Ejemplo 7.2.1: Antifunicular para carga triangular. Enseñanzas. Antifuniculares familiares. Antifunicular bípedo. Truco mental. Antifunicular circular. Antifunicular parabólico. Variaciones. Ejemplo 7.2.2: Antifunicular sin y con deformación por axil. Interpretación. Enseñanzas. Resumen.	
7.3 Simplificaciones de la simetría	7.15
Simetría en la geometría. Carga simétrica. Asimetría en los apoyos. Ejemplo 7.3.1: Arco doblemente atirantado. Enseñanzas. Carga antisimétrica. Ejemplo 7.3.2: Marco con arco. Enseñanzas. Carga cualquiera. Ejemplo 7.3.3: Marco volante. Enseñanzas. Resumen.	
7.4 Problemas de pórticos y arcos	7.23
Problema 7.4.1: Marco simétrico. Enseñanzas. Problema 7.4.2: Marco con carga general. Enseñanzas. Problema 7.4.3: Marco «Wankel». Enseñanzas. Problema 7.4.4: Aro multisiométrico. Enseñanzas. Problema 7.4.5: Multipórtico. Enseñanzas.	

8 Reciprocidad y líneas de influencia

8.0 Importancia, objetivos y contenido	8.1
8.1 Reciprocidad y celestinas	8.2
Enunciado. Utilidad. Demostración. Corolario: las matrices de flexibilidad son simétricas. Aplicaciones. Resumen.	
8.2 Problemas de detective	8.4
Qué son. Problema 8.1: Dintel enigmático. Comentarios. Solución. Enseñanzas. Problema 8.2.1: Arco de sección variable. Comentarios. Solución. Enseñanzas. Resumen.	
8.3 Problemas de subestructuras	8.7
Qué son. Problema 8.3.1: Pórtico apoyado en otra estructura. Comentarios. Solución. Enseñanzas.	
8.4 Líneas de influencia	8.9
Qué son. Qué <i>no</i> son. Para qué sirven. Qué tipos consideramos. Cómo se obtienen. Resumen.	
8.5 Método directo	8.11
Uso. Ejemplo de l.i. de un giro. Ejemplo de l.i. de una reacción. Ejemplo de l.i. de un esfuerzo. Dificultades. Resumen.	
8.6 Método indirecto	8.12
Reciprocidad sí, reciprocidad no. A) Movimientos: Obtención; regla práctica; distinta <i>raza</i> pero igual aspecto; convenio de signos. B) Reacciones: Obtención; regla práctica. C) Esfuerzos: Obtención; regla práctica; movimientos pequeños; propiedad importante; ejemplos importantes. Resumen.	
8.7 Usos de una línea de influencia	8.16
Dos usos. $i(x)$ no, $i(x)$ sí. Cargas P y q . Observación <i>muy</i> importante. Resumen.	

(8 Reciprocidad y líneas de influencia, continuación)

8.8 Problemas de líneas de influencia	8.18
Problema 8.8.1: L.i.s de esfuerzos y reacciones en viga continua isostática. Enseñanzas.	
Problema 8.8.2: L.i.s de reacciones y esfuerzos en arco isostático. Solución 1: método indirecto (desaconsejado). Solución 2: método ecléctico (aconsejado). Enseñanzas.	
Problema 8.8.3: L.i. de giro relativo en rótula. Enseñanzas.	
Problema 8.8.4: L.i. de cortante en viga continua. Enseñanzas.	
Problema 8.8.5: L.i. de axil en tirante. Enseñanzas.	
Problema 8.8.6: L.i. de momento flector en viga continua. Solución profesional. Solución académica. Enseñanzas.	
Problema 8.8.7: L.i.s de momento flector y flecha en viga continua. Enseñanzas.	
9 Métodos energéticos	
9.0 Preámbulo, objetivos y contenido	9.1
Tres vías.	
9.1 Energías elástica y elástica complementaria	9.2
Ejemplo 1: Energía en barra. Enseñanzas. Energía por unidad de volumen. Expresiones $\frac{1}{2}f^2/k$ o $\frac{1}{2}ku^2$. Energía en la rebanada elemental. Ejemplo 2: Flecha en viga. Enseñanzas. Resumen.	
9.2 Teorema de Castigliano	9.3
Energía elástica complementaria. Ejemplo 3: Igual al 2. Castigliano nos da mucho más. Ejemplo 4: sobrepasa al 2. Resumen.	
9.3 Teorema de la fuerza unidad	9.5
Sistematización. Interpretación física. Rigor. Otras acciones. Ejemplo 5: Pasamos de la rótula. Resumen.	
9.4 En fuerzas, teorema de la mínima EEC	9.6
Hiperestática reinterpretada. Hagamos una porra. Ejemplo 6: Muelles en serie. Resumen.	
9.5 En movimientos, principio de la EPT mínima	9.7
Ejemplo 7: el mismo 1 con otras incógnitas. Variación del movimiento. Principio de la energía potencial <i>total</i> mínima. Interpretación gráfica. Excelencias de las condiciones de mínimo. Otra porra. Ejemplo 8: el mismo 6 en movimientos. Enseñanzas.	
9.6 Método de Rayleigh-Ritz	9.9
Ejemplo 9: Viga biapoyada con carga uniforme. Enseñanzas. Lo complicamos un poco. Resumen.	

1 Pre-Resistencia

1.0 Justificación, objetivos y contenido

Los profesores de *Resistencia* siempre hemos supuesto que nuestros alumnos poseen conocimientos avanzados de disciplinas previas: Cálculo, Álgebra, Física,...; y probablemente es así. No obstante, en este TUTORIAL empezaremos humildemente recordando los conceptos más elementales de Estática del sólido rígido: resultantes de fuerzas y momentos, centro de gravedad, equilibrio estático, presión hidráulica, inercia...

Objetivos	Contenido
General: — Recordar los principios elementales de la Estática del sólido rígido.	
Específicos: — Conocer el efecto de una fuerza y de un momento sobre un cuerpo rígido. — Aprender a reemplazar cargas distribuidas por su resultante puntual. — Saber qué es el centro de gravedad de una figura geométrica y aprender a encontrarlo; <ul style="list-style-type: none">• conocer y aplicar los teoremas de Gulding. — Saber formular las ecuaciones de equilibrio estático , <ul style="list-style-type: none">• y cómo reemplazar unas por otras. — Aprender las características de la presión hidrostática en <ul style="list-style-type: none">• magnitud y• sentido. — Saber calcular las reacciones de una viga apoyada isostáticamente ¹ <ul style="list-style-type: none">• incluso para piezas curvas sometidas a<ul style="list-style-type: none">▶ peso propio y▶ presión hidrostática. — Saber qué son los momentos de inercia de una figura y saber calcularlos: <ul style="list-style-type: none">• respecto un eje,<ul style="list-style-type: none">▶ trasladarlo a un eje paralelo,<ul style="list-style-type: none">□ teorema de Steiner,▶ saber qué es un eje principal de inercia,<ul style="list-style-type: none">□ saber qué es un producto de inercia;• y respecto de un punto.	§1.1

¹ Por ahora, «pasa» de saber qué significa este tecnicismo; al principio sólo trataremos con simples vigas *isostáticas*, con los apoyos estrictamente necesarios para asegurar el equilibrio estático. En §2.2 verás qué estructuras son isostáticas y en §6.1, las no isostáticas.

1.1 Estática básica

Fuerza, momento; álgebra

Tenemos una idea intuitiva de fuerza puntual F (figura 1.1a), y no trataremos de mejorarla. Para arrastrar un objeto con movimiento lineal le aplicamos una fuerza, que se mide en unidades de fuerza, toneladas, kilonewtons, etc. Sin embargo, con una fuerza no aflojamos los tornillos que sujetan la rueda del coche. Para ello se precisa de un *par de fuerzas* $\pm F$ (figura 1.1a) iguales y opuestas aplicadas a una cierta distancia la una de la otra: a este ente *par de fuerzas* que empleamos regularmente para imprimir un movimiento de rotación a un objeto lo llamamos *momento*; es absolutamente heterogéneo de las fuerzas; sus unidades son las del producto de una fuerza por una distancia, por ejemplo $\text{kN}\times\text{m}$. A las fuerzas las consideramos vectores deslizantes y a los momentos, vectores libres. Las fuerzas, por su lado, y los momentos, por el suyo, se suman vectorialmente.

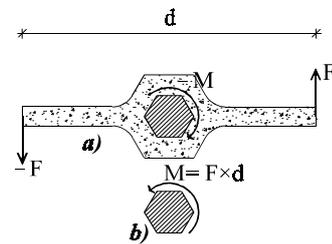


Figura 1.1
Fuerzas y momento para aflojar una tuerca

Acción y reacción

Si a pesar de la aplicación del momento $M = F \times d$ la tuerca no gira, es porque ésta responde a nuestro intento con un momento $-M$ que mantiene en equilibrio estático al conjunto tuerca-llave de la figura 1.1a. La tuerca sufre el momento M (figura 1.1b) y la llave el $-M$.

Apoyos y reacciones

En cuerpos planos consideraremos tres clases de apoyos:

- los que impiden el movimiento de traslación en una dirección (figura 1.2a, aunque habitualmente sólo representamos la mitad inferior, la de trazo continuo en la figura),
 - permitiendo el movimiento en la dirección perpendicular,
 - así como el giro;
- los que impiden el movimiento en dos direcciones (figura 1.2b)
 - y por consiguiente, en *todas direcciones*, pero
 - permiten el giro; y
- los que impiden los tres movimientos: traslaciones horizontal y vertical (o sea, todas), y giro (figura 1.2c).

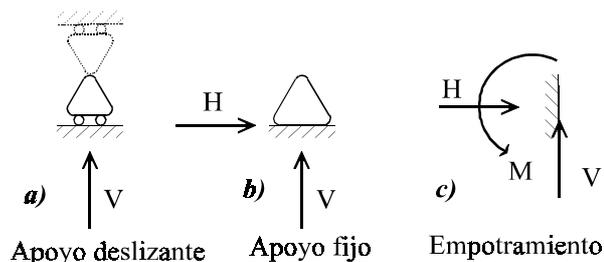


Figura 1.2
Tipos de apoyo y reacciones que ofrecen

Designaremos a estos tres tipos de apoyos con los nombres indicados en la figura 1.2. Para impedir los movimientos los apoyos *emplean la fuerza* necesaria; por eso, cada uno de los apoyos ejerce (o puede ejercer) las reacciones que se muestran junto a él. Podemos imaginar otros apoyos, como los que impiden un movimiento y el giro (figura 7.9b), pero son poco habituales en esta disciplina. En cualquier caso podemos generalizar diciendo que *un apoyo rígido impide el movimiento en una cierta dirección y proporciona la reacción precisa en esa misma dirección*.

Fuerzas repartidas; equivalencia estática

Además de fuerzas puntuales debemos considerar fuerzas repartidas, como la que ejerce un montón de arena sobre su base. Si se reparte sobre una superficie se medirá en t/m^2 , u otras unidades de fuerza repartida por superficie. Si se reparte sobre una longitud sus unidades serán t/m , kN/m , etc. En la figura 1.3 mostramos una carga repartida uniformemente y su supuesta carga puntual estáticamente equivalente, colocada en el punto medio de la anterior. Para

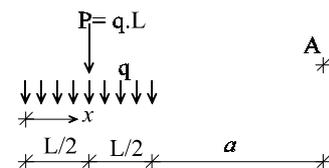


Figura 1.3
Resultante de una carga repartida uniformemente

comprobar la equivalencia estática comprobamos si la cantidad de fuerza es la misma y si el momento respecto de cualquier punto del espacio es el mismo. Tomando momentos en el punto A obtenemos para la carga puntual $P = q_0 L$:

$$M_A(P) = P \times \left(\frac{L}{2} + a \right) = q_0 L \left(\frac{L}{2} + a \right)$$

Si en el intervalo de longitud L la carga total aplicada es $q_0 L$, en el intervalo dx actúa una carga $q_0 dx$ a una distancia $L - x + a$ del punto a A. La suma de sus momentos es:

$$M_A(q) = \int_{x=0}^{x=L} q_0 dx \cdot (a + L - x) = q_0 \left[(a + L)x - \frac{x^2}{2} \right]_0^L = q_0 L \left(a + \frac{L}{2} \right)$$

Como la fuerza total es la misma y el momento respecto de cualquier punto del espacio, el mismo (independiente de a), hemos acertado colocando la resultante en el punto medio.

Centro de gravedad

Llamamos centro de gravedad de una carga repartida al punto en el cual debemos colocar su resultante puntual para que sea efectivamente resultante: para que dé el mismo momento respecto de cualquier punto que la carga repartida a la que reemplaza (sólo a efectos estáticos). Busquemos el c.d.g de la carga triangular de la figura 1.4; podemos imaginar que corresponde al peso de un acopio de arena con este perfil. Es evidente que la carga total es la mitad de la de la figura 1.3. En general la fuerza resultante será la suma o integral:

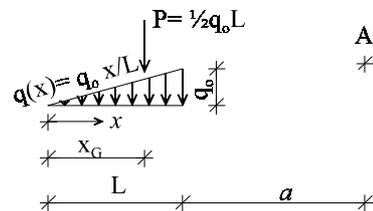


Figura 1.4
Búsqueda del c.d.g de una carga repartida triangularmente

$$(1.1-1) \quad P = \int_{x=0}^{x=L} q(x) dx = \text{Área de carga } q(x)$$

El momento de la carga resultante $P = 1/2 q_0 L$ respecto de A será:

$$M_A(P) = \frac{1}{2} q_0 L \times (L + a - x_G)$$

El de la carga repartida será la suma o integral de los momentos de cada elemento de carga $q(x) dx$:

$$(1.1-2) \quad M_A(q) = \int_0^L q(x) dx (x_A - x) = \int_{x=0}^{x=L} q(x) dx (L + a - x) = \frac{q_0}{L} \int_{x=0}^{x=L} x dx (L + a - x) = \frac{1}{2} q_0 L \times \left(a + \frac{L}{3} \right)$$

Igualando las dos expresiones anteriores se tiene $x_G = 2L/3$ (medida desde el extremo «delgado»).

En la tabla 1.1 tienes las áreas y las posiciones de los c.d.g's de varios perfiles de cargas repartidas. Es muy fácil recordarlas por la secuencia de los factores 1, 1/2, 1/3, etc. de las áreas y 1/2, 1/3, 1/4, de los c.d.g.'s. Recordando estos valores, calcularemos resultantes y momentos mediante sumas y productos en vez de integrando como (1.1-1) y (1.1-2).

Tabla 1.1 Áreas y centros de gravedad

Figura				
Área/bh=	1	1/2	1/3	1/4
$x_G/b=$	1/2	1/3	1/4	1/5

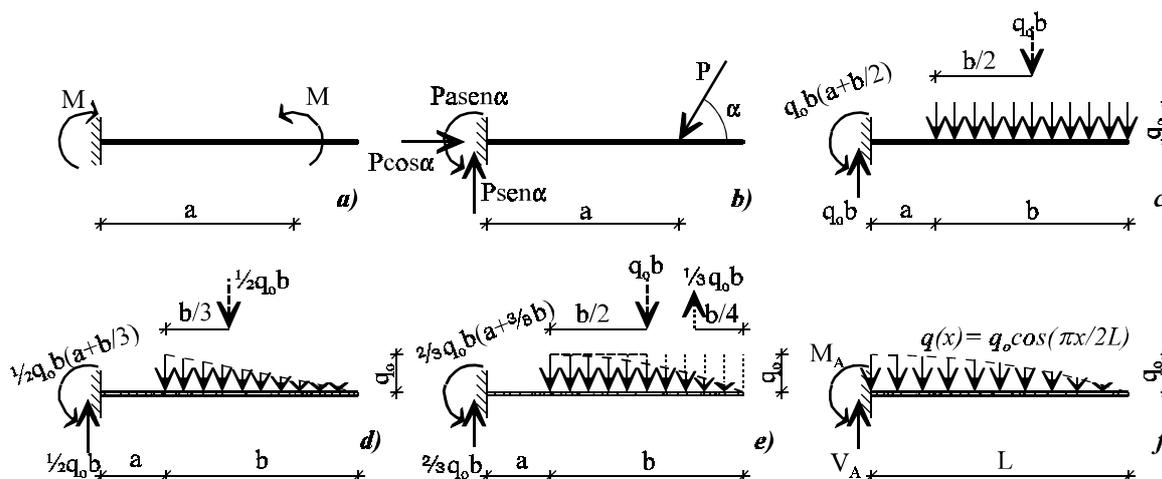


Figura 1.5
Cálculo de las reacciones de apoyo en ménsulas

Equilibrio estático

Por el segundo *Principio* de Newton, un cuerpo está en equilibrio estático si la suma vectorial de todas las fuerzas aplicadas es nula, y nulo es también el momento de todas ellas *respecto de cualquier punto del espacio*. Este principio nos permite calcular las reacciones sobre un cuerpo apoyado isostáticamente. Estas reacciones son fuerzas, tan reales como las otras, que los apoyos nos regalan generosamente en la cantidad exacta que necesitamos para mantener el cuerpo quieto. En estructuras planas aplicaremos las siguientes ecuaciones:

- (1.1-3) (i) *suma de fuerzas horizontales igual a cero,*
(ii) *suma de fuerzas verticales igual a cero,*
(iii) *suma de momentos (respecto de cualquier punto del espacio) igual a cero.*

Reacciones en ménsulas

Llamamos ménsula a la viga empotrada en un extremo y libre en el otro. Todas las de las figuras 1.5a-f producirán reacciones H_A , V_A , M_A como las de la figura 1.2c. En las correspondientes figuras se indican las reacciones que resultan. Lo más rápido es reemplazar mentalmente las cargas repartidas por su resultante correctamente situada en el c.d.g. (ver tabla 1.1), como se indica en la propia figura mediante una carga puntual dibujada de trazos. Para el caso de la figura 1.5e, con una carga distribuida en parábola de 2º grado con máximo de q_0 operamos como sigue. Si no conocemos la posición del c.d.g. de la parábola «gorda» (no dado en la tabla 1.1), descomponemos la figura mentalmente en una carga uniforme *menos* una parabólica «delgada» como la que está en la tabla 1.1. Las reacciones resultan ser:

$$V_A = q_0 b - \frac{1}{3} q_0 b = \frac{2}{3} q_0 b$$

$$M_A = q_0 b \left(a + \frac{b}{2} \right) - \frac{1}{3} q_0 b \left(a + \frac{3b}{4} \right) = \frac{2}{3} q_0 b \left(a + \frac{3b}{8} \right)$$

(resultado que nos dice que el c.d.g. de la parábola de 2º grado «grande» está a 3/8 de la base). Para el caso de la figura 1.5f lo mejor es integrar:

$$V_A = \int_0^L q_0 \cos \frac{\pi x}{2L} dx = q_0 \frac{2L}{\pi}$$

$$M_A = \int_0^L x q_0 \cos \frac{\pi x}{2L} dx = q_0 L^2 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} \right)$$

(La segunda integral se hace *por partes*.) Si, con un cierto criterio ingenieril, hubiéramos reemplazado la función coseno por una parábola de 2º grado, el error habría sido del 4,7% en exceso para la reacción y del 8% en exceso para el momento.

Peso propio de viga curva

Si q_o es el peso por unidad de longitud de la viga circular de la figura 1.6, el peso total será $P = q_o \pi/2$. El momento de empotramiento lo podemos calcular de dos maneras, integrando o hallando el c.d.g., punto de aplicación de P . Sumamos el momento de cada fuerza elemental $q_o ds$:

$$M_A = \int_A^B x q_o ds = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} R \text{sen} \varphi q_o R d\varphi = q_o R^2$$

Dividiendo el momento por la carga total resulta la posición del c.d.g., $x_G = 2R/\pi$.

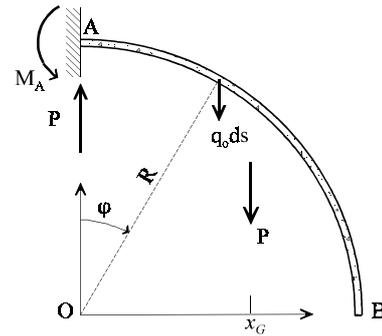


Figura 1.6
Cálculo de las reacciones de una viga curva

Primer teorema de Guldin

Alternativamente podríamos haber hallado x_G sin integrar mediante el primer teorema de Guldin, que dice que *el área generada por una curva al girar en torno a un eje es igual a la longitud de la curva por el recorrido de su c.d.g.*: $A = L \times 2 \pi x_G$. Aquí, girando el arco AB en torno al eje AO generamos una semiesfera:

$$2\pi R^2 = \frac{\pi}{2} R \times 2\pi x_G \Rightarrow x_G = \frac{2R}{\pi}$$

Conocido este valor, $M_A = P \times x_G$.

Presión hidráulica

Es imprescindible que sepas dos cosas acerca la presión hidráulica, tan frecuente en nuestras estructuras:

- que es *proporcional a la profundidad* del líquido,
 - con factor de proporcionalidad ρ , su peso específico (para el agua, $\rho = 1 \text{ t/m}^3 \approx 10 \text{ kN/m}^3$),
- y que siempre actúa *ortogonalmente* a las paredes del recipiente.

Depósito cilíndrico

Calculemos ahora las reacciones del depósito semicilíndrico de la figura 1.7a de 1m de ancho. Lo podemos hacer de dos maneras; una de ellas es integrando las componentes horizontal, vertical y momento de las presiones hidrostáticas $p(y) = \rho y$ multiplicadas por la superficie sobre la que actúan en cada punto del depósito (figura 1.7b):

$$H_A = - \int_0^{\pi/2} p(\varphi) R d\varphi \text{sen} \varphi = - \rho R^2 \int_0^{\pi/2} \text{sen} \varphi \cos \varphi d\varphi = - \frac{1}{2} \rho R^2$$

$$V_A = \int_0^{\pi/2} p(\varphi) R d\varphi \cos \varphi = \rho R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} \rho R^2$$

$$M_A = \int_0^{\pi/2} p(\varphi) R d\varphi D(\varphi) = \rho R^3 \int_0^{\pi/2} \text{sen} \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \rho R^3$$

La segunda manera es considerando el equilibrio del conjunto OAB del depósito con el agua que tiene por encima (figura 1.7c). Este cuerpo heterogéneo está sometido a su propio peso P , aplicado en el centro de gravedad del sector circular, y al empuje E resultante de las presiones hidrostáticas que el líquido a la izquierda de OA ejerce sobre el del sector. Es claro que el empuje vale $E = \rho R^2/2$ y está aplicado a $R/3$ por encima de A. El peso propio vale $P = \rho \pi R^2/4$ y su punto de aplicación lo encontraremos aplicando el:

Segundo teorema de Guldin

Semejante al primero, dice $V = A \times 2 \pi x_G$. V , volumen generado por una superficie de área A al girar en torno a un eje; $2 \pi x_G$ es el recorrido de su c.d.g. En nuestro caso:

$$x_G = \frac{\frac{2}{3} \pi R^3}{2\pi \frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi}$$

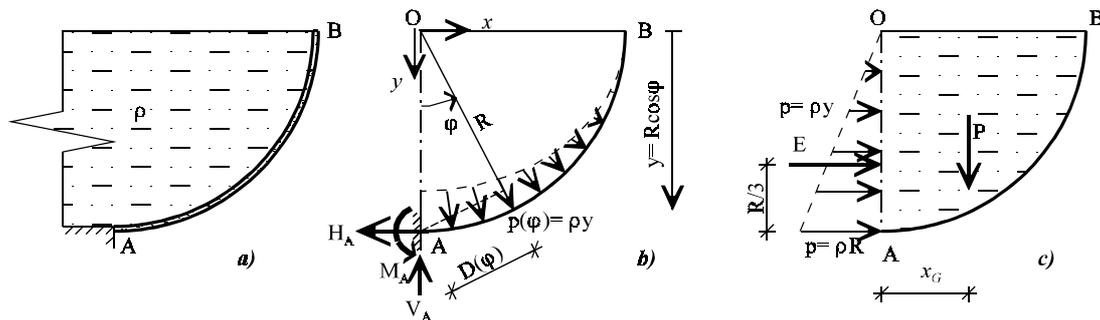


Figura 1.7
Reacciones por presión hidrostática en un recipiente cilíndrico

Por consiguiente:

$$M_A = P \times x_G + E \times \frac{R}{3} = \rho \frac{\pi R^2}{4} \times \frac{4R}{3\pi} + \frac{1}{2} \rho R^2 \times \frac{R}{3} = \rho \frac{R^3}{2}$$

Reacciones en vigas biapoyadas

Es importante entender que para soportar un momento (figura 1.8a) la viga biapoyada no tiene más opción que oponer un par de fuerzas de valor $\pm M/L$; no importa qué posición ocupe el momento —o fuera— de la viga. (También puedes calcular estas reacciones como en el caso siguiente.)

Para el cálculo de reacciones en vigas, a menudo lo más práctico es tomar momentos en ambos extremos A y B. Así, para la figura 1.8b:

$$\begin{aligned} \sum M_B &= -V_A \times L + P b = 0 \Rightarrow V_A \\ \sum M_A &= -P a + V_B \times L = 0 \Rightarrow V_B \end{aligned}$$

Cada reacción sale de una única ecuación, sin resolver un sistema. La ecuación suma de fuerzas verticales se usa como comprobación. Observa que hemos sacado una ecuación (1.1-3c) extra renunciado a una ecuación la (1.1.3b) (que, sin embargo, se cumplirá). El resultado:

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{P b}{L} \\ V_B &= \frac{P a}{L} \end{aligned} \tag{1.1-4}$$

debes recordarlo siempre y meditarlo. Dice que la magnitud de la reacción es proporcional a la distancia *al otro apoyo*; sufre más el apoyo cuanto más cercano. Esta fórmula se puede emplear para calcular las reacciones de la viga de la figura 1.8c, dando a P el valor $\frac{1}{2}q_0 b$, a a el valor $a+b/3$ y a b el valor $2b/3$.

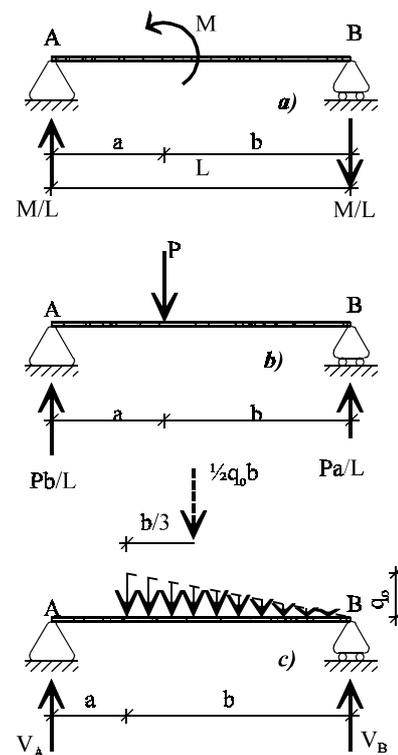


Figura 1.8
Cálculo de reacciones en vigas biapoyadas

Intercambio de ecuaciones

Habrás observado que en la obtención de (1.1-4) hemos aplicado dos veces la ecuación de momentos (1.1-3iii) y ninguna, la (1.1-3ii). Ecuaciones en momentos puedes escribir infinitas, y ocasiones habrá en que estarás tentado de hacerlo; pero perderás el tiempo y pondrás tu ignorancia al descubierto vergonzosamente. Si ya satisfaces las (i) y (ii), sólo una ecuación del tipo (iii) te valdrá: todas las demás dirán exactamente lo mismo (son combinaciones lineales de ellas). No obstante, como hicimos en (1.1-4), podemos renunciar a la ecuación (i) y/o a la (ii) y ganar otras tantas adicionales del tipo (iii).

Momentos de inercia

La primera vez que aparece el momento de inercia de un cuerpo es cuando aplicamos el tercer Principio de Newton (*fuerza = masa × aceleración*) a un sólido que gira impulsado por un momento M . Dice este Principio que el cuerpo adquiere una aceleración angular α relacionada con M por la ecuación $M = I \cdot \alpha$ en donde I es el momento de inercia del sólido respecto del eje o del centro de rotación. Si el eje de giro es el x , el momento de inercia es la suma de las masas por el cuadrado de las distancias al eje, $\sum m_i \cdot y_i^2$, o en el caso continuo:

$$(1.1-5) \quad I_{xx} = \iint_A y^2 \gamma \, dx \, dy = \int b(y) y^2 \, dy$$

$b(y)$ es el ancho de la figura a la cota y (en dirección x , figura 1.9a). En muchas aplicaciones no interesa la densidad γ y se toma unidad. Como es suma o integral de términos positivos, *el momento de inercia es siempre positivo*. Serás castigado con todo rigor si aceptas que te salga negativo.

I del rectángulo

De acuerdo con la figura 1.9b:

$$(1.1-6) \quad I_{xx} = \int_{-h/2}^{+h/2} b y^2 \, dy = 2b \int_0^{h/2} y^2 \, dy = \frac{1}{12} b h^3$$

valor que debes recordar hasta que apruebes esta asignatura. Hemos calculado el momento de inercia respecto del eje que pasa por el c.d.g. Si lo calculamos respecto de otro eje que diste d de él (figura 1.9b), nos sale más grande:

$$(1.1-7) \quad I_{dd} = \int_{-h/2}^{+h/2} b(y)(y+d)^2 \, dy = \int_{-h/2}^{+h/2} b(y)(y^2 + 2yd + d^2) \, dy = I_{GG} + A d^2$$

Hemos quitado la integral de $b(y) \cdot y$ del segundo sumando porque representa el momento estático respecto del c.d.g. y sale cero (condición de c.d.g.). La integral de $b(y)$ es el área. Esta fórmula nos enuncia el:

Teorema de Steiner

Dice que *el momento de inercia respecto de un eje cualquiera es igual al momento de inercia respecto del eje paralelo que pasa por el c.d.g más el área de la figura por la distancia al cuadrado*. Así pues, el momento de inercia es mínimo respecto del c.d.g. y crece desmesuradamente al alejarnos de él.

Ejemplo práctico

Calculemos le inercia respecto del eje horizontal que pasa por el c.d.g. de la T de la figura 1.10a. Necesitamos encontrar antes la posición de su c.d.g. G . Escribimos que el momento de los rectángulos parciales respecto del borde inferior (o cualquier otro eje horizontal) es igual al de la sección completa:

$$A_1 \times d_1 + A_2 \times d_2 = (A_1 + A_2) c_i$$

$$c_i = \frac{20 \times 60 \times (10 + 60) + 60 \times 20 \times 30}{(A=) 20 \times 60 + 60 \times 20} = 50 \text{ cm}$$

$$c_s = 20 + 60 - c_i = 30 \text{ cm}$$

El área es de 2.400 cm² y el c.d.g. está 50 cm por encima del borde inferior y 30 cm por debajo del superior.

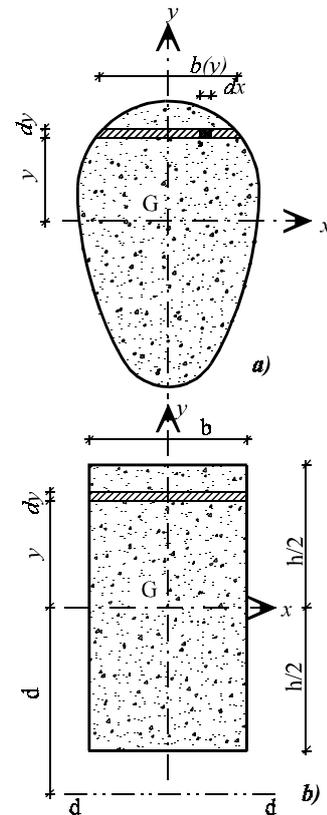


Figura 1.9
Cálculo de momentos de inercia

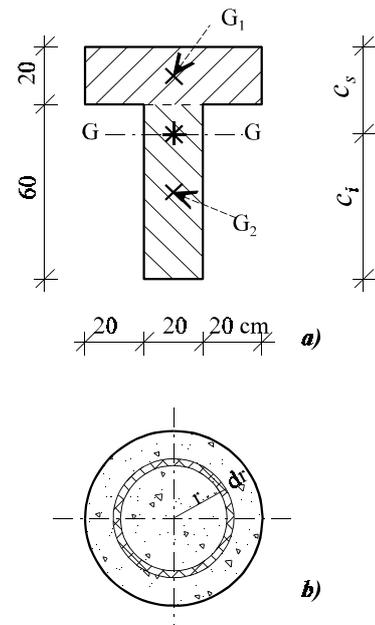


Figura 1.10
Figuras geométricas para calcular inercias

Para calcular el momento de inercia I_{GG} sumamos la contribución de cada rectángulo elemental. De acuerdo con (1.1-7), cada rectángulo aporta dos términos: el $bh^3/12$ respecto de su centro de gravedad más su área por la distancia G_i-G al cuadrado:

$$I_{GG} = \frac{1}{12}60 \times 20^3 + 60 \times 20 \times (30-10)^2 + \frac{1}{12}20 \times 60^3 + 20 \times 60 \times (50-30)^2 = 1.360.000 \text{ cm}^4$$

Otras inercias; ejes principales

Además de los momentos de inercia habituales, (1.1-5) con densidad unidad, respecto de ejes:

$$(1.1-8a) \quad I_{xx} = \int_A y^2 dx dy$$

$$(1.1-8b) \quad I_{yy} = \int_A x^2 dx dy$$

se definen otras cantidades inerciales, como el producto de inercia:

$$(1.1-9) \quad I_{xy} = \int_A xy dx dy$$

y el momento de inercia respecto de un punto:

$$(1.1-10a) \quad I_O = \int_A r^2 dx dy$$

siendo r la distancia a O de la partícula de área $dx.dy$. Como $r^2 = x^2 + y^2$, resulta:

$$(1.1-10b) \quad I_O = I_{xx} + I_{yy}$$

que dice que el *momento de inercia respecto de un punto es igual a la suma de los momentos respecto de dos ejes perpendiculares* (cualesquiera que sean éstos: la suma $I_{xx} + I_{yy}$ es un invariante).

Para cada figura geométrica hay dos ejes perpendiculares para los cuales el producto de inercia (1.1-9) resulta nulo: son los *ejes principales de inercia*. Cuando una figura tiene un eje de simetría, podemos asegurar que ese eje es principal; el perpendicular también lo será. Por consiguiente, los I_{xx} calculados hasta aquí, son valores principales. Los valores principales son extremos: máximo y mínimo.

Inercias del círculo

La fórmula (1.1-10b) simplifica algunos cálculos. Por ejemplo, para el círculo (figura 1.10b) es mucho muy fácil calcular I_o con (1.1-10a) y obtener $I_{xx} = I_{yy}$ con (1.1-10b) que mediante (1.1-8):

$$I_o = \int_0^R r^2 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{2} \Rightarrow I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Resumen:

- Hemos recordado los conceptos de:
 - fuerza y momento,
 - resultante de cargas repartidas,
 - centro de gravedad, que encontramos:
 - ▶ componiendo los de figuras elementales,
 - ▶ integrando o
 - ▶ aplicando los teoremas de Guldin;
 - equilibrio estático:
 - ▶ ecuaciones a satisfacer e
 - intercambios entre ellas.

- Hemos recordado y aplicado las ecuaciones de equilibrio estático para encontrar reacciones de apoyo:
 - de ménsulas (viga empotrada-libre)
 - ▶ incluso ménsulas curvas sometidas a:
 - peso propio, y
 - presión hidráulica;
 - y de vigas biapoyadas.

- Hemos recordado las características de la presión hidrostática:
 - que actúa siempre perpendicularmente a la superficie afectada, sea ésta:
 - ▶ real o
 - ▶ virtual,
 - con intensidad proporcional a la profundidad,
 - ▶ con su peso específico como factor de proporcionalidad.

- Hemos repasado las fórmulas de inercia:
 - respecto de un eje,
 - ▶ que trasladamos mediante el teorema de Steiner,
 - ▶ y recordado los conceptos de:
 - producto de inercia y
 - ejes principales de inercia;
 - y respecto de un punto,
 - ▶ y encontrado que es la suma de las inercias respecto de dos ejes perpendiculares (cualquiera, invariante).

2 Esfuerzos

2.0 Importancia, objetivos y contenido

Una guía (mujer) del Monasterio de las Huelgas quería impresionar a su audiencia sosteniendo que las columnas de la sala capitular no sostienen nada; "están puestas" —decía— "para prevenir la *agorafobia*". Sospecho que a ella le habrían explicado que los arcos adyacentes (figura 2.1) contrarrestan entre sí sus empujes *horizontales*, y las columnas intermedias no tienen que resistirlos. Lo que no le dijeron es que el peso (vertical) de las bóvedas pasará todo él a la cimentación a través de las columnas, lo cual las hace absolutamente imprescindibles. (Yo le recomendé que en caso de quitarlas no se colocara de caríatide.)

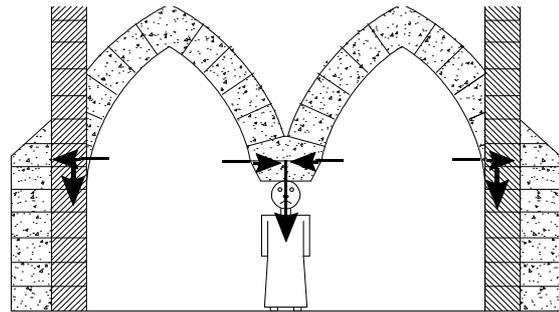


Figura 2.1

¡No juegues a caríatide!

Esta anécdota sugiere la importancia de entender de qué manera se conducen las cargas por dentro de una estructura hasta desembocar en la cimentación, para disponer elementos estructurales en el lugar adecuado y con la resistencia suficiente para aguantar lo que les llega. El problema de cómo mantener cargas levitando lo dejamos, por su dificultad, para los aeronáuticos.

Objetivos	Contenido
General:	
— Aprender a determinar diagramas de esfuerzos en estructuras isostáticas de vigas	
Específicos:	
— Conocer la función resistente de las estructuras	§2.1
— Conocer el objeto de la Resistencia de Materiales	§2.1
— Saber qué estructuras son isostáticas y sus propiedades	§2.2
— Entender el concepto de esfuerzo y su significado físico	§2.3
— Aprender a obtener los diagramas de esfuerzos producidos por las cargas más simples y familiarizarse con su aspecto	§2.4
— Aprender las relaciones matemáticas entre cargas exteriores y esfuerzos, y a obtener éstos por integración aquéllas	§2.5
— Adquirir soltura en la determinación de diagramas de esfuerzos	
• en vigas,	§2.6
• en pórticos	§2.7
Adicional:	
— Aprender a resolver el problema inverso (dados los esfuerzos, determinar las cargas que los producen)	§2.8

2.1 Resistencia, o *Teoría de vigas*

Concepto de estructura

Las funciones de una estructura pueden ser varias (aislar un determinado volumen del exterior, sostener cargas, contener empujes,...) pero en todo caso deberá cumplir dos condiciones fundamentales¹: (i) ser estable y (ii) resistir sus cargas (aunque sólo sea su propio peso). Comprobar la estabilidad de una estructura, como la de un sólido rígido, lo sabes hacer ya por Estática (lo repasaste en el capítulo 1). Vamos, pues, a hablar de la función resistente.

¿Qué hace una estructura con sus cargas? Pues simplemente conducirlas al suelo (o a otras estructuras) de manera semejante a como una tubería conduce agua. Así pues, para nosotros *una estructura es un entramado de sólidos resistentes que tiene por misión recibir cargas y conducirlas a los apoyos o cimentación*.

Elasticidad, Resistencia

El problema general de transmisión de cargas a través de sólidos es muy complejo y lo estudia la *Elasticidad*. La *Resistencia de Materiales* es la ciencia menor que reduce su ámbito a la transmisión de cargas a través de estructuras formadas por entramados de *piezas prismáticas*.

Viga y pieza prismática

Tú tienes una idea intuitiva muy válida de lo que es una viga; que no te la cambien las elucubraciones que siguen. Un geómetra diría que una viga recta (figura 2.2a) es el volumen —re lleno de material sólido, claro— de un prisma generado por una curva cerrada y plana, llamada *sección*, cuyo centro de gravedad se desliza sin girar sobre una recta perpendicular al plano de la sección, llamada *directriz*. La dimensión longitudinal (sobre la directriz) debe ser bastante mayor que las transversales (de la sección).

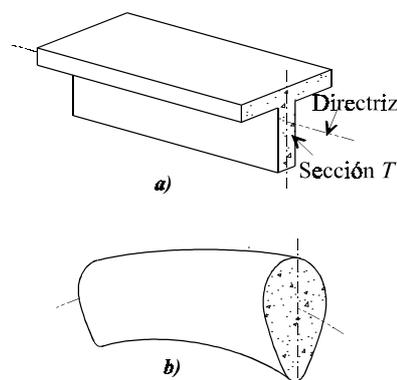


Figura 2.2
Viga y pieza prismática

Para llegar al inefable concepto de *pieza prismática* (figura 2.2b) hacemos dos generalizaciones:

- permitimos que la sección plana varíe de tamaño al deslizarse sin girar, pero la variación tiene que ser lenta y continua, sin cambios bruscos; y
- permitimos que la directriz sea una línea curva plana, si bien su radio de curvatura ha de ser grande en comparación con las dimensiones de la sección.

Estructuras reticuladas planas

En este TUTORIAL reduciremos aún más el ámbito de estudio limitándonos a estructuras *planas* (de piezas prismáticas). Para que la estructura sea plana se han de cumplir dos condiciones: (i) que las directrices de todas las piezas prismáticas estén en un mismo plano, y (ii) que uno de los ejes principales de inercia de cada sección transversal esté también contenido en este plano.

Resumen:

- Las estructuras deben ser estables y resistentes.
- Una función fundamental de la estructura es resistir sus cargas transmitiéndolas a la cimentación.
- La Resistencia de Materiales estudia la transmisión de cargas a través de estructuras formadas por piezas prismáticas.

¹ E. Torroja, *Razón y ser de los tipos estructurales*, Artes Gráficas MAG, Madrid 1970, pp 2-3.

- Una pieza prismática es el sólido generado por una *sección* que se desliza sobre una *directriz*:
 - la directriz es:
 - ▶ una curva plana
 - ▶ de pequeña curvatura;
 - la sección transversal es:
 - ▶ una superficie cerrada y plana,
 - ▶ cuyo tamaño puede variar lentamente,
 - ▶ que se desliza manteniendo su plano normal a la directriz.
 - ▶ cuyas dimensiones (transversales) son bastante menores que la longitudinal (sobre la directriz)

- Las estructuras de este TUTORIAL serán planas, lo que implica que:
 - las directrices de todas las piezas estarán en el mismo plano, y
 - cada sección tendrá un eje principal de inercia en ese plano.

2.2 Isostatismo

Símil hidráulico

El símil de tuberías que hemos mencionado nos será útil a menudo. Por la dificultad de su cálculo, hay dos clases de redes de tuberías: las muy fáciles de calcular (figura 2.3a) y las muy difíciles (figura 2.3b). En las primeras el agua no tiene ninguna libertad de movimientos, sólo un camino para moverse: el cálculo de caudales se realiza por la *cuenta de la vieja*. En las redes con *redundancias*, donde el agua tiene caminos alternativos, el cálculo de caudales, por el contrario, es muy complicado; ya lo sufrirás en Hidráulica.

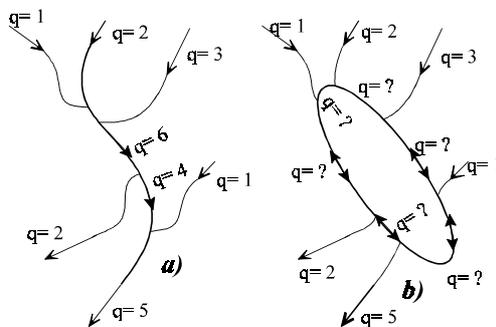


Figura 2.3
Tuberías determinada e indeterminada

Hiperestatismo=redundancias

Igual que las redes de tuberías, las estructuras estables pueden ser *isostáticas* o *hiperestáticas*. Los ingenieros de habla inglesa les llaman *determinadas* e *indeterminadas*. En las *isostáticas* las cargas no tienen opciones para llegar a los apoyos: sólo pueden hacerlo de una manera; en las *hiperestáticas*, en cambio, tienen caminos alternativos o redundantes para llegar a la cimentación, y por ello el cálculo de cuánta carga va por cada camino *no* es inmediato. Aprenderás a evaluar el grado de hiperestatismo de una estructura en §6.1. Por ahora sólo necesitas saber identificar a las estructuras isostáticas.

Estructuras isostáticas patrón

En el capítulo 1 ya trabajamos con dos tipos de estructuras isostáticas, que vamos a definir como nuestras estructuras *isostáticas fundamentales*:

- la ménsula (figura 2.4a) y
- la viga biapoyada con un apoyo fijo y otro deslizante (figura 2.4b).

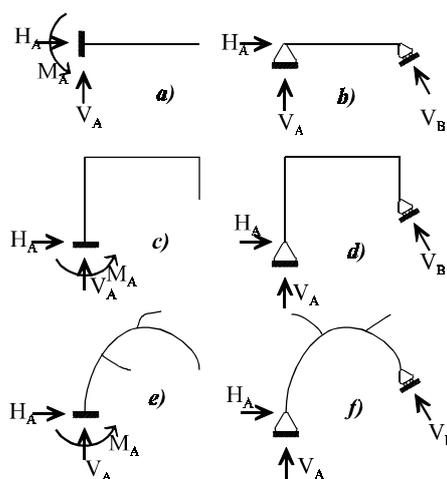


Figura 2.4
Estructuras isostáticas tipo o patrón

Sus generalizaciones inmediatas son los pórticos y arcos de las figuras 2.4c a 2.4f. Estas estructuras siguen siendo isostáticas aunque tengan *cuernos* o apéndices sin más que una conexión a la pieza prismática fundamental porque éstos no ponen caminos alternativos para la conducción de las cargas: los «cuernos» o apéndices reciben cargas y las transmiten a la estructura pero no, recíprocamente.

Tres coacciones no *bastardas*

Para que una estructura sea estable es preciso que estén impedidos los tres movimientos de sólido rígido (seis en estructura espacial). Por tanto, una estructura estable tiene al menos tres coacciones exteriores, rígidas o flexibles. Naturalmente, estas tres coacciones de estructura isostática deben ser legítimas, tales que impidan los tres movimientos. Si, por ejemplo, tenemos tres coacciones impidiendo el movimiento vertical y ninguna, el horizontal, estaremos ante un caso de *coacciones bastardas*. La figura 2.5 recoge casos de éstos. En general, es preciso que haya 3 reacciones que *no confluyan todas en un punto* (incluido el infinito) porque en dicho punto no podrían anular el momento de las cargas exteriores, este punto se convertiría en centro instantáneo de rotación y la estructura completa giraría como sólido rígido en torno a él, aunque fuera una cantidad pequeña.

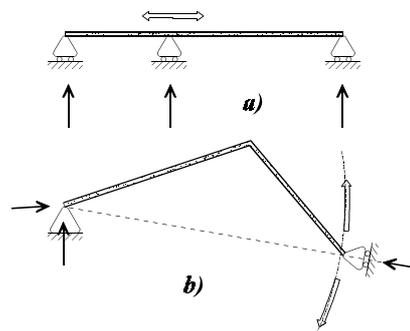


Figura 2.5
Estructuras incompletas (inestables)
debido a coacciones *bastardas*

Propiedad

Veremos que las estructuras isostáticas pueden acomodar cualquier movimiento impuesto (desplazamiento de un apoyo, dilatación térmica) sin oponer reacciones ni sufrir esfuerzos.

Resumen:

- Estructuras isostáticas son las que
 - constan de una o varias piezas prismáticas en serie:
 - sin cerrarse sobre el conjunto
 - aunque pueden tener apéndices unidos por un solo punto,
 - y de los apoyos estrictamente indispensables para proporcionar las *tres* reacciones que aseguren el equilibrio estático,
 - por lo que no deben pasar todas por un mismo punto,
 - ni siquiera el infinito (ser paralelas).
- Las estructuras isostáticas se acomodan a cualquier movimiento impuesto como:
 - desplazamiento o giro de un apoyo,
 - dilatación térmica,
 sin oponerse a ellos con reacciones de apoyo ni esfuerzos.

2.3 Esfuerzos en estructuras isostáticas

Definición provisional

Los *esfuerzos* que buscamos son las *fuerzas internas que pasan por una sección* de la pieza prismática en su fluir hasta la desembocadura por los apoyos. En estructuras planas con cargas en su mismo plano, la resultante de las fuerzas que pasan por la sección será un «bicéfalo»: fuerza y momento.

Tres clases de esfuerzos

Las fuerzas internas que pasan por una sección tendrá dos componentes sobre el sistema cartesiano intrínseco local, formado por la tangente y la normal a la directriz. A la componente N (tangente a la directriz, figura 2.6), que estira o pincha la sección, le llamaremos *esfuerzo axial*. A la componente Q , que se restriega contra la sección, le llamaremos *cortante*. Al momento interno, que será de eje perpendicular al plano z^2 de la estructura (figura 2.6) le llamaremos *momento flector*.

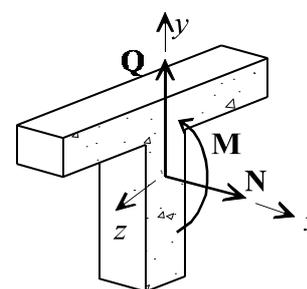


Figura 2.6
Tres esfuerzos: axial, cortante
y flector

² En estructuras planas se suele tomar como eje x el del eje de la viga; como eje y , el vertical de las cargas, de forma que las directrices de todas las piezas de la estructura estarán contenidas en el plano xy . El eje z es el resultante del producto vectorial $z = x \times y$ y es perpendicular al plano de la estructura.

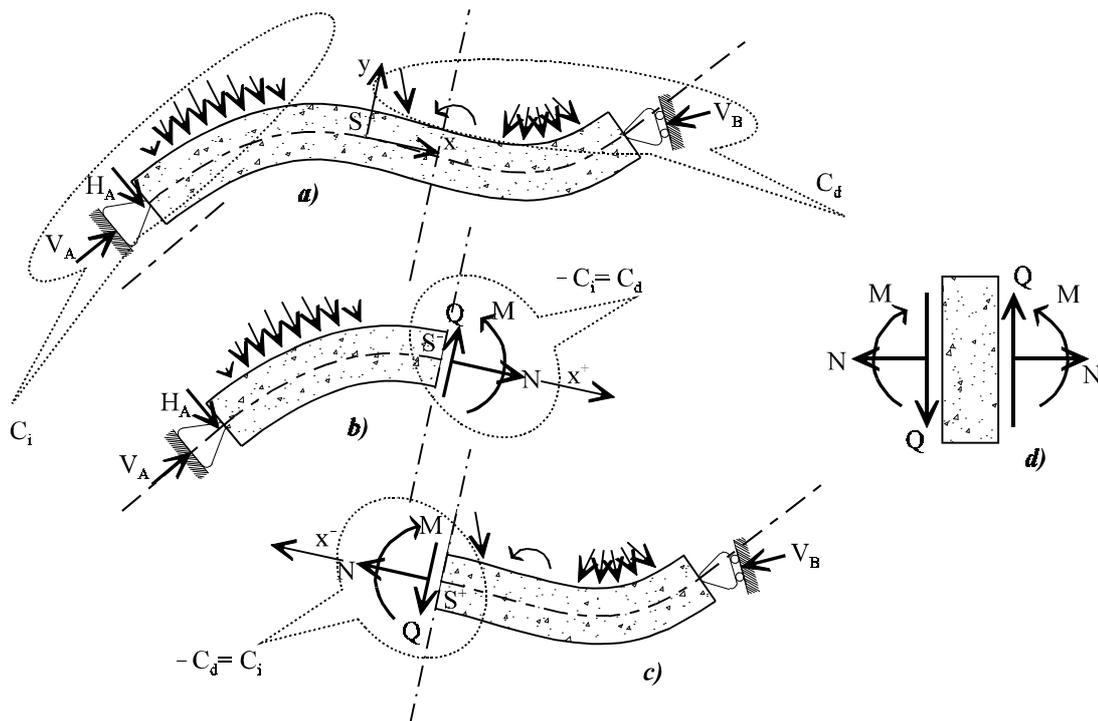


Figura 2.7
Viga conejo de Indias

Concepto doliente

Si te castigan con los brazos en cruz y libros sobre una mano tendrás un problema de estabilidad para no volcar. Si te ponen igual cantidad de libros sobre ambas manos, el equilibrio estático es el mismo que sin libros pero con una diferencia notable: tus brazos te dolerán por el esfuerzo de sostenerlos. El equilibrio se puede alcanzar con dolor y sin dolor. Recuerda esto: *esfuerzo = sufrimiento*. Si manteniendo la misma cantidad de libros acercas las manos al tronco, notarás alivio: la carga exterior es la misma pero el sufrimiento, los esfuerzos, no. Lo que te hace daño, queriendo doblarte los brazos hacia abajo es el *momento flector* (producto del peso de los libros por la longitud de tu brazo), que es generalmente el más dañino de los esfuerzos en vigas. También te afecta el *esfuerzo cortante* (peso de los libros) pero en menor medida, como descubriste al acercar los brazos al cuerpo. Tus piernas, que ya sostienen todo tu peso, sólo perciben un pequeño incremento de esfuerzo axial, el del peso de los libros.

El esfuerzo cortante se manifiesta con claridad si pruebas a transportar los libros de una balda horizontal de tu biblioteca apretando por las dos caras extremas, como un acordeón. La fuerza que tendrás que aplicar será tal que por rozamiento puedas vencer el valor máximo del esfuerzo cortante que tiende a hacerlos deslizarse hacia abajo: $N\mu \geq \frac{1}{2}P$, siendo P el peso total de los libros. $\frac{1}{2}P$ es el máximo valor del esfuerzo cortante en la "viga de libros" (la carga que va a cada mano); N , el axil de compresión que tendrán que soportar todos ellos, y μ , el coeficiente de rozamiento.

Concepto cruento

Consideremos la viga de la figura 2.7a en la que *incluimos las reacciones de los apoyos como cargas exteriores*, con todo derecho, porque lo son; y no unas cargas exteriores cualquiera sino precisamente aquéllas que nos aseguran que el sistema de cargas total está en equilibrio.³ Para descubrir los esfuerzos causantes del sufrimiento de una sección S (figura 2.7a) hay que hacer cirugía exploratoria, aunque sea mentalmente. Cortemos, pues, con sigilo la estructura en dos por la sección de interés y separemos ambas (figuras 2.7b y c). Para que ninguna parte lo note tendremos que colocar en los dos labios del corte aparatos simuladores que reproduzcan perfectamente los efectos que cada parte de la estructura ejercía sobre la otra, ahora separada. Algunos efectos, como el de *ternura*, nos pueden delatar, pero los efectos estáticos los vamos a saber simular con maestría suma.

³ Podemos ver a los apoyos como *mecanismos inteligentes* que saben darnos (si tenemos suficientes) la cantidad exacta de reacción que necesitamos para obtener el equilibrio estático. Los ingenieros estructurales estamos de enhorabuena porque la naturaleza está de nuestra parte, buscando el equilibrio de cualquier manera que éste se pueda alcanzar. El que *las estructuras tienden a no caerse* (porque les da mucho miedo, dicen algunos) es una verdad que se pondrá más y más de manifiesto conforme avancemos en el estudio de esta apasionante asignatura. Los aeronáuticos no tienen tanta suerte.

Antes del corte la estructura en su conjunto y cada una de sus partes estaban en equilibrio estático. Para seguir manteniendo aquel equilibrio tendremos que aplicar en los bordes sangrantes las fuerzas apropiadas. Acabamos de descubrir lo que tenía que sufrir la sección: *los esfuerzos son las fuerzas internas que mantienen el equilibrio a diestra y siniestra de la sección*. Veamos la forma práctica de determinarlas.

Si las cargas exteriores a la izquierda de S sumaban C_i (dos vectores: uno, fuerza, y el otro, momento) y las cargas a la derecha, C_d , por equilibrio $C_i = -C_d$. Para recuperar el equilibrio tras el corte, en la figura 2.7b colocaremos $-C_i = C_d$ en la cara con normal exterior $+x$; y en la figura 2.7c colocaremos $-C_d = C_i$ sobre la cara con normal exterior $-x$.

Definición depurada

Los esfuerzos a cada lado de una sección son las cargas estáticamente equivalentes a todas las que actúan al mismo lado de la sección, incluidas las reacciones. Son fuerzas y momentos iguales y opuestos a cada lado de una misma sección.

Concepto práctico

Lo que acabamos de ver es que:

- por la cara de normal exterior hacia la derecha, $+x$, se cuelan las cargas que vienen de ese lado de la sección (buscando su desembocadura por la izquierda); y recíprocamente,
- por la cara cuya normal exterior apunta hacia la izquierda, $-x$, se cuelan las cargas que vienen de ese lado; y
- las de cada lado son exactamente opuestas a las del otro, o nuestra pieza no estaba en equilibrio.

Convenio de signos

Para los esfuerzos en una *rebanada* de viga adoptamos el convenio de signos de la figura 2.7d. El esfuerzo axil N será positivo cuando sea de tracción, es decir, cuando trate de estirar el elemento diferencial de viga o rebanada elemental. El cortante Q será positivo si tiende a hacer girar la rebanada en sentido contrario a las agujas del reloj. El momento flector M positivo será el que *pincha* sobre la parte superior de la rebanada y *tira* de la parte inferior. Dicho de otras maneras, *los esfuerzos serán positivos si están causados por fuerzas que son positivas en la cara de normal exterior $+x$ o por fuerzas que son negativas en la cara $-x$* .

Exterior, absoluto; interior, relativo

Tómate tiempo para asimilar lo siguiente. Las fuerzas y momentos *exteriores* tienen su signo *per se*, de manera absoluta, dependiendo sólo de sus sentidos de actuación. Así, F_x será positiva si lleva el sentido de $+x$, M será positivo si gira positivamente en torno al eje $+z$. Esas mismas fuerzas y momentos aplicados sobre una cara de una sección causarán esfuerzos positivos o negativos de manera *relativa*, dependiendo del *signo de la cara* en que se apliquen. Todo sucede como si la *cara positiva* (de normal exterior $+x$) mantuviera el signo (al pasar de fuerzas exteriores a interiores o esfuerzos) y la *cara negativa* (la de normal exterior $-x$) se lo cambiara.

Cálculo

Para cuantificar los esfuerzos que soporta una sección, el *modus operandi* es *calcular las cantidades de fuerzas y momento exteriores que le llegan por el camino de la derecha, y asignárselas como esfuerzos a la cara derecha con su mismo signo*; o, alternativamente, hacer el cálculo de fuerzas por la izquierda y convertirlas en esfuerzos con los mismos sentidos a la cara izquierda (igual dibujo) *pero con el signo cambiado*. En cada caso lo harás por donde te resulte más fácil, que suele ser por el lado donde encuentres un número de cargas menor.

Advertencia, ¡peligro!

En los quehaceres de esta asignatura tienes que tener muy clara la siguiente distinción

- cuándo estás calculando el **momento total** (de todas las fuerzas, las *de derechas* y las *de izquierdas*), que ha de dar cero en cualquier punto de cualquier estructura en reposo en cualquier universo donde gobierne la Mecánica de Newton, que interesa para comprobar el equilibrio, y
- cuándo estás calculando el **momento flector**, que es la mitad del cálculo anterior, el de una parte sobre la otra, que interesa para saber cuánto *sufre* esa sección.

Así, por ejemplo, en la viga de la figura 2.8, cuando quieras determinar la reacción V_B (cálculo de Estática como en el capítulo 1), calcularás el momento *total* en la sección A , (el de todas las cargas que ves en la figura, incluidas las reacciones, naturalmente) y harás que sea *cero* en A (como en cualquier otro lugar). En cambio, cuando quieras determinar el esfuerzo que sufre la sección A (cálculo ya de Resistencia, como más adelante en este mismo capítulo), calcularás el momento *flector* (de una parte de la estructura, de las cargas que están entre C y A o las que están entre A y B). Cuando estos mismos cálculos los hagas en B , ambas operaciones van a coincidir, lo cual causa frecuentes confusiones. Para cada operación debes utilizar distinto convenio de signos; para fuerzas totales, el de positivas cuando apunten en el sentido de los ejes coordenados (vengan de donde vengan); para esfuerzos, el ya comentado de la figura 2.7d.

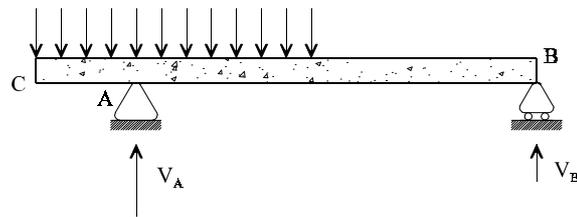


Figura 2.8
¡Hay dos clases de momentos!

Resumen:

- Esfuerzos en una sección son las fuerzas internas que una parte de la estructura ejerce sobre la otra.
- Los esfuerzos consisten en parejas de fuerzas y momentos que actúan a los dos lados de una sección con sentidos opuestos (simulando el efecto que la otra parte de la estructura ejerce sobre ésta) y que son estáticamente equivalentes a las cargas exteriores que actúan a un lado y a otro de la estructura.
- Para conocer su correspondencia, conviene pensar que las cargas que actúan a la derecha se *cuelan* por la cara de la sección cuya normal exterior apunta hacia la derecha, y al contrario.
- De estas fuerzas opuestas en caras opuestas, llamamos:
 - esfuerzo axial a la componente normal a la sección (o paralela al eje de la viga);
 - esfuerzo cortante a la componente tangencial a la sección (perpendicular al eje);
 - (esfuerzo) momento flector al momento resultante de todas las fuerzas que están a un lado de la sección.
- Se toman como positivos los esfuerzos cuando son como los de la figura 2.7d, esto es:
 - axial positivo, de tracción;
 - cortante, cuando produce un momento $+z$;
 - flector, cuando comprime (pincha) las fibras $+y$ y tracciona las $-y$.
- El signo de los esfuerzos es *relativo*: unas fuerzas exteriores positivas producen esfuerzos positivos si actúan sobre la *cara positiva* $+x$ de la sección, y negativos si se cuelan por la otra (figura 2.7d).
- Para calcular esfuerzos suele ser preciso obtener antes las reacciones de los apoyos (que son *otras* cargas exteriores más, sólo que de magnitudes cuidadosamente *calibradas* para mantener el equilibrio).
- Podemos calcular los esfuerzos a partir de las fuerzas y reacciones que llegan por la derecha o por la izquierda de la sección:
 - los esfuerzos tendrán el mismo signo que las fuerzas que llegan por el lado $+x$;
 - los esfuerzos tendrán el *signo contrario* que las fuerzas que entran por el lado $-x$.

2.4 Ejemplos de esfuerzos en vigas

Ejemplo 2.4.1: Carga axil uniforme

Sea la ménsula de la figura 2.9a sometida a una carga axil uniforme p_o (por ejemplo, su propio peso por unidad de longitud). Si pensamos que la viga es una cadena, está claro que el eslabón del medio sólo sufre la mitad de la carga mientras que del extremo A tira toda ella. Así pues, $N(x) = (L-x)p_o$. Esto se puede ver cortando por la sección C a la distancia x del extremo A y considerando el equilibrio de la porción CB (figura 2.9b): si el trozo CB de la viga completa ACB no cae será porque el tramo AC tira de él con la fuerza $-N(x)$.

El mismo esfuerzo axil $N(x)$ se obtiene echando la cuenta de la carga que llega por arriba, pero contando la reacción exterior como una carga aplicada: $N(x) = p_o L - p_o x$.

Nota la diferencia entre carga exterior axil y esfuerzo axil: la carga es uniforme pero por todas las secciones *no pasa* la misma cantidad de ella; la del extremo superior sufre más porque le llega toda; la ley de esfuerzos axiles es lineal (figura 2.9c).

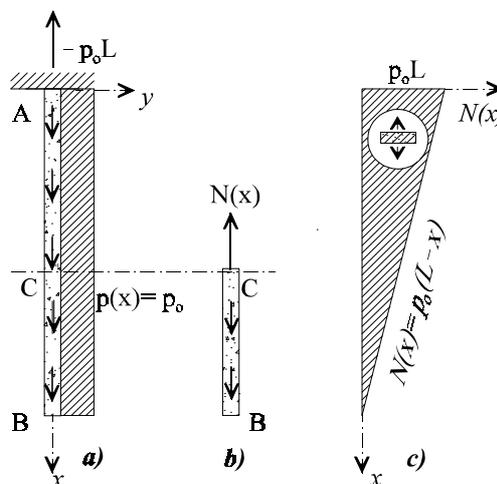


Figura 2.9
Estructura y diagramas del ejemplo 2.4.1

Enseñanzas:

- Los esfuerzos se pueden calcular por los dos lados:
 - puede ser más fácil hallarlos por uno que por otro,
 - y tiene que resultar iguales.
- El esfuerzo lleva el mismo signo que la carga que le entra por la cara $+x$, y el contrario que la que le entra por la $-x$.
- No es lo mismo carga exterior axil que esfuerzo axil:
 - el esfuerzo axil resulta de sumar o integrar una vez las cargas exteriores axiles; por eso resulta un polinomio de un orden mayor que el de aquéllas.

Ejemplo 2.4.2: Carga axil lineal

Para una carga axil lineal (figura 2.10a) la ley de esfuerzos axiles se obtiene mejor por la derecha: el axil a la distancia x es la cantidad de carga en el intervalo $[x, L]$, es decir el área del trapecio de cargas sobre dicho intervalo:

$$N(x) = \frac{1}{2} \left[p_o \frac{x}{L} + p_o \right] (L-x) = \frac{1}{2} p_o L \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right)$$

Dicha ley es la parábola de 2º grado de la figura 2.10b. (Observa que haces una suma o integración de cargas y por eso te sale una ley de un grado superior.) Si operas contando la carga que llega a la sección x por la izquierda, es decir, por el intervalo $[0, x]$, habrás de considerar la reacción exterior de valor $\frac{1}{2} p_o L$:

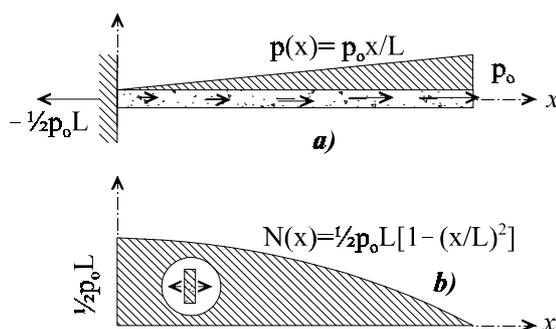


Figura 2.10
Estructura y diagrama del ejemplo 2.4.2

$$N(x) = \frac{1}{2} p_o L - \frac{1}{2} p_o \frac{x}{L} x = \frac{1}{2} p_o L \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right)$$

Enseñanzas:

- Confirma las enseñanzas del ejemplo anterior.

Ejemplo 2.4.3: Momento exterior

En la viga biapoyada de la figura 2.11a sometida a un momento exterior M en $x = a$, tenemos reacciones en ambos extremos, por lo que habrá que calcularlas antes de hallar esfuerzos, cualquiera que sea el extremo por donde empecemos. Observa que su valor no depende de la posición a de M .

El esfuerzo cortante en $[0, a]$ será la resultante de fuerzas verticales a la izquierda (o a la derecha) de la sección:

$$Q(x) = -V_A = -\frac{M}{L}$$

$$Q(x) = V_B = -\frac{M}{L}$$

La ley se muestra en la figura 2.11b. El momento flector calculado por la izquierda es:

$$M(0 \leq x \leq a) = V_A x = \frac{Mx}{L}$$

$$M(a \leq x \leq L) = V_A x - M = M \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

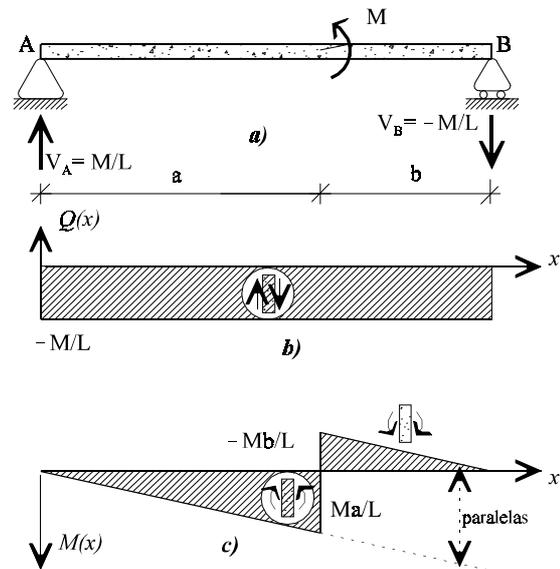


Figura 2.11 Estructura y diagramas del ejemplo 2.4.3

M , positivo, entra con signo $-$ al considerar las cargas que llegan por la cara $-x$.

Si lo calculamos por la derecha será:

$$M(0 \leq x \leq a) = V_B(L-x) + M = \frac{Mx}{L}$$

$$M(a \leq x \leq L) = V_B(L-x) = -M \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

El mismo M entra ahora con signo $+$ al considerar las cargas que entran por la cara $+x$.

La ley de momentos flectores se da en la figura 2.11c.

Enseñanzas:

- En vigas biapoyadas, antes de obtener los esfuerzos es necesario determinar las reacciones.
- Las cargas puntuales (en este caso las reacciones) producen:
 - leyes de cortantes constantes,
 - leyes de momentos flectores lineales.
- El momento exterior:
 - no se manifiesta en la ley de cortantes;
 - se manifiesta por un salto de valor su magnitud en la ley de momentos.
- Un momento exterior sobre una viga biapoyada produce:
 - reacciones opuestas $V_A = -V_B = M/L$
 - independientemente de su punto de aplicación.
 - incluso si estuviera aplicado fuera del intervalo AB (en un voladizo);
 - un cortante constante V_B ;
 - una ley de momentos flectores:
 - lineal con el salto indicado,
 - con la misma pendiente en los dos tramos (paralelos).

Ejemplo 2.4.4: Carga puntual

En la viga biapoyada de la figura 2.12a, una vez calculadas las reacciones, se obtiene fácilmente por la izquierda:

$$Q(0 \leq x \leq a) = -V_A = -\frac{Pb}{L} \quad ; \quad Q(a \leq x \leq L) = -V_A + P = \frac{Pa}{L}$$

$$M(0 \leq x \leq a) = V_A x = \frac{Pb}{L} x$$

$$M(a \leq x \leq L) = V_A x - P(x-a) = Pa \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

$$Q(0 \leq x \leq a) = R_B - P = -\frac{Pb}{L}$$

$$Q(a \leq x \leq L) = R_B = \frac{Pa}{L}$$

$$M(0 \leq x \leq a) = R_B(L-x) - P(a-x) = \frac{Pb}{L} x$$

$$M(a \leq x \leq L) = R_B(L-x) = Pa \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

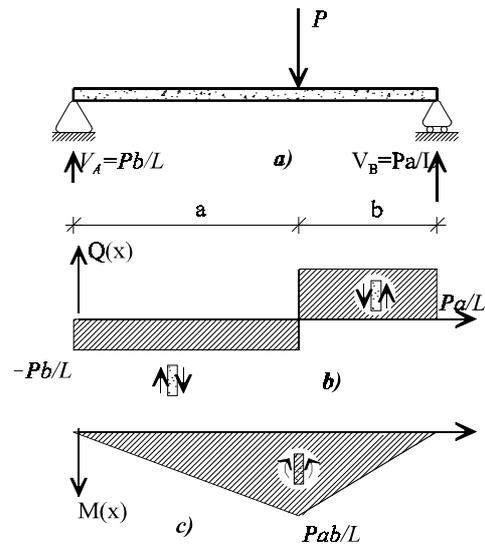


Figura 2.12
Estructura y diagramas del ejemplo 2.4.4

Enseñanzas:

- Una carga puntual se manifiesta:
 - por un salto de su magnitud en la ley de cortantes,
 - por un quiebro o punto anguloso en la de flectores
- Una carga puntual sobre una viga biapoyada produce:
 - reacciones inversas: $V_A = Pb/L$, $V_B = Pa/L$;
 - ley de cortantes constante por tramos, de valores $-V_A$, V_B ,
 - con salto de valor P en el punto de aplicación de P ;
 - ley de momentos bilineal, con máximo Pab/L ,
 - que llega a valer $PL/4$ para carga situada en el centro.

Ejemplo 2.4.5: Carga uniformemente repartida

Sobre la viga biapoyada de la figura 2.13a, las reacciones valen $q_0 L/2$ cada una por simetría. Contaremos esfuerzos desde la izquierda:

$$Q(x) = -V_A + \int_{z=0}^{z=x} q(z) dz$$

$$M(x) = V_A x - \int_{z=0}^{z=x} q(z)(x-z) dz$$

Las fórmulas anteriores son generales y valen para cualquier distribución de cargas $q(z)$; en seguida particularizaremos para $q(z) = q_0$. Observa que usamos dos puntos genéricos:

- el z de actuación de la carga,
- el x , donde medimos los esfuerzos.

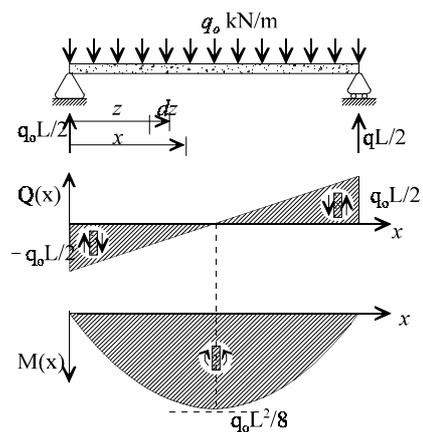


Figura 2.13
Estructura y diagramas del ejemplo 2.4.5

Rara vez nos resignaremos a hacer las integrales que aparecen en esas fórmulas. Con un poco de perspicacia descubriremos que la primera integral es la carga total extendida en $[0, x]$, y la segunda, el momento que esa misma carga produce en el punto x . Con estas aclaraciones, tienes:

$$Q(x) = -V_A + q_0 x = q_0 \left(x - \frac{L}{2} \right)$$

$$M(x) = V_A x - q_0 x \frac{x}{2} = \frac{1}{2} q_0 x(L-x)$$

Enseñanzas:

Vamos encontrando relaciones entre esfuerzos y cargas que estudiaremos formalmente §2.5 y que recogemos en la tabla 2.1.

- La ley de esfuerzos cortantes:
 - resulta de integrar una vez las cargas exteriores,
 - y por ello resulta de un orden mayor que ella.

- La ley de momentos flectores:
 - (vemos que) resulta dos órdenes mayor que la ley de cargas,
 - porque inadvertidamente la integramos dos veces;
 - (vemos que) resulta un orden mayor que la ley de cortantes,
 - porque inadvertidamente la integramos una vez.

- Una carga repartida uniforme se manifiesta:
 - por una ley de cortantes lineal, y
 - por una ley de momentos flectores parabólica de 2º grado *con la concavidad hacia arriba* cuando:
 - dibujamos $-M(x)$ (como es costumbre)
 - q es hacia abajo;
 y con valor máximo de $qL^2/8$, que debes recordar, y
 - observar que el máximo de M está donde $Q=0$.

Ejemplo 2.4.6: Carga repartida sobre la mitad de la luz

Determinar los esfuerzos en la viga de la figura 2.14a, que soporta una carga uniforme sobre la mitad de la luz.

Fuera del intervalo de actuación de la carga, los esfuerzos son los mismos que se tendrían con una carga puntual estáticamente equivalente. Por tanto, en $[0, L/4]$ y en $[3L/4, L]$ dibujamos los cortantes y flectores correspondientes a una carga $P = qL/2$ situada en el centro de la viga. A continuación, unimos los extremos de estos intervalos mediante una recta en la ley de cortantes (figura 2.14b) y mediante una parábola tangente en la ley de flectores (figura 2.14c). Sólo nos queda acotar el momento en el centro, lo cual se puede hacer por geometría o por estática. Por este último procedimiento sale:

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{qL}{4} \frac{L}{2} - q \frac{L}{4} \frac{L}{8} = \frac{3qL^2}{32}$$

Hazte tú mismo la cuenta y observa que la diferencia entre concentrar toda la carga en el centro o distribuirla sobre la mitad de la viga no supone reducción en el cortante máximo pero sí en el flector máximo, del 25%.

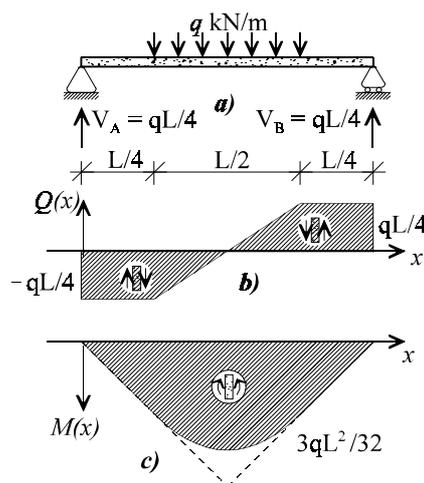


Figura 2.14 Estructura y diagramas del ejemplo 2.4.6

Enseñanzas:

- Fuera de su intervalo de actuación, una carga repartida se puede sustituir por su resultante puntual (en el centro de gravedad). El efecto de distribuir la carga es suavizar las leyes de esfuerzos (figura 2.15).

- Dentro de su intervalo de actuación, la carga repartida produce:
 - una ley de cortantes lineal, y
 - una ley de momentos flectores parabólica
 - que acaba tangente en los extremos a la ley de fuera del intervalo.

Tabla 2.1
Huellas que dejan las cargas en las leyes de esfuerzos

Carga	Ley de cortantes	Ley de flectores

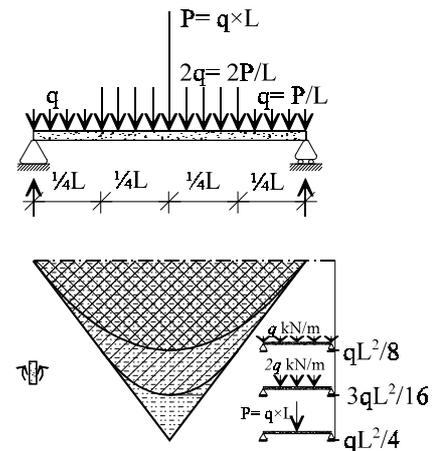


Figura 2.15
La ley de momentos flectores se suaviza al repartir la carga

Resumen:

- Un momento exterior deja las siguientes huellas (ver tabla 2.1):
 - ni rastro en la ley de esfuerzos cortantes,
 - un salto de valor M en la ley de momentos flectores.
- Una carga puntual se manifiesta por (ver tabla 2.1):
 - un salto de valor P en una ley de esfuerzos cortantes constante, y
 - un punto anguloso en una ley de momentos flectores bilineal.
- Una carga repartida $q(x)$ produce (ver tabla 2.1):
 - Dentro de su intervalo de actuación:
 - ▶ una ley de esfuerzos cortantes un grado mayor el suyo;
 - ▶ una ley de momentos flectores dos grados mayor que el suyo,
 - con la concavidad hacia arriba (si $q(x)$ era hacia abajo), y
 - tangente a la ley que hay fuera del intervalo de actuación de $q(x)$.
 - Fuera de su intervalo de actuación, las mismas leyes que su carga puntual equivalente (situada en su c.d.g.).
- Al pintar leyes de esfuerzos de cargas repartidas podemos proceder como sigue:
 - las reemplazamos provisionalmente por cargas puntuales situadas en su c.d.g. y así
 - ▶ dibujamos las leyes de cortantes y flectores;
 - seguidamente corregimos estas leyes de la siguiente manera:
 - ▶ fuera del intervalo de las cargas distribuidas:
 - no las modificamos;
 - ▶ dentro del intervalo de las cargas distribuidas:
 - en la ley de cortantes, conectamos los valores en los extremos con una curva de un grado más que la ley de $q(x)$, manteniendo las tangentes en los extremos;
 - en la ley de flectores, conectamos los valores en los extremos con una curva de dos grados más que la ley de $q(x)$ y con la concavidad hacia arriba si $q(x)$ era hacia abajo y manteniendo las tangentes en los extremos.
- Familiarízate con las leyes de esfuerzos aprendiendo las que resultan de:
 - momentos exteriores,
 - cargas puntuales y
 - cargas repartidas
 cuando actúan sobre:
 - ménsulas, figura 2.16, y
 - vigas biapoyadas, figura 2.17.

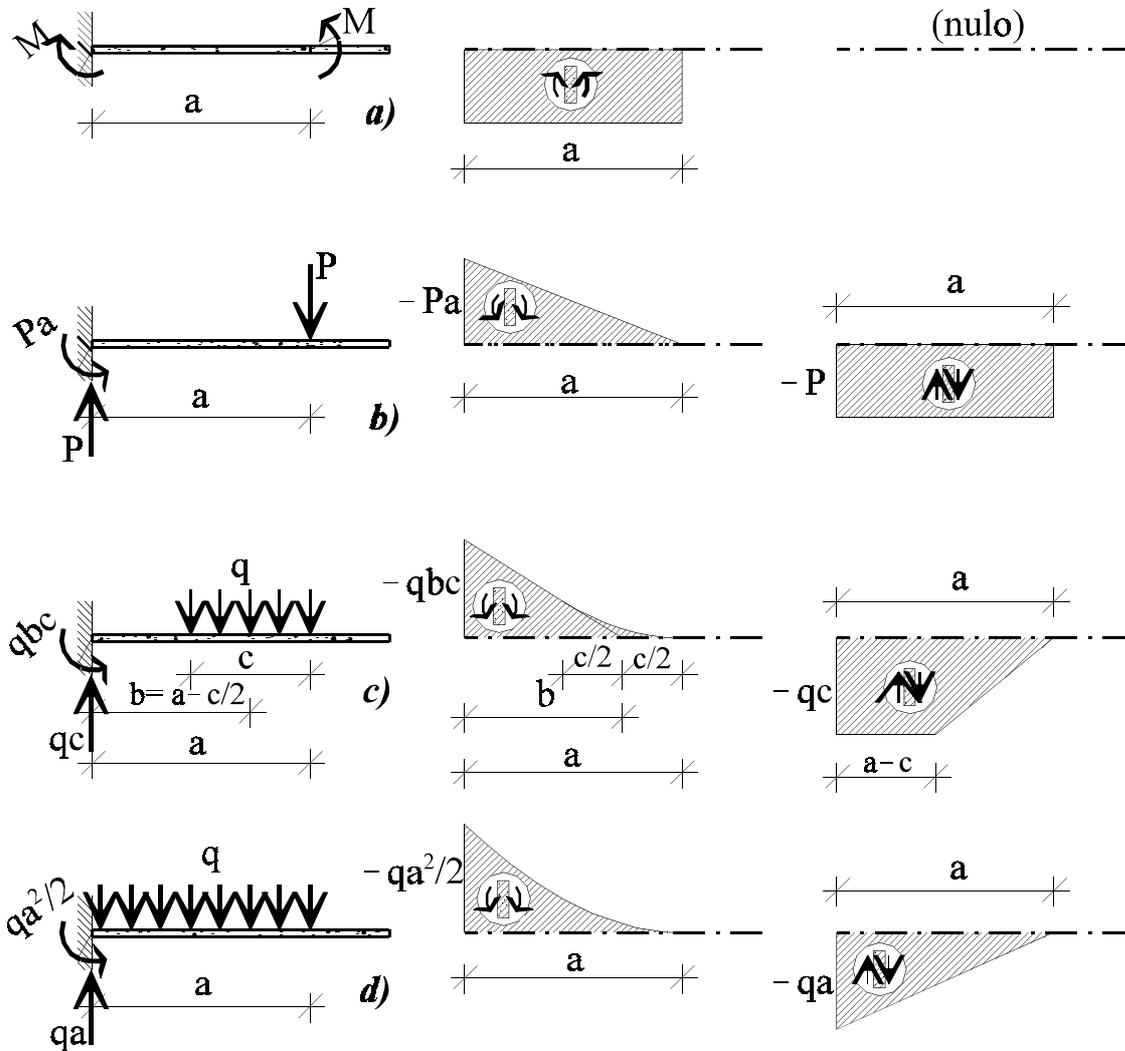


Figura 2.16
Leyes de esfuerzos en ménsulas

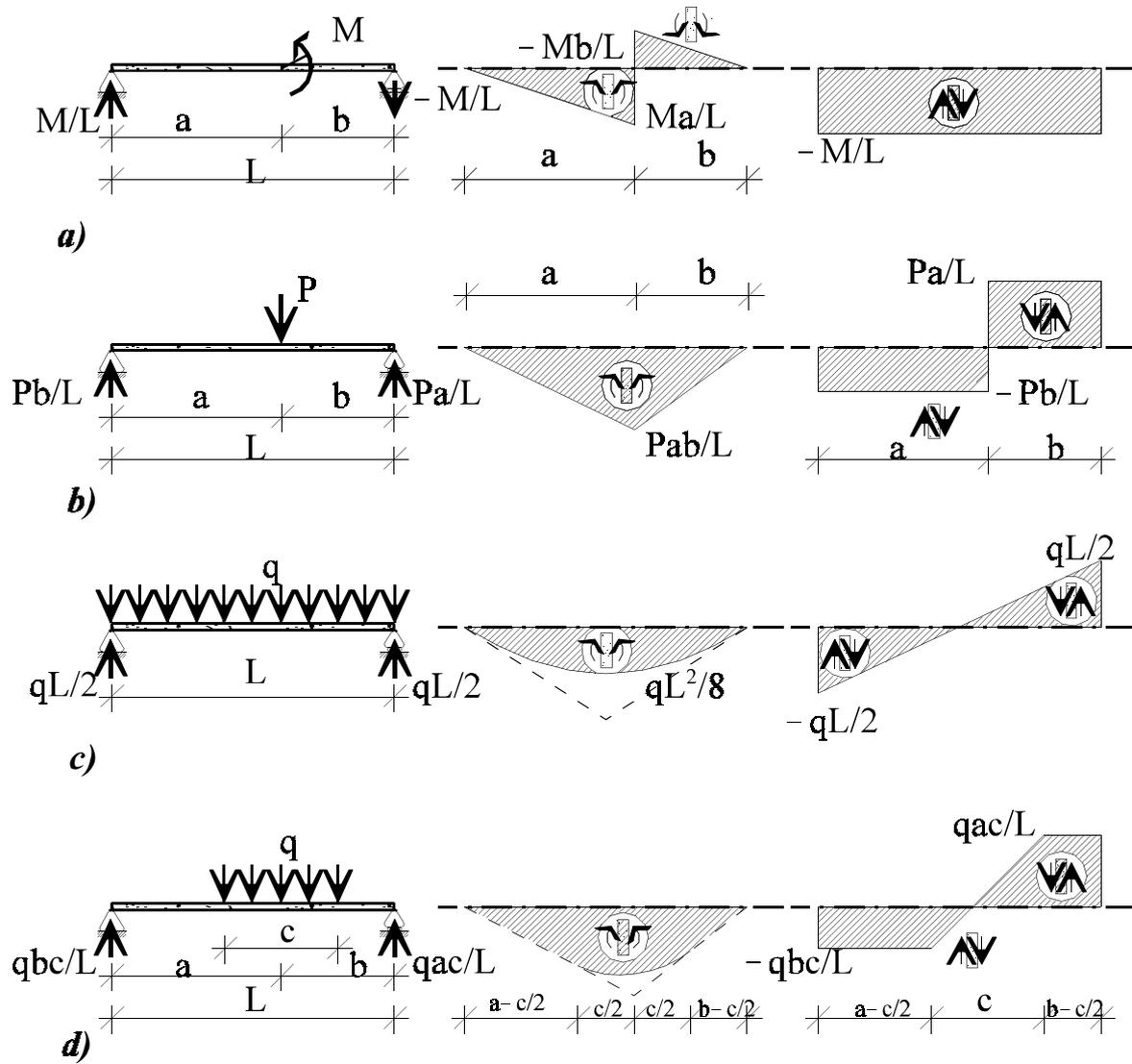


Figura 2.17
Leyes de esfuerzos en vigas simplemente apoyadas

2.5 Relaciones entre esfuerzos y cargas exteriores

Quién se relaciona con quién

No te creas muy listo si has llegado a las siguientes conclusiones: En vigas simples (biapoyadas o en ménsula):

- los esfuerzos axiles $N(x)$ provienen sólo de las carga exteriores axiales $H, p(x)$ (en la dirección de la directriz), y
- los esfuerzos cortantes $Q(x)$ y flectores $M(x)$ provienen sólo de las cargas transversales $P, q(x)$ (perpendiculares a la directriz) y de los momentos exteriores.

Así pues, $p(x)$ no afectará ni a $Q(x)$ ni a $M(x)$; $q(x)$ no afectará a $N(x)$; será así hasta que llegemos a estructuras peraltadas, pórticos y arcos.

Objetivos

En este apartado vamos a ver, pues, las relaciones entre:

- (i) $p(x) \leftrightarrow N(x)$, y
- (ii) $q(x) \leftrightarrow Q(x) \leftrightarrow M(x)$

De estas relaciones sacaremos un procedimiento analítico para determinar leyes de esfuerzos de manera distinta a como lo hemos hecho hasta aquí, que será más automático-matemático y dependerá menos de la intuición física. Tendrás, a cambio, que saber integrar unas ecuaciones diferenciales muy sencillas y aplicar condiciones de contorno.

El equilibrio manda

Las relaciones se obtienen considerando el equilibrio estático de un elemento diferencial de viga, generalmente llamado *rebanada* (que es finito en sus dimensiones transversales e infinitamente pequeño, dx , en su dimensión a lo largo de la directriz). Suponemos que (i) las cargas exteriores están aplicadas en la directriz de la viga y (ii) que son sólo de los tipos $p(x)$ y $q(x)$ (no hay momentos distribuidos actuando sobre la *rebanada*). Siendo así, los equilibrios de fuerzas horizontales, verticales y momentos exigen (figura 2.18):

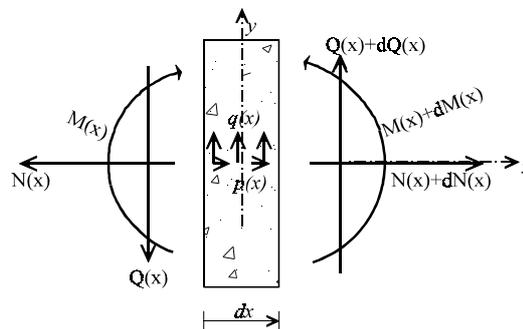


Figura 2.18
Equilibrio del elemento diferencial de viga o *rebanada* elemental

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &\equiv -N(x) + p(x) dx + [N(x) + dN(x)] = 0 \\ \Sigma F_y &\equiv -Q(x) + q(x) dx + [Q(x) + dQ(x)] = 0 \\ \Sigma M_z &\equiv -M(x) + Q(x) \frac{dx}{2} + [M(x) + dM(x)] + [Q(x) + dQ(x)] \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned}$$

Fórmulas valiosas

De estas ecuaciones resulta, respectivamente (la tercera tiene un término de 2º grado en dx a despreciar):

$$(2.5-1) \quad \begin{aligned} \frac{dN(x)}{dx} &= -p(x) \\ \frac{dQ(x)}{dx} &= -q(x) \\ \frac{dM(x)}{dx} &= -Q(x) \end{aligned}$$

que son ecuaciones importantísimas de recordar. Las dos primeras nos dicen algo que ya habíamos encontrado empíricamente: que los esfuerzos axil y cortante son las primeras integrales de las cargas axial y transversal, respectivamente. El signo menos viene de que aquí hemos sido más puristas que antes, considerando como positivas las cargas que actúan hacia arriba, con el sentido del eje $+y$.

La tercera ecuación en (2.5-1) dice:

- (i) que hay una relación entre cortantes y momentos (como es natural por provenir ambos de una misma carga exterior) y que ésta es :
- (ii) que **el cortante es la derivada del momento flector**. Vuelve ahora a los diagramas de cortantes y momentos obtenidos hasta ahora y comprueba que derivando *visualmente* el momento se obtiene el cortante.

La relación anterior es muy útil para dos cosas:

- (i) muy importante: **para encontrar los máximos/mínimos relativos** del momento flector, que estarán allí donde el cortante es nulo. Hallando el cortante nulo por el método físico, te ahorrarás de obtener la expresión analítica de $M(x)$, y de derivarla. (Para encontrar los máximos/mínimos absolutos debes considerar también los valores en los extremos A y B de la viga.)
- (ii) **para obtener la ley de cortantes**, una vez obtenida la de momentos, por simple derivación *visual*. (Me perdonarás que no te la haya dicho antes y te haya hecho trabajar más de lo debido usando el método *físico*. Te aseguro que era por una buena causa: que entendieras con precisión qué es el esfuerzo cortante *físicamente*. Te sigo recomendando que lo hagas de aquella manera y utilices la derivación *visual* como comprobación.)

Cuando derivemos *visualmente*, hemos de recordar que el signo menos en $Q = -dM/dx$ ya está tenido en cuenta por el hecho de que en realidad hemos dibujado $-M(x)$: podemos decir $Q = d(-M)/dx$: así, pendientes positivas en el diagrama de momentos (menores de 90° con el semieje $+x$) se corresponden con cortantes positivos, y a la inversa.

De las ecuaciones segunda y tercera en (2.5.1) se obtiene:

$$(2.5-2) \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$$

que también habíamos anunciado antes.

Vamos a usar las ecuaciones anteriores para obtener leyes de esfuerzos por el procedimiento que yo llamo *matemático*.

Ejemplo 2.5.1: Axiles, de otra manera

Obtener la ley de esfuerzos axiles de la figura 2.10a por el procedimiento matemático.

$$\begin{aligned} \frac{dN(x)}{dx} &= -p(x) = -p_o \frac{x}{L} \\ N(x) &= -\frac{1}{2}p_o L \left(\frac{x}{L} \right)^2 + C \end{aligned}$$

Obtendremos la constante arbitraria C con la condición de contorno $N(x=L) = 0$. Resulta $C = \frac{1}{2}p_o L$ con lo que se tiene el mismo resultado del ejemplo 2.4.2:

$$N(x) = \frac{1}{2}p_o L \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

De él se puede sacar incluso la reacción en A , $V_A = -N(x=0) = -\frac{1}{2}p_o L$. El procedimiento no exige ningún conocimiento de Estática, sólo rudimentos de Cálculo Integral.

Enseñanzas:

- El método matemático nos proporciona un procedimiento alternativo para hallar la ley de esfuerzos axiles;
 - exige integrar una ecuación diferencial de 1^{er} grado,
 - con una condición de contorno en el extremo libre;
 - es ventajoso cuando la carga exterior tiene una expresión analítica fácil de integrar.

Ejemplo 2.5.2: Flexión, de otra manera

Obtener las leyes de esfuerzos cortantes y flectores para la viga de la figura 2.19a.

En este procedimiento matemático hay que tener cuidado con los signos de las cargas y recordar que las fórmulas (2.5-1) y (2.5-2) fueron obtenidas para cargas $q(x)$ positivas hacia arriba:

$$\begin{aligned} \frac{dQ(x)}{dx} &= -q(x) = -q_0 \frac{x}{L} \\ Q(x) &= -\frac{1}{2}q_0L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{C_1}{L} \\ \frac{dM(x)}{dx} &= -Q(x) = \frac{1}{2}q_0L\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{C_1}{L} \\ M(x) &= \frac{1}{6}q_0L^2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - C_1\frac{x}{L} + C_2 \end{aligned}$$

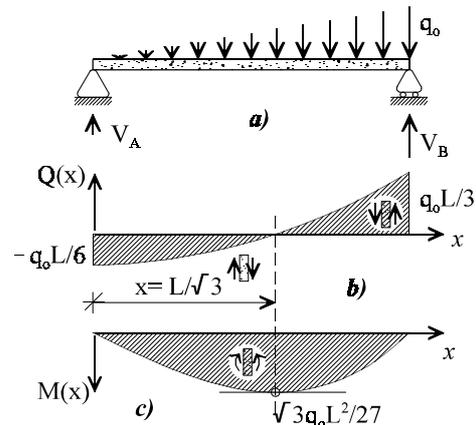


Figura 2.19 Estructura y diagramas del ejemplo 2.5.2

Las constantes de integración se fijan con las condiciones de contorno $M(0) = 0$, $M(L) = 0$, con lo que se tiene $C_2 = 0$, $C_1 = -q_0L^2/6$. Así pues:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{6}q_0L\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 1\right] \\ M(x) &= \frac{1}{6}q_0L^2\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right] \end{aligned}$$

De la expresión de $Q(x)$ podemos sacar las reacciones de apoyo:

$$\begin{aligned} V_A &= -Q(x=0) = \frac{1}{6}q_0L \\ V_B &= Q(x=L) = \frac{1}{3}q_0L \end{aligned}$$

que sabemos por Estática que son correctas. Las representaciones gráficas de las leyes de cortantes y momentos encontradas se dan en las figura 2.19b,c. Harías bien en tratar de obtenerlas por el método físico.

Para hallar el máximo momento flector, buscamos el punto de cortante nulo $x/L = 1/\sqrt{3}$. En él, $M_{max} = q_0L^2\sqrt{3}/27$

Enseñanzas:

- El método matemático nos proporciona un procedimiento alternativo para hallar las leyes de esfuerzos cortantes y de momentos flectores;
 - ventajoso cuando la carga exterior tiene una expresión analítica fácil de integrar;
 - requiere saber introducir las condiciones de contorno en los extremos.
- Las reacciones exteriores resultan de los esfuerzos en los extremos de la viga:
 - con el mismo signo en el extremo B,
 - con el contrario en el A.
- Los momentos flectores máximos y mínimos resultan de considerar:
 - los puntos de cortante nulo y
 - los extremos de la viga.

Dificultades

La dificultad de este método aparece cuando tienes cargas puntuales u otras difíciles de expresar analíticamente. Entonces tienes que separar la viga en dos (o más) tramos, resolver cada uno y obtener algunas constantes de integración empalmándolos, igualando valores del cortante y/o del flector en los empalmes.

Condiciones de contorno

En vigas isostáticas no tienes que temer falta o exceso de condiciones de contorno para hallar las constantes arbitrarias del proceso de integración. En la ménsula conoces los valores de los tres esfuerzos en el extremo libre; en la viga biapoyada conoces el axil en el apoyo deslizante y los momentos flectores en los dos apoyos.

Resumen:

- Los esfuerzos resultan de las cargas exteriores ; sus relaciones con ellas se pueden expresar mediante ecuaciones diferenciales:
 - $N'(x) = -p(x)$
 - $Q'(x) = -q(x)$
 - $M'(x) = Q(x)$

- Un procedimiento matemático de obtención de esfuerzos consiste en integrar dichas ecuaciones diferenciales:
 - puede resultar ventajoso para cargas con expresión analítica sencilla;
 - requiere introducir condiciones de contorno para determinar las constantes de integración;
 - en vigas isostáticas siempre conocemos las tres condiciones necesarias: los esfuerzos que no resultan de reacciones:
 - ▶ en una ménsula: los tres esfuerzos en su extremo libre
 - ▶ en una viga simplemente apoyada: el axil en el apoyo deslizante y los momentos en los dos extremos.

- El procedimiento matemático proporciona incluso las reacciones de apoyo sin aplicar Estática:
 - son los esfuerzos desconocidos en los extremos, que no eran condición de contorno:
 - ▶ con el mismo signo en el extremo cuya normal exterior lleva la dirección $+x$,
 - ▶ con signo cambiado en el otro.

- Hay también una relación matemática entre los esfuerzos $Q(x)$ y $M(x)$, consecuencia de provenir de una misma expresión de $q(x)$:
 - $M'(x) = -Q(x)$
 - el signo menos no se manifiesta cuando derivamos la gráfica de $M(x)$ porque habitualmente ya le hemos cambiado el signo al representar $-M(x)$
 - la relación tiene dos utilidades:
 - ▶ una muy importante, para **buscar los máximos y mínimos de $M(x)$** en los puntos de cortante nulo (sin olvidar los extremos), con lo que,
 - no tienes que encontrar la expresión analítica de $M(x)$,
 - ni que derivarla;
 - ▶ otra, menos importante, que te permite obtener la ley de cortantes derivando *visualmente* la de momentos,
 - útil para emergencias, pero
 - desaconsejable porque pierdes el sentido físico.

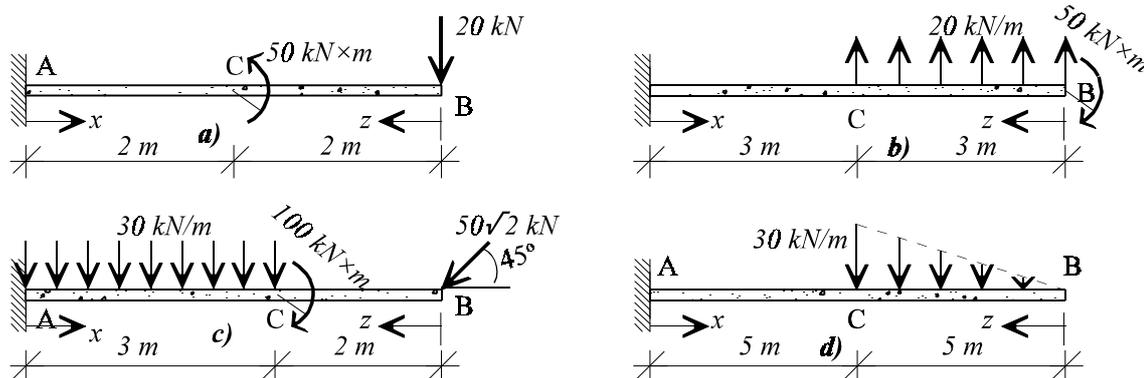


Figura 2.20
Vigas en ménsula del problema 2.6.1

2.6 Problemas de esfuerzos en vigas

Problema 2.6.1: Ménsulas

Obtener las expresiones analíticas y dibujar los croquis de las leyes de esfuerzos cortantes y momentos flectores de las ménsulas de la figura 2.20.

a) Para el caso de la figura 2.20a, el aspecto de la ley de momentos flectores es una recta que sube de B hacia la izquierda (M_f negativo) debida a P, (figura 2.21a), con un salto hacia abajo (positivo) en C producido por el momento exterior. La pendiente del tramo CA será la misma que la del tramo BC.

Contando por la derecha, las expresiones analítica en función de la coordenada z son:

- Cortantes: $Q(x) = -20$ en todo AB, porque el momento no produce cortantes.
- Momentos flectores:
 - en BC, $M(z) = -20 \cdot z$
 - en CA, $M(z) = -20 \cdot z + 50$

Si se desea la expresión analítica en función de x basta con reemplazar z por $4 - x$. Los gráficos correspondientes se muestran en la figura 2.21a.

b) Para la ménsula de la figura 2.20b, el aspecto de la ley de momentos flectores será como sigue: Un salto en B hacia arriba (negativo) producido por el momento en dicho punto (figura 2.21b). En BC, una parábola de 2° grado partiendo con tangente horizontal, con curvatura hacia abajo (por ser la carga hacia arriba). Las tangentes en los extremos de la parábola se habrán de cortar sobre el punto medio del tramo⁴. En CA, una recta inclinada hacia abajo tangente a la parábola anterior. Esta tangente será paralela a la recta que causaría toda la carga q concentrada en el punto medio de BC. Las expresiones analíticas son:

- Cortantes:
 - en BC: $Q(z) = 20 \cdot z$
 - en CA: $Q(z) = 20 \times 3 = 60$
- Momentos flectores:
 - en BC: $M(z) = -50 + 20 \cdot z^2 / 2$
 - en CA: $M(z) = -50 + 20 \times 3 \times (z - 1,5)$

⁴ Propiedad de la parábola de 2° grado ilustrada en la figura 2.32, de la que haremos uso extensivo en §2.8.

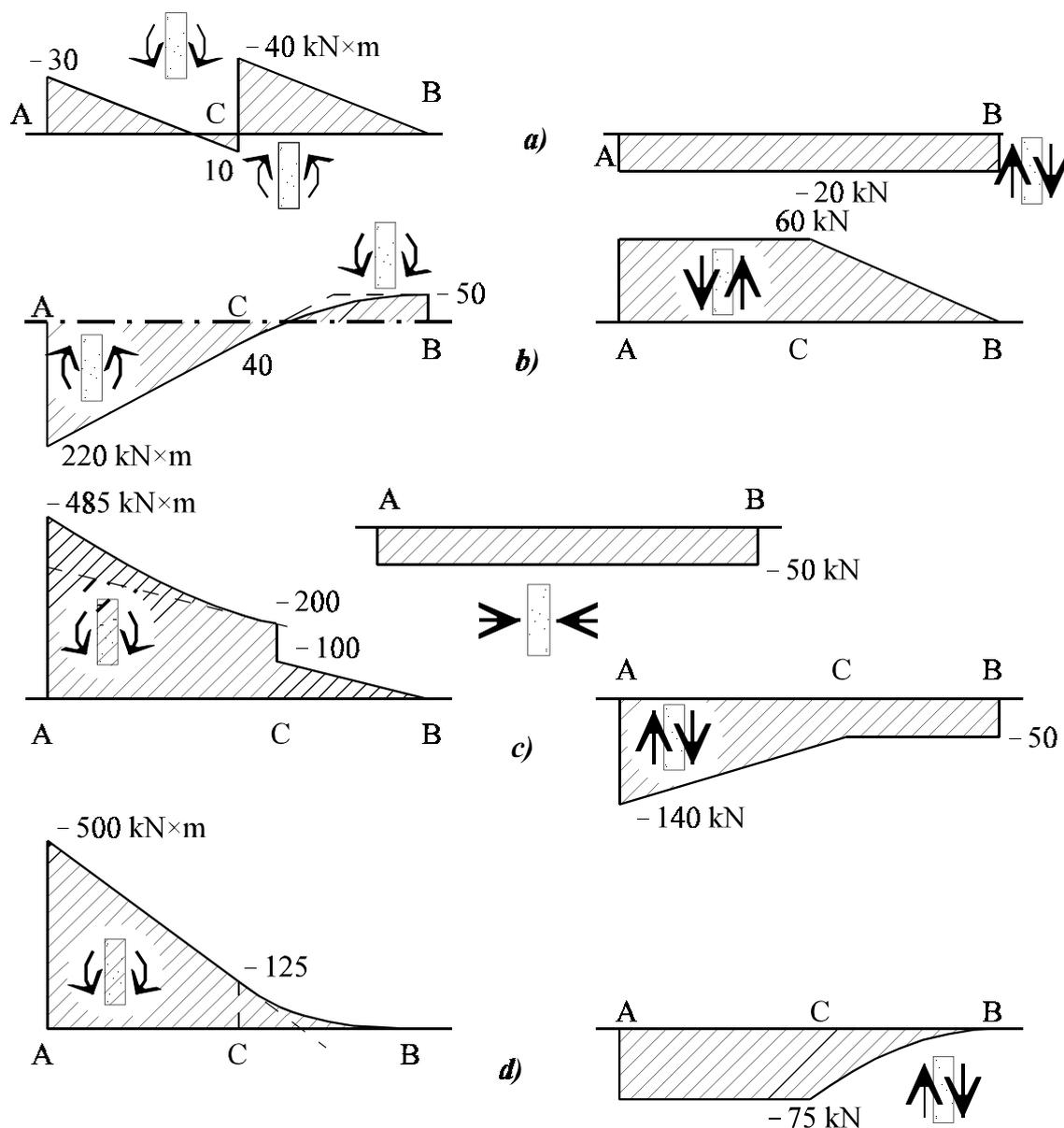


Figura 2.21
Diagramas de esfuerzos de las ménsulas de la figura 2.20

Para obtener la expresiones en función de x basta reemplazar z por $\delta - x$. Los gráficos correspondientes se muestran en la figura 2.21b).

c) Para la ménsula de la figura 2.20c), lo primero que haremos es descomponer la carga puntual inclinada en una $V_B = -50 \text{ kN}$ (hacia abajo) y una $H_B = -50 \text{ kN}$ (hacia la izquierda). El aspecto de la ley de momentos será el siguiente: Una recta que sube desde B hacia la izquierda producida por V_B (fig. 2.21c)); un salto en C hacia arriba producido por el momento exterior que allí actúa, y a continuación una parábola de 2° grado con la concavidad hacia arriba producida por la carga repartida q . Esta parábola arranca con tangente paralela a la recta de BC . Las tangentes en los extremos se deben cortar sobre el punto medio del tramo. Usando las cargas de la derecha se obtienen las expresiones analíticas siguientes:

- Cortantes:
 - en BC: $Q = -50$
 - en CA: $Q = -50 - 30 \cdot (z - 2)$
- Momentos flectores:
 - en BC: $M(z) = -50 \cdot z$
 - en CA: $M(z) = -50 \cdot z - 100 - 30 \cdot (z - 2)^2 / 2$
- Axiles: $N = -50$ en todo AB.

Reemplazando z por $5 - x$ se obtienen las expresiones analíticas en función de x . Los gráficos de las tres leyes se muestran en la figura 2.21c.

d) Para la ménsula de la figura 2.20d, el aspecto de la ley de momentos flectores será como sigue: En BC, donde actúa una carga repartida lineal, será una parábola de grado 3 (2 grados más que la carga, tabla 2.1) y con la concavidad hacia arriba. A partir de C, el gráfico será la recta tangente a la parábola anterior que produciría la carga puntual resultante de concentrar toda la carga repartida en su centro de gravedad, $z = 2 \times 5/3$.

Para escribir las expresiones analíticas, contamos la carga que llega por la derecha. Al punto de coordenada z le llega:

- Cortantes:
 - En BC: $Q(z) = -\frac{1}{2}z \frac{30}{5}z \quad (z \leq 5)$
 - En CA: $Q(z) = -\frac{1}{2}5 \times 30 = -75 \quad (5 \leq z \leq 10)$
- Momentos:
 - en BC resulta de considerar la carga total $Q(z)$ que actúa en $[0, z]$ concentrada en su c.d.g. $z_G = 2z/3$: $M(z) = -\frac{1}{2}z \frac{30}{5}z \frac{1}{3}z = -z^3$
 - en CA resulta de los -75 kN aplicados en $z_G = 10/3$: $M(z) = -75 \left(z - \frac{10}{3} \right)$

Para obtener las expresiones en función de x basta con reemplazar z por $10 - x$. Los gráficos correspondientes se muestran en la figura 2.21d.

Enseñanzas:

- Este problema nos ha recordado/confirmado las «huellas» de las cargas de la tabla 2.1:
 - que un momento exterior produce:
 - ▶ en la ley de esfuerzos cortantes: nada;
 - ▶ en la ley de momentos flectores: rectas paralelas con salto en el punto de aplicación;
 - que una carga puntual produce:
 - ▶ en la ley de esfuerzos cortantes: un valor constante con salto en el punto de aplicación;
 - ▶ en la ley de momentos flectores: rectas con un quiebro en el punto de aplicación;
 - que una carga distribuida produce:
 - ▶ fuera de su intervalo, el mismo efecto que una carga puntual de la misma magnitud total que estuviera situada en el c.d.g. de la distribución;
 - ▶ dentro del intervalo:
 - una ley de cortantes un grado mayor que la carga, con la concavidad hacia abajo,
 - una ley de momentos dos grados mayor que la carga, con la concavidad hacia arriba (para carga hacia abajo) y tangente en los extremos a las rectas de fuera del intervalo.
- Observa que cuando escribes las leyes de esfuerzos en función de una coordenada que crece hacia la izquierda, cambian los signos de las derivadas y por tanto $Q(z) = +M'(z)$, etc.

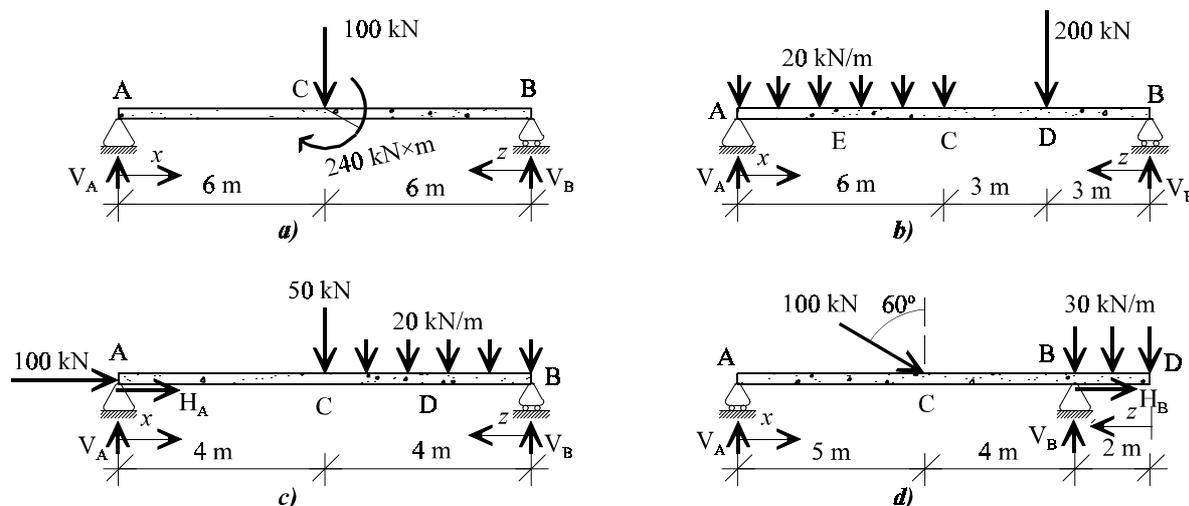


Figura 2.22
Vigas del problema 2.6.2

Problema 2.6.2: Vigas biapoyadas

Obtener las expresiones analíticas y dibujar los croquis acotados de las leyes de esfuerzos cortantes y momentos flectores de la viga de la figura 2.22.

a) Tratándose de vigas biapoyadas no queda más remedio que empezar calculando las reacciones. Tomando momentos totales en B y A, para la viga de la figura 2.22a, éstas son: $V_A = 30 \text{ kN}$, $V_B = 70 \text{ kN}$ respectivamente.

— Cortantes:

- En AC: $Q(x) = -30$
- En BC: $Q(x) = 70$

— Momentos: La carga puntual sola daría una ley triangular con quiebro bajo ella (figura 2.23a); el momento añadirá un salto bajo sí. Las expresiones analíticas son:

- En AC: $M(x) = 30 \cdot x$
- En BC: $M(x) = 70 \cdot z = 70 \cdot (10 - x)$

Los gráficos correspondientes se muestran en la figura 2.23a.

b) Para la viga de la figura 2.22b las reacciones resultan $V_A = 140 \text{ kN}$, $V_B = 180 \text{ kN}$.

— Cortantes:

- En AC: $Q(x) = -140 + 20 \cdot x$
- En BD: $Q(x) = 180$
- En DC: $Q(x) = 180 - 200 = -20$

— Momentos: si reemplazáramos la carga repartida por una concentrada en el punto medio E obtendríamos una poligonal con quiebros bajo E y D (de puntos en la figura 2.23b). El efecto de la carga uniforme es suavizar en su dominio la poligonal mediante una parábola de 2º grado tangente a aquélla en los extremos A y C. Las expresiones analíticas son:

- En AC: $M(x) = 140 \cdot x - 20 \cdot x^2 / 2$
- En BD: $M(x) = 180 \cdot z = 180 \cdot (12 - x)$
- En DC: $M(x) = 180 \cdot z - 200 \cdot (z - 3) = 180 \cdot (12 - x) - 200 \cdot (9 - x)$

Los gráficos correspondientes se muestran en la figura 2.23b.

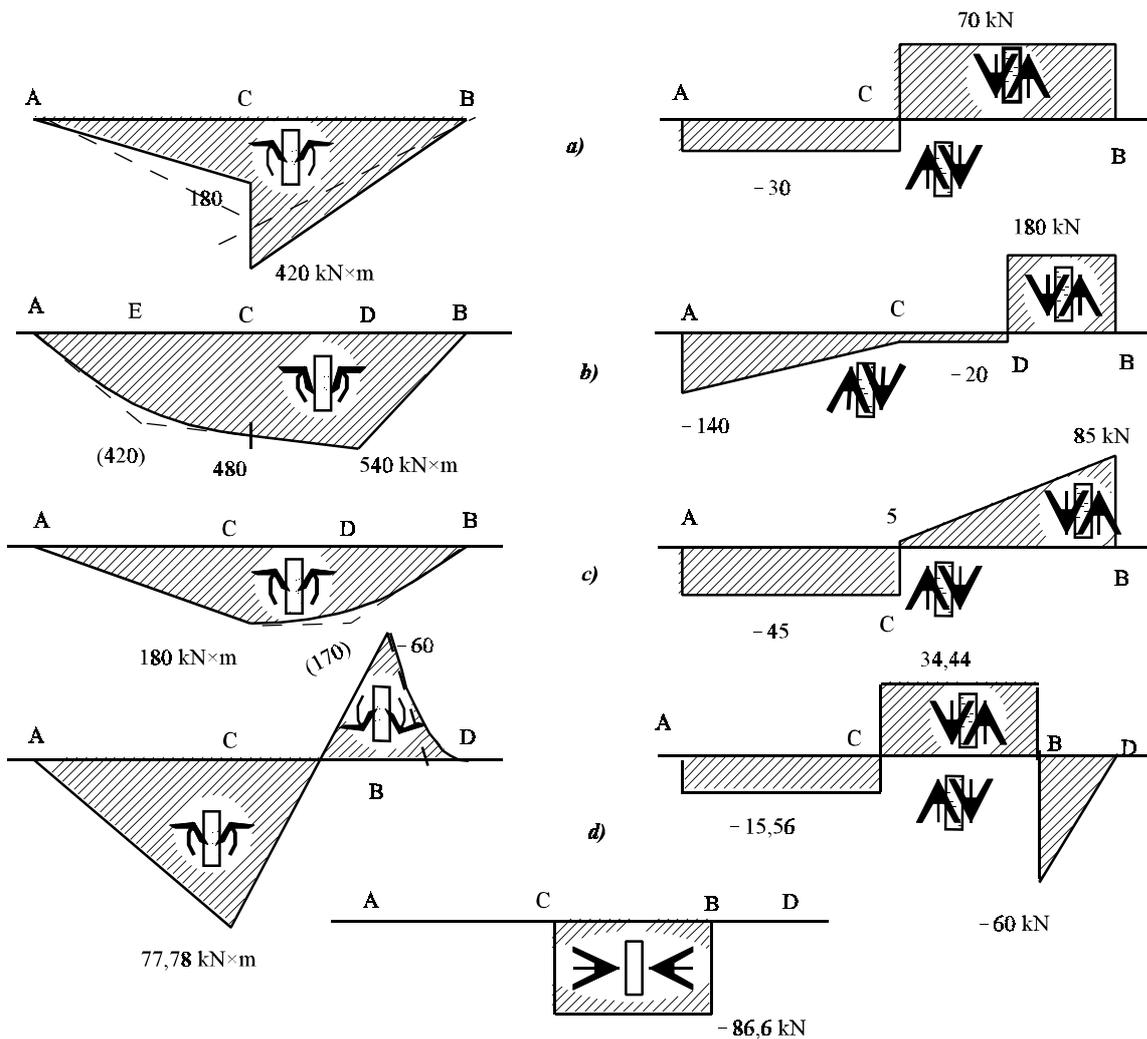


Figura 2.23
Diagramas de esfuerzos de las vigas de la figura 2.22 (problema 2.6.2)

c) Para la viga de la figura 2.22c, las reacciones resultan $V_A = 45 \text{ kN}$, $H_A = -100 \text{ kN}$, $V_B = 85 \text{ kN}$.

- *Axiles*: La carga horizontal exterior se va directamente al apoyo (produciendo $H_A = -100 \text{ kN}$) por lo que no causa esfuerzo axial alguno en la viga.
- *Cortantes*:
 - En AC: $Q(x) = -45$
 - En BC: $Q(x) = 85 - 20 \cdot z = 85 - 20(8 - x)$
- *Momentos*: Reemplazando la carga repartida por una concentrada en el punto medio D obtendríamos una ley poligonal con quiebros bajo C y D (de trazos en la figura 2.23c). El efecto de la carga repartida es suavizar la poligonal mediante una parábola de 2º grado tangente a aquélla en los extremos C y B del intervalo. Las expresiones analíticas son:
 - En AC: $M(x) = 45 \cdot x$
 - En BC: $M(x) = 85 \cdot z - 20 \cdot z^2 / 2 = 85(8 - x) - 10(8 - x)^2$

Los gráficos de estos esfuerzos se muestran en la figura 2.23c.

d) Para la viga de la figura 2.22d descomponemos la carga inclinada sobre C en sus dos componentes $V = -50 \text{ kN}$, $H = 86,6 \text{ kN}$. Para el cálculo de V_A conviene tomar momentos en B de *todas* las fuerzas actuantes, incluidas las de BD . Las reacciones resultan $V_A = 15,56 \text{ kN}$, $H_B = -86,6 \text{ kN}$, $V_B = 94,44 \text{ kN}$.

— *Axiles:*

- En AC : $N(x) = 0$
- En CB : $N(x) = -86,6$
- En DB : $N(x) = 0$

— *Cortantes:*

- En AC : $Q(x) = -15,56$
- En CB : $Q(x) = -15,56 + 50 = 34,44$
- En DB : $Q = -30 \cdot z = -30(11 - x)$

— *Momentos:* El tramo BD es como un apéndice en ménsula por lo que su ley de momentos flectores es como la de la figura 2.16d. Su efecto sobre la viga es el de llevar al apoyo B un momento negativo y una carga vertical (esta última desaparece inmediatamente bajo el apoyo). La ley de momentos en la viga será una poligonal quebrada bajo C y elevada sobre el apoyo el valor del momento transmitido por la ménsula BD . Las expresiones analíticas son:

- En AC : $M(x) = 15,56 \cdot x$
- En CB : $M(x) = 15,56 \cdot x - 50(x - 5)$
- En DB : $M(x) = -30 \cdot z^2 / 2 = -15(11 - x)^2$

Los gráficos de estos esfuerzos se muestran en la figura 2.23d.

Enseñanzas:

- En vigas biapoyadas, el cálculo de esfuerzos empieza necesariamente por el de reacciones.
- Conviene descomponer las cargas oblicuas en axiales (según la directriz) y transversales (normales a la directriz).
- Los «apéndices» son como estructuras independientes, con sus leyes «locales» de esfuerzos que transmiten al resto de la estructura a través de su «empotramiento móvil»; en cambio
 - la estructura no transmite esfuerzos al apéndice.
- Confirma las enseñanzas del problema anterior y de la tabla 2.1..

Problema 2.6.3: Más vigas biapoyadas

Determinar las leyes de esfuerzos de las vigas de la figura 2.24.

a) Lo primero es calcular las reacciones. De la carga puntual, $2/10$ van a parar al extremo A y $8/10$, al B . La carga repartida totaliza 20 kN y está centrada: la mitad irá a cada extremo. El momento produce reacciones iguales y opuestas de $\pm M/L = \pm 4 \text{ kN}$, hacia arriba en B y hacia abajo en A . Con estos razonamientos (o anulando los momentos totales en A y en B) se llega a $V_A = 10 \text{ kN}$, $V_B = 30 \text{ kN}$. Con las cargas dadas y éstas calculadas se obtienen las siguientes leyes:

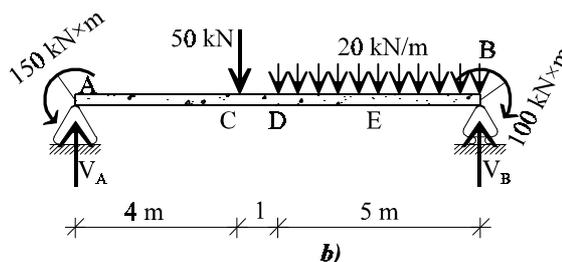
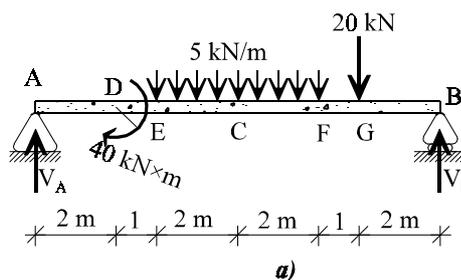


Figura 2.24
Vigas biapoyadas del problema 2.6.3

— Ley de esfuerzos cortantes (figura 2.25a):

- En A , contando por la izquierda, $Q = -V_A = -10 \text{ kN}$.
- En D y E el mismo valor, porque el momento no causa efecto en la ley de Q . En el tramo AE el cortante es constante.
- En F , por la izquierda, $Q = -10 + 5 \text{ kN/m} \times 4 \text{ m} = 10 \text{ kN}$. La variación entre E y F es lineal, como corresponde a una carga distribuida (figura 2.17d y tabla 2.1). También, por la derecha, $Q = V_B - P_G = 10 \text{ kN}$.
- En G^- , por la derecha, $Q = V_B - P_G = 10 \text{ kN}$.
- En G^+ , por la derecha, $Q = V_B = 30 \text{ kN}$. Así pues, en G se tiene un salto de valor P_G .
- En B^- , por la derecha, $Q = V_B = 30 \text{ kN}$.
- Conviene encontrar el punto donde Q se anula. Viendo su gráfico en la figura 2.25a se determina que es en C , $x = 5 \text{ m}$.

— Ley de momentos flectores (figura 2.25a):

- En A , contando por la izquierda, $M = 0$.
- En D^- , $M = V_A \times 2 = 20 \text{ kN} \times \text{m}$. La variación $A-D^-$ es lineal, de expresión $V_A x$. En D^+ , $20 + 40 = 60$. En D hay un salto de valor $M_D = -40 \text{ kN} \times \text{m}$.
- En E , $V_A \times 3 - M_D = 60 \text{ kN} \times \text{m}$. En $D-E$ la ley es paralela a la $A-E$; es la misma, interrumpida por el salto del momento exterior.
- En C , si reemplazamos mentalmente la carga distribuida en EF por una puntual en C , en este punto resulta un valor ficticio de $90 \text{ kN} \times \text{m}$, con ley ficticia D^+-C , lineal (de puntos en la figura 2.25a).
- En B , por la derecha, $M = 0$.
- En G , por la derecha, $V_B \times 3 = 60 \text{ kN} \times \text{m}$. El tramo $G-B$ es lineal
- En F , por la derecha, $V_B \times 3 - 20 \times 1 = 70 \text{ kN} \times \text{m}$. El tramo $F-G$ es también lineal.
- Con carga puntual equivalente en C , la ley D^+-E-C y $C-F$ sería bilineal. Para tener en cuenta que en realidad la carga es repartida, sustituimos la quebrada D^+-C-F por una parábola de 2º grado tangente en E y F a las rectas D^+C y CG (figura 2.25a).

— Buscaremos el momento flector máximo en los extremos y en el punto de cortante nulo. Éste era el C , $x = 5$, en donde, calculando por la derecha se obtiene $M_{\text{máx}} = 30 \times 5 + 40 - 5 \times 2 \times 1 = 80 \text{ kN} \times \text{m}$.

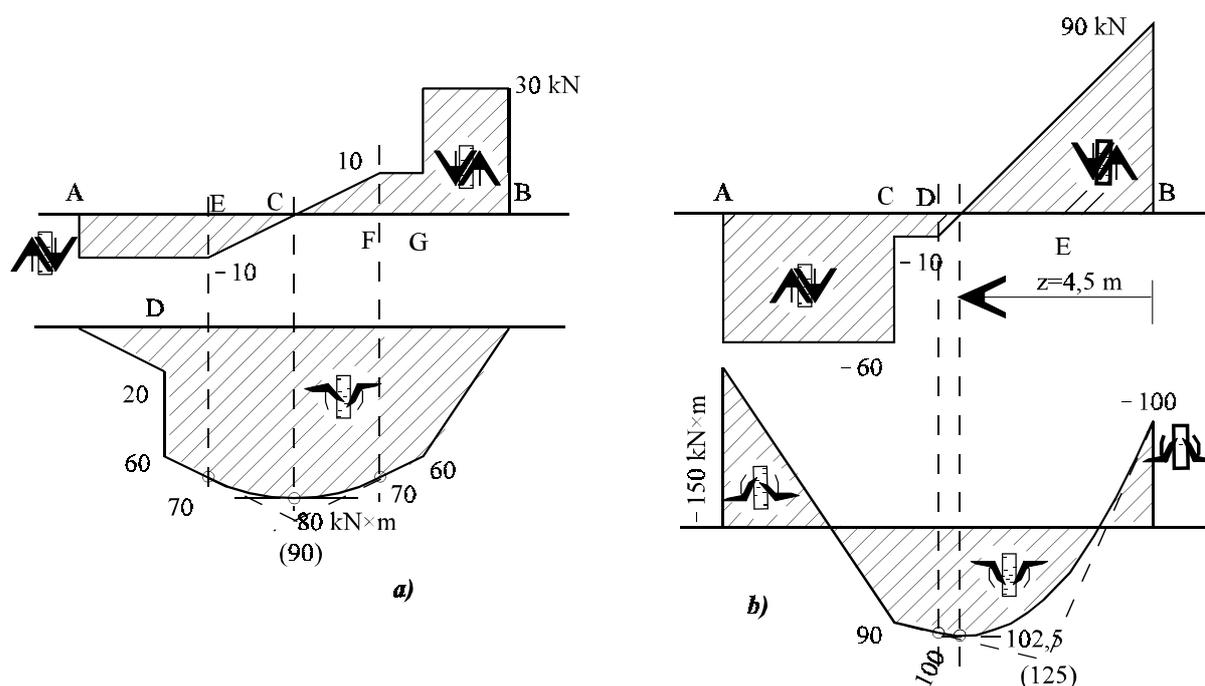


Figura 2.25

Diagramas de esfuerzos de las vigas de la figura 2.24 (problema 2.6.3)

b) En la viga de la figura 2.24b, al apoyo A irán: $6/10$ de la carga puntual, $2,5/10$ de la carga repartida y $M/L = 50/10 \text{ kN}$. Así, por la cuenta *de la vieja* o tomando momentos *totales* en A y en B debes encontrar $V_A = 60 \text{ kN}$, $V_B = 90 \text{ kN}$. Con estas reacciones y las demás cargas exteriores resulta:

- Ley de *esfuerzos cortantes* (figura 2.25b):
 - En A, por la izquierda, $-V_A = -60 \text{ kN}$.
 - En todo A-C, el mismo valor, porque no encontramos ninguna carga en el tramo.
 - En C+, siguiendo por la izquierda, saltamos a $-60 + 50 = -10$, debido a encontramos la carga puntual.
 - En B, por la derecha, $V_B = 90 \text{ kN}$.
 - En BD, el cortante disminuirá linealmente por efecto de la carga distribuida. Al llegar a D valdrá $90 - 20 \times 5 = -10 \text{ kN}$.
 - El punto de cortante nulo está entre D (-10) y B (90). Así pues en $x = x_D + DB \times 10/100 = 5,5 \text{ m}$.
- Ley de *momentos flectores* (figura 2.25b):
 - En el extremo A, por la izquierda, $M = -M_A = -150 \text{ kN} \times \text{m}$.
 - En A-C crecerá linealmente por causa de V_A ; en C valdrá $M = -150 + 60 \times 4 = 90 \text{ kN} \times \text{m}$.
 - En C-D crecerá linealmente por causa de V_A y P_C ; en D valdrá $M = -150 + 60 \times 5 - 50 \times 1 = 100 \text{ kN} \times \text{m}$.
 - En B, por la derecha, $M = M_B = -100 \text{ kN} \times \text{m}$.
 - Si imaginamos la carga distribuida concentrada en su c.d.g. E, en este punto el valor (ficticio) del momento sería $V_B \times 2,5 = 225 \text{ kN} \times \text{m}$. En realidad, la carga distribuida redondea la poligonal C-E-B (de puntos en la figura 2.25b) mediante una parábola de 2° grado tangente a dichas rectas en D y B.
- Los valores extremos del momento flector son:
 - el negativo, $-150 \text{ kN} \times \text{m}$ en el extremo A,
 - el positivo, el que resulte en el punto de cortante nulo $x = 5,5 \text{ m}$ ($z = 4,5 \text{ m}$): por la derecha $M_{\text{máx}} = M_B + V_B \cdot z - q \cdot z^2/2 = 102,5 \text{ kN} \times \text{m}$.

Enseñanzas:

- En vigas biapoyadas el cálculo de esfuerzos comienza determinando las reacciones de apoyo.
- Hemos visto las huellas de todo tipo de cargas:
 - momento:
 - ▶ nada en la ley de cortantes,
 - ▶ salto en la ley de momentos;
 - carga puntual:
 - ▶ valores constantes en la ley de cortantes
 - con un salto bajo la carga de su valor,
 - ▶ leyes lineales de momentos,
 - con quiebro bajo la carga;
 - carga distribuida uniforme:
 - ▶ cortante, ley lineal;
 - ▶ momento, parábola de 2º grado tangente en los extremos a la ley que se obtendría con una carga puntual equivalente,
 - con la curvatura hacia arriba (si la carga es hacia abajo y representamos M^+ hacia abajo).
- Hemos localizado los puntos de momentos flectores máximos y mínimos entre:
 - los puntos de cortante nulo y
 - los extremos de la viga.

Problema 2.6.4: Teórico

La viga biapoyada de la figura 2.29a soporta una sobrecarga distribuida según una parábola de 2º grado de valor cero en los extremos y valor máximo q_0 kN/m en el centro. Se pide obtener las expresiones analíticas y dibujar los croquis de las leyes de esfuerzos cortantes y flectores correspondientes.

Siendo la sobrecarga una parábola de segundo grado que pasa por $x=0$ y $x=L$, su expresión será de la forma $q(x)=A \cdot x(L-x)$. El valor de A se determina con la condición de que $q(L/2)=q_0$ con lo que resulta $A=4q_0/L^2$. Las reacciones exteriores serán, por simetría

$$V_A = V_B = \frac{1}{2} \text{ área de la parábola} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot q_0 \cdot L = q_0 L/3$$

El esfuerzo cortante en x será (figura 2.29b):

$$\begin{aligned} Q(x) &= -V_A + \int_{z=0}^{z=x} q(z) dz = \\ &= -\frac{q_0 L}{3} + \frac{4q_0}{L^2} \int_0^x (Lz - z^2) dz = \\ &= q_0 \frac{L}{3} \left[-1 + 6 \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] \end{aligned}$$

Comprueba que se cumple la simetría $Q(L) = -Q(0) = q_0 L/3$ y $Q(L/2) = 0$.

El momento flector en x será (figura 2.29b):

$$\begin{aligned} M(x) &= V_A x - \int_{z=0}^{z=x} q(z) dz(x-z) = \\ &= \frac{q_0 L}{3} x - \frac{4q_0}{L^2} \frac{2Lx^3 - x^4}{12} = \frac{q_0 L^2}{3} \left[\frac{x}{L} - 2 \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4 \right] \end{aligned}$$

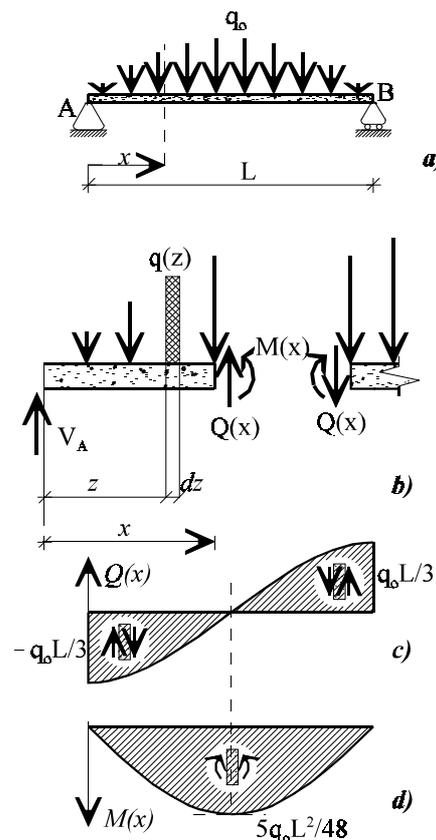


Figura 2.26
Viga y diagramas del problema 2.6.4

Comprueba que $M(0) = M(L) = 0$. El máximo se tiene en $x/L = 1/2$ y vale $5q_0L^2/48$, o sea los 5/4 del producido por la misma sobrecarga repartida uniforme (valor $2q_0/3$) (figura 2.20c). Nota que la carga distribuida parabólicamente representa el 67% de la carga uniforme q_0 y produce el 83% de su momento flector, desproporción debida a que se concentra en la zona central donde hace más daño.

Los gráficos de $Q(x)$ y $M(x)$ se muestran en la figura 2.29c,d.

Este problema puede resolverse también con relativa sencillez mediante el procedimiento *matemático* de la sección §2.5.

Enseñanzas:

- Los cálculos de $Q(x)$ y $M(x)$ han puesto de relieve:
 - que los esfuerzos resultan de
 - ▶ de equilibrar las cargas exteriores o
 - ▶ de introducir por la cara de la izquierda las fuerzas y momentos que llegan por la izquierda
 - que $Q(x)$ resulta de sumar o integrar una vez las cargas transversales $V(x)$ o $q(x)$ desde un extremo a la sección, y
 - que $M(x)$ resulta de sumar o integrar momentos de cargas transversales.

- Para el cálculo analítico hemos usado dos puntos genéricos:
 - el de coordenada z donde actúa la carga $q(z).dz$ y
 - el de coordenada x donde medimos el esfuerzo.

- Hemos realizado las siguientes comprobaciones:
 - de contorno:
 - ▶ $Q(0) = -V_A, Q(L) = V_B$
 - ▶ $M(0) = -M_A, M(L) = M_B$
 - de simetría:
 - ▶ $Q(0) = -Q(L); Q(L/2) = 0$
 - el diagrama de cortantes es *antisimétrico*
 - ▶ $M(0) = M(L); M(L/2) = \text{máximo o mínimo}$
 - el diagrama de momentos es *simétrico*.
 - de magnitud: el máximo momento es mayor que el que habría resultado extendiendo la carga total uniformemente

2.7 Cálculo de esfuerzos en pórticos isostáticos

Novedad 1: Fuenteovejuna

El problema de cálculo de esfuerzos no cambia mucho al pasar de vigas a pórticos, pero algo sí que se complica. Hace un momento, en §2.5 decíamos que las cargas se especializaban en sus funciones: las verticales $q(x)$ causaban sólo momentos flectores y cortantes; las horizontales $p(x)$ producían únicamente esfuerzos axiales. En pórticos esto ya no es así; todas las cargas producen de todo; peor aún: el efecto cambia de miembro a miembro, de forma que lo que es cortante para el dintel será axial para la jamba, y viceversa.

Novedad 2: evolución de signos

En pórticos conviene revisar el convenio de signos. Vamos a mantener el de la figura 2.7d pero girando sobre el contorno del pórtico, de forma que un esfuerzo que es positivo en un miembro no cambie de signo "al darte media vuelta". La figura 2.27 te muestra el convenio de esfuerzos positivos al moverte sobre un pórtico, así como la evolución del sentido positivo x^+ (que aquí deberíamos llamar s^+). Los momentos flectores positivos comprimen la fibra exterior del pórtico; los cortantes positivos harían girar la rebanada en torno al eje z ; los axiles positivos serán de tracción.

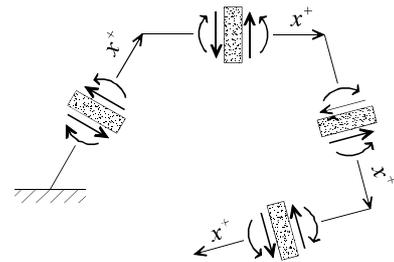


Figura 2.27
Convenio de esfuerzos positivos en pórticos

Ejemplo 2.7.1: Práctico

El pórtico de la figura 2.28a es una estructura un tanto extraña, pero va a constituir un valioso ejemplo didáctico para calcular esfuerzos.

Como necesitamos conocer todas las cargas, empezamos obteniendo las reacciones. Tomando momentos en A:

$$-V_B \times 1 - 4q_1 \times 1 - H_1(2 - 1 \times \text{tg}60^\circ) - M_1 = 0 \Rightarrow V_B = -26,536 \text{ t}$$

Por equilibrio vertical:

$$V_A = 4q_1 - V_B = 42,536 \text{ t.}$$

Por equilibrio horizontal:

$$H_A = H_1 = 2 \text{ t.}$$

Las figuras 2.28b-e muestran el despiece de la estructura con las fuerzas en los nudos extremos de cada viga. Se han señalado con un asterisco los valores conocidos (cargas exteriores y reacciones de apoyo). Los esfuerzos en los nudos se calculan como las resultantes horizontal, vertical y momento de las cargas que llegan por uno u otro lado. Así, por ejemplo, por el nudo E^+ , pieza EC (figura 2.28d), cuya normal exterior mira hacia x^- (hacia el extremo A), entran las cargas que actúan en el intervalo AE , que son V_A , H_A y M_1 , produciendo las siguientes fuerzas (signos de acuerdo con el criterio de fuerzas):

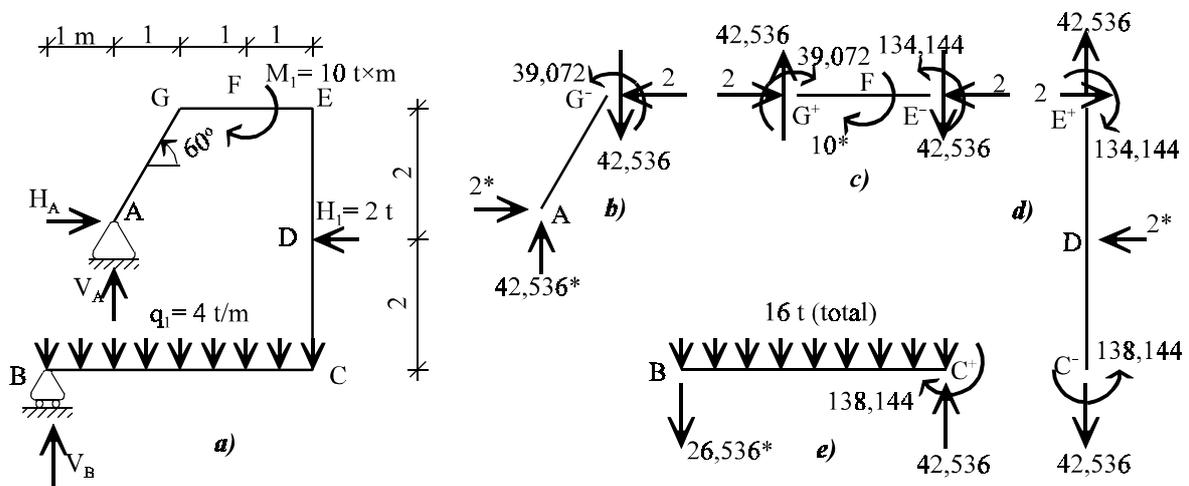


Figura 2.28
Pórtico del ejemplo 2.7.1 y esfuerzos en los nudos

$$\begin{aligned}
 H &= 2 \text{ t} \\
 V &= 42,536 \text{ t} \\
 M &= -42,536 \times 3 + 2 \times 1,732 - 10 = -134,144 \text{ t} \times \text{m}
 \end{aligned}$$

Por el nudo E^- , pieza GE (figura 2.28c), como su normal exterior mira en sentido x^+ , hacia B , entran las cargas del intervalo BE , V_B , q_l y H_l , produciendo:

$$\begin{aligned}
 H &= -2 \text{ t} \\
 V &= -26,536 - 4 \times 4 = -42,536 \text{ t} \\
 M &= 26,536 \times 4 + 4 \times 4 \times 2 - 2 \times 2 = 134,144 \text{ t} \times \text{m}
 \end{aligned}$$

Observa que estas fuerzas son iguales y contrarias (o no habría equilibrio); con calcular las de un lado tienes suficiente pero si calculas por los dos, puedes comprobar.

De manera semejante obtienes las fuerzas en los nudos C y G que se ven en las figuras 2.28d-e y b-c, respectivamente. Puedes comprobar que todas las piezas quedan en equilibrio. A partir de aquí, las leyes de esfuerzos son como en una viga normal después de obtener las reacciones. Así se llega a los esfuerzos de la figura 2.29. En las vigas orientadas según los ejes, los esfuerzos axiales y cortantes salen directamente de las cargas en los extremos. Además, *en las vigas que concurren ortogonalmente en un nudo, el esfuerzo axial en una de ellas es el cortante en la otra, y recíprocamente—si no hay una carga aplicada en el nudo—*. Cuando las vigas que concurren no son ortogonales resulta más difícil percibir el equilibrio necesario. En la viga inclinada, hay que proyectar sobre la dirección de la propia viga y sobre la normal. Así, los esfuerzos en G^- son:

$$\begin{aligned}
 Q_{G^-} &= 2 \cos 30^\circ - 42,536 \sin 30^\circ = -19,536 \text{ t} \\
 N_{G^-} &= -2 \cos 60^\circ - 42,536 \sin 60^\circ = -37,837 \text{ t}
 \end{aligned}$$

En este caso para obtener el cortante es más fácil derivar el momento:

$$Q_{G^-} = -\frac{M_G}{AG} = -19,536 \text{ t}$$

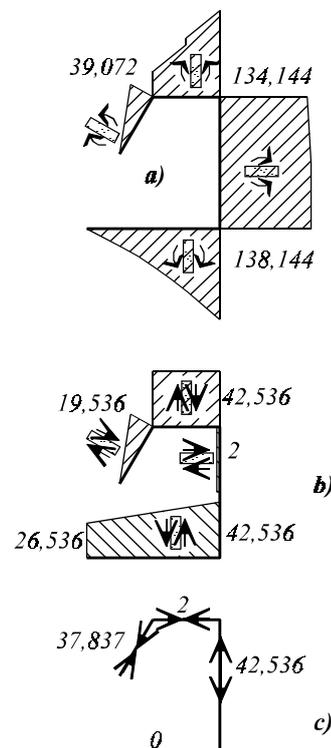


Figura 2.29
Leyes de esfuerzos del pórtico del ejemplo 2.7.1

Enseñanzas:

Este ejemplo, muy didáctico, nos ha servido para conocer la mecánica del cálculo de esfuerzos en un pórtico isostático. Hemos seguido los siguientes pasos:

- Calculamos las reacciones exteriores, para tener todas las cargas actuantes.
- Calculamos las fuerzas en los nudos por cualquiera de los dos lados:
 - bien las que entran por la cara con normal x^+ , que son las cargas exteriores situadas en la zona a la que apunta x^+ ,
 - bien las que entran por la cara con normal x^- , que son las cargas exteriores situadas en la zona a la que apunta x^- ,
 - o bien por ambos lados, para comprobar que son iguales y contrarias.
- Con las fuerzas nodales obtenidas se encuentran los esfuerzos en cada viga:
 - directamente cuando las vigas están orientadas según los ejes, o
 - proyectando, si hay vigas inclinadas,
 - según la dirección de la viga, para el axial, y
 - según la normal al eje de la viga, para el cortante; sin embargo,
 - el cortante sale también directamente derivando la ley de momentos.
- Los resultados han de ser continuos en los nudos:
 - en nudos a 90° los valores del axial y del cortante se intercambian,
 - si no hay cargas puntuales aplicadas en el nudo;
 - en otros nudos la continuidad es en componentes x e y de los esfuerzos, pero
 - si hay cargas o momentos puntuales aplicados en el nudo, se producirá el salto correspondiente en la ley de esfuerzos.

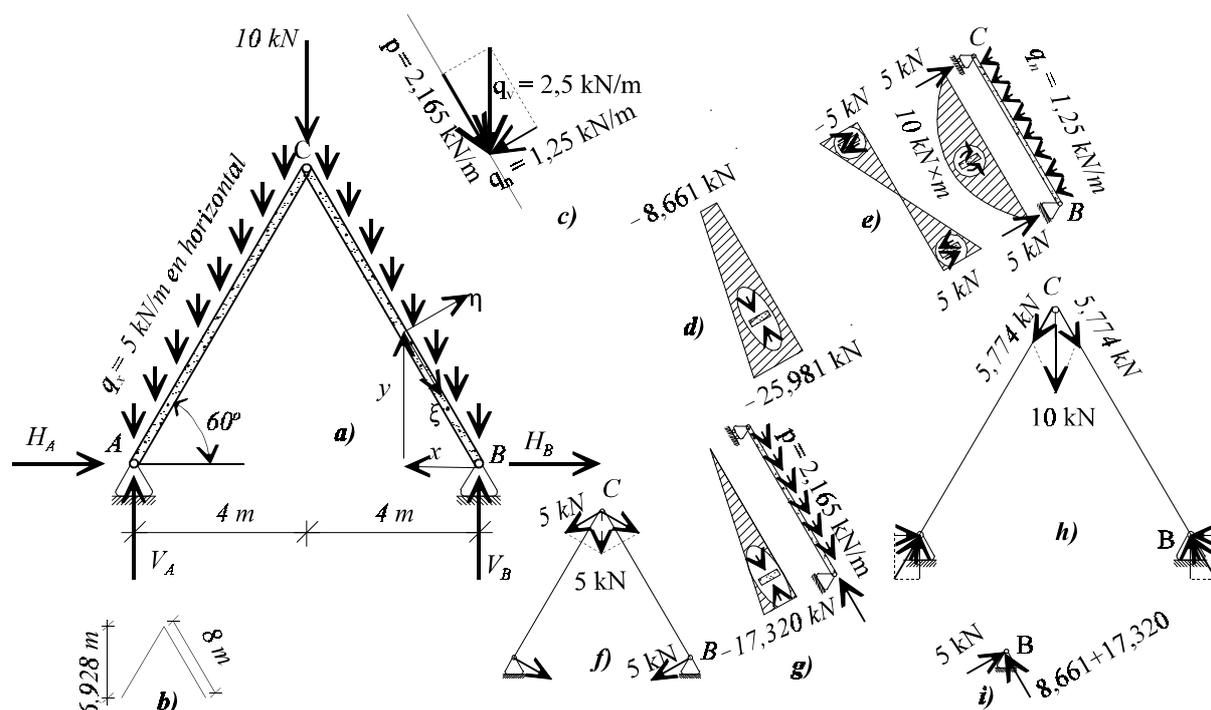


Figura 2.30 Estructura y diagramas del ejemplo 2.7.2

Ejemplo 2.7.2: Filosófico

Determinaremos las leyes de esfuerzos en el pórtico triarticulado de la figura 2.30a (rótulas en A, B y C). Soporta cargas repartidas de 5 kN/m *por unidad de proyección horizontal*, y una carga puntual en C. En la figura 2.30b anotamos las dimensiones relevantes que luego necesitaremos.

¡Cuidado con el tipo de carga repartida!

Comencemos aclarando los tipos de carga repartida que se pueden considerar. El peso propio de la viga es proporcional a su longitud real: $P_{total} = 8q_s$, siendo q_s el peso de la viga metrode longitud real s . Una sobrecarga de nieve q_x kN/m que le pudiera afectar sería proporcional a la superficie que cubre la viga, de valor total $P_{total} = 4q_x$. La carga repartida dada en la figura 2.30a es de este último tipo, de valor total sobre cada viga del pórtico de $5kN/m \times 4m = 20 kN$. Cuando trabajar con este tipo de carga produzca dificultad, lo mejor será pasarla a carga por unidad de longitud real multiplicando su valor por el cociente longitud proyectada/ longitud real. Así, nuestra carga total de 20 kN se convierte en una $q_n = 20/8 = 2,5 kN/m$ repartida por unidad de longitud real. A su vez, ésta la descomponemos en una normal a la viga $q_n = 2,5sen30 = 1,25 kN/m$ y en otra axial $p = 2,5cos30 = 2,165 kN/m$ (figura 2.20c), todas ellas por unidad de longitud real.

¡Es isostática!

Necesitamos empezar descubriendo que la estructura es isostática —y aprenderlo para siempre, porque el pórtico triarticulado es una estructura muy frecuente—. En §6.1 aprenderás esta casuística de una vez por todas; aquí sólo necesitas saber que la rótula, que no resiste momento flector, te da una ecuación pseudo-estática que, sumada a las tres (1.1-3) de la Estática te va a permitir calcular las cuatro reacciones de la estructura. Cualquier rebanada que sufra un momento flector M lleva en sus caras opuestas momentos exteriores $+M$ y $-M$, total cero. En la rótula no sólo el momento total sino también *el flector* tiene que ser cero, así que tienes un *doble cero*, por la izquierda y por la derecha.

Cálculo de reacciones

La simetría nos permite determinar que las reacciones verticales valen la mitad de la carga vertical, $V_A = V_B = 25 kN$. Si no hubiera simetría, las determinaríamos tomando momentos *totales* en B y A respectivamente. La rótula nos permite determinar H_B anulando el momento *flector* en C:

$$V_A \times 4 + H_B \times 6,928 - 20 \times 2 = 0 \Rightarrow H_B = -8,661 kN$$

El tercer término de la ecuación corresponde a la carga repartida total supuesta concentrada en el punto medio de la viga. Es importante notar que *en los pórticos las cargas verticales pueden producir reacciones horizontales*.

Obtención analítica

Con las reacciones calculadas y sabiendo que la estructura es isostática, podemos ya determinar los esfuerzos en la viga CB (que serán iguales por simetría a los de la viga AC). Las expresiones que se obtienen con las cargas a la derecha de la sección x son (proyectando sobre los ejes ξ, η de la viga):

$$\begin{aligned} N(x) &= -(V_B - q_x x) \cos 30^\circ + H_B \sin 30^\circ = 4,330x - 25,981 \text{ kN} \\ Q(x) &= (V_B - q_x x) \sin 30^\circ + H_B \cos 30^\circ = -2,5x + 5 \text{ kN} \\ M(x) &= V_B \times x + H_B \times y - q_x \frac{x^2}{2} = 25x - 8,661x\sqrt{3} - 2,5x^2 = 10x - 2,5x^2 \text{ kN}\times\text{m} \end{aligned}$$

Conviene observar que $Q(x) \neq -M'(x)$ por dos razones: (i) la coordenada x no es la directriz de la pieza y (ii) no crece hacia la derecha, por lo que el signo de la derivada cambia. Con los resultados anteriores podemos dibujar las leyes pedidas. Y así lo hacemos para los esfuerzos axiales en la figura 2.30d. Para los esfuerzos cortantes y flectores es mejor entender qué es lo que tiene que salir y pintarlo *a priori*, sin cuidarnos mucho de lo que predicen las ecuaciones anteriores.

Obtención filosófica

Las vigas inclinadas, biarticuladas, que reciben directamente una carga repartida, no tienen ninguna opción sobre cómo resistirla:

- La carga normal la tendrán que resistir exactamente igual que la viga del ejemplo 2.4.5: desarrollando una ley de momentos flectores en parábola de 2º grado con máximo $q_n L^2/8 = 1,25 \times 8^2/8 = 10 \text{ kN}\times\text{m}$ y una ley de cortantes lineal entre los valores $\pm q_n L/2 = \pm 5 \text{ kN}$ en los apoyos (figura 2.30e).
- La carga axial la resistirán conduciéndola al único apoyo que la resiste (figura 2.30g), exactamente igual que la del ejemplo 2.4.1.

Las reacciones de estas cargas locales las tendrá que soportar el conjunto estructural (figura 2.30f). Así pues, las vigas AC y CB reciben cargas por dos conceptos:

- las que les caen directamente encima, que aquí les producen los esfuerzos axiales, cortantes y flectores que acabamos de calcular como vigas aisladas, (figuras 2.30e-g) y
- las que reciben indirectamente por formar parte del conjunto estructural. Éstas son:
 - la carga puntual de 10 kN sobre el nudo C , (figura 2.30h)
 - las reacciones de 5 kN que las vigas individuales transmiten al conjunto (figura 2.30f).

Descomposición vectorial

Es muy importante saber que una carga en un nudo se transmite a las vigas que lo forman de acuerdo con la regla del paralelogramo (figura 2.30h): $2N_{CB} \cos 30^\circ = V_C = 10 \text{ kN}$. $N_{CB} = 5,774 \text{ kN}$. Obtenemos la contribución de cada viga proyectando la fuerza en la viga sobre el nudo.

Resiste por axil cuando puede

Es importante conocer este método de descomposición de fuerzas según las vigas que concurren en el nudo para entender cómo trabajan las estructuras: preferiblemente a tracción-compresión si tienen la más mínima oportunidad (como hacemos nosotros cuando nos llevamos a la cabeza o sobre los hombros las cargas pesadas, jamás alejándolas de la vertical para que no nos produzcan flexiones ni momentos desestabilizantes. La cantidad de momento que nuestros pies pueden transmitir al suelo está limitada por el tamaño del zapato y es mayor hacia adelante que hacia atrás). La prueba de este principio se obtiene calculando las reacciones de la carga puntual (figura 2.30h): para que no haya momento en la rótula las reacciones en los apoyos se deben sumar de forma que la resultante lleve la dirección de la viga.

Además de la carga puntual de 10 kN sobre el nudo C , las reacciones de la viga que en él concurren (figura 2.30f) se suman vectorialmente para dar otros 5 kN de carga vertical. Así pues, al axil que le llega a la viga CB por colaboración indirecta es 1,5 veces el calculado en la figura 2.30h: $1,5 \times 5,774 = 8,661 \text{ kN}$ que es precisamente la cantidad de axil que faltaba en la figura 2.30g para dar la ley de la figura 2.30d. ¡Los resultados matemáticos y filosóficos coinciden! Sólo te queda comprobar que las reacciones de apoyo de la figura 2.30i, en ejes de viga CB , son las mismas obtenidas antes en los ejes cartesianos x - y .

Enseñanzas:

Este ejemplo nos ha ilustrado sobre la forma de trabajar de las estructuras. Hemos aprendido muchas cosas:

- A considerar las cargas repartidas:
 - por unidad de longitud de viga
 - y por unidad de proyección,
 - ▶ a pasar de unas a otras, y
 - a descomponerlas en normales y axiales.
- Que los pórticos triarticulados son estructuras isostáticas muy comunes.
- Que en la rótulas el momento *flector* tiene que ser cero, lo cual proporciona una ecuación pseudo-estática adicional;
 - en los demás puntos sólo el momento *total* es nulo.
- Que en los pórticos se producen reacciones horizontales aunque las cargas exteriores sean sólo verticales.
- A calcular esfuerzos matemáticamente, proyectando las fuerzas que llegan por un lado de la estructura sobre:
 - la directriz, para obtener el axil,
 - la normal, para obtener el cortante,o multiplicándolas por sus distancias para obtener el momento.
- Que para que se cumpla $Q(x) = -M'(x)$ es preciso que
 - la coordenada x sea el espacio sobre la directriz de la viga, y que
 - su sentido positivo sea el correcto.
- A calcular los esfuerzos *filosóficamente* sabiendo:
 - que las vigas integrantes de estructuras isostáticas sólo pueden transmitir sus cargas al conjunto estructural como lo hacen las biapoyadas o las ménsulas, y
 - que las cargas en los nudos se conducen a las vigas descomponiéndose de acuerdo con la regla del paralelogramo de suma de vectores.
- Que el eclecticismo es muy práctico en esta asignatura:
 - el cálculo del esfuerzo axil fue mucho más fácil por el método analítico (figura 2.30d); mientras que
 - el cálculo de los esfuerzos cortante y flector fue inmediato por el método «filosófico» (figura 2.30e).
- Que los esfuerzos les llegan a las vigas por dos caminos:
 - directamente, por caerles encima y transmitirlos al conjunto estructural, e
 - indirectamente, por formar parte del conjunto estructural.
- Que los esfuerzos son la suma de:
 - los de viga aislada, isostática, más
 - los de interacción del conjunto (frecuentemente hiperestáticos, aunque no en este caso)

Ejemplo 2.7.3: Teórico

Vamos a calcular los esfuerzos en el arco sometido a presión hidrostática que ya vimos la figura 1.7. El cálculo de esfuerzos es diferente del de reacciones de empotramiento (§1.1) sólo en el hecho de que allí las reacciones se calculaban sobre un punto fijo y aquí calcularemos los esfuerzos sobre todos los puntos: sobre uno genérico. Es imprescindible reconocer que necesitamos considerar dos puntos genéricos:

- el de actuación de la causa (carga, de coordenada ω) y
- el de medida del efecto (esfuerzo, de coordenada φ)

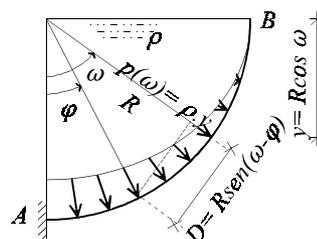


Figura 2.31
Arco sometido a presión hidrostática del ejemplo 2.7.3

como ya hicimos en el ejemplo 2.4.5:

$$N(\varphi) = \int_{\omega=\varphi}^{\omega=\pi/2} p(\omega) \operatorname{sen}(\omega - \varphi) ds = \rho R^2 \int_{\omega=\varphi}^{\omega=\pi/2} \cos \omega \operatorname{sen}(\omega - \varphi) d\omega = \frac{1}{2} \rho R^2 \left[\cos \varphi + \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \varphi \right]$$

$$Q(\varphi) = - \int_{\omega=\varphi}^{\omega=\pi/2} p(\omega) \cos(\omega - \varphi) ds = - \rho R^2 \int_{\omega=\varphi}^{\omega=\pi/2} \cos \omega \cos(\omega - \varphi) d\omega = - \frac{1}{4} \rho R^2 (\pi - 2\varphi) \cos \varphi$$

$$M(\varphi) = - \int_{\omega=\varphi}^{\omega=\pi/2} p(\omega) D(\omega - \varphi) ds = - RN(\varphi) = - \frac{1}{2} \rho R^3 \left[\cos \varphi + \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \varphi \right]$$

Es prudente comprobar los resultados en los puntos en que los esfuerzos son conocidos. Encontramos que, efectivamente, en el empotramiento $\varphi = 0$ coinciden con los de las reacciones encontradas en el ejemplo de la figura 1.7, y en el extremo $\varphi = \pi/2$ son todos nulos.

Enseñanzas:

En este ejemplo no nos ha quedado más remedio que aplicar el procedimiento analítico. Nos ha recordado lo siguiente:

- El esfuerzo axial resulta de *sumar o integrar* las proyecciones sobre la *tangente* a la directriz de las cargas que llegan por uno u otro lado de la sección.
- El esfuerzo cortante resulta de las proyecciones de las mismas cargas sobre la *normal*,
 - si en un esfuerzo multiplicamos la carga por un seno, en el otro lo haremos por un coseno, y viceversa,
 - aunque también hay que cuidar el signo.
- El momento flector es la suma o integral de los momentos estáticos de las cargas que llegan por uno u otro lado de la sección,
 - producto de las fuerzas por la distancia
 - medida ortogonalmente a la dirección de la fuerza.
- Las características de la presión hidrostática son (visto en §1.1):
 - que es proporcional a la profundidad,
 - con coeficiente de proporcionalidad el peso específico ρ ,
 - y siempre ortogonal al paramento.

2.8 Problema inverso: dados los esfuerzos encontrar las cargas

Método

Por problema inverso entendemos aquél en que nos dan la ley de momentos flectores de la estructura y nos piden las cargas actuantes. Resolver este tipo de problemas es bastante más fácil que el de obtener las leyes de esfuerzos. Sigue los siguientes pasos:

- 1) Coloca momentos exteriores allí donde la ley de M_f muestre un salto (tabla 2.1).
 - El signo del momento M colocado debe ser *contrario* al del salto: $M = -[(M_f(x^+) - M_f(x^-))]$.
- 2) Deriva *visualmente* la ley de M_f . Obtendrás así la ley de cortantes Q . (Date cuenta de que partías de $-M_f$ por lo al derivar *visualmente* no tienes que cambiar el signo, resulta $Q = d(-M_f)/dx$.)
 - Coloca cargas puntuales P allí donde la ley de Q muestre saltos.
 - ▶ El signo de cada P debe ser el *contrario* al del salto: $P = -Q[(x^+) - Q(x^-)]$, positiva con el sentido del eje $+y$.
- 3) Deriva Q visualmente. Obtendrás así la ley de cargas normales $-q(x)$, positivas hacia arriba.

Recuerda que:

- la derivada de una recta es una constante, la tangente de su ángulo de inclinación:
 - positiva si va del cuadrante 3 al 1 (o al revés),
 - negativa si va del cuadrante 2 al 4 (o al revés);
- la derivada de una parábola de 2º grado es una recta. Si la parábola parte del vértice, su inclinación en cualquier punto A es *el doble* que la de la cuerda OA (figura 2.32); o dicho de otro modo, la tangente en A corta al eje x en $x/2$ (sólo cuando el eje x es la tangente en el vértice O).

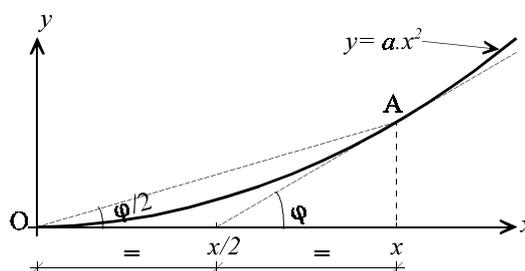


Figura 2.32
Propiedad de la tangente a la parábola

Ejemplo 2.8.1: Vigas

Vamos a determinar las cargas causantes de la ley de momentos flectores de la figura 2.33a (las parábolas son de 2º grado).

Paso 1. La ley de M_f presenta tres saltos: en A , de 0 a -10 , luego $M_A = 10 m \times t$; en C , el salto es de 0 a 10 , luego $M_C = -10 m \times t$; en B , tenemos un salto de 20 a 0 , luego $M_B = 20 m \times t$. Estas cargas se muestran en la figura 2.33b.

Paso 2. La ley de momentos flectores se deriva *visualmente* de la siguiente manera. En el tramo AC la derivada será lineal desde el valor que tenga en A a cero en C . Por lo dicho hace un instante, la tangente en A corta al eje x en el punto medio de AC , como se ha indicado en la figura 2.33a; su inclinación, negativa, es el doble que la de la cuerda: $2 \times 10/5$. En CB todo sucede igual pero con crecimiento contrario (figura 2.33c). Salen saltos en los dos extremos por lo que colocamos cargas puntuales en ellos, con los valores opuestos (figura 2.33d).

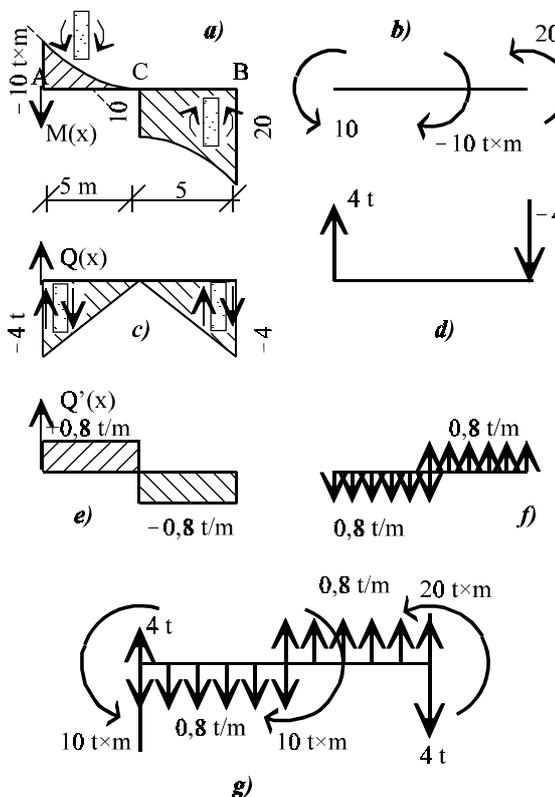


Figura 2.33
Obtención de las cargas del ejemplo 2.8.1

Paso 3. Derivamos la ley de Q 's de la figura 2.33c. En AC la pendiente es positiva de valor $4/5$, y en CB , opuesta (figura 2.32e). Por tanto en AC , $q(x) = -0,8 \text{ t/m}$ (hacia abajo) y en CB (figura 2.33f), $q(x) = 0,8$ (hacia arriba).

Isostáticas, siempre

La figura 2.33g muestra reunidas todas cargas encontradas en los pasos sucesivos. Este método proporciona las cargas actuantes sin diferenciar entre las que son acciones y las que son reacciones exteriores. Es decir, las cargas de la figura 2.33g podrían corresponder tanto a una viga empotrada en A (con reacciones $V_A = 4$, $M_A = 10$), como a una viga empotrada en B (con reacciones $V_B = -4$, $M_B = 20$), como a una viga biapoyada (con las reacciones V_A y V_B dichas); podría corresponder a cualesquiera sustentación isostática.

Hiperestáticas, excepcionalmente

Mentiría, por ejemplo, quien dijera que la ley de M_f de la figura 2.33a corresponde a una viga biempotrada, porque dicha ley de momentos produce un giro relativo entre los extremos que la sustentación mencionada no permite. Diría verdad, en cambio, por pura casualidad, quien afirmara que corresponde a una viga empotrada en A y apoyada en B . Pero esto no vas a saber determinarlo hasta que aprendas a calcular movimientos en el capítulo 4.

Enseñanzas:

Ver los dos primeros apartados del *Resumen* al final de esta sección

Ejemplo 2.8.2: Pórtico

Determinar las cargas que actúan sobre el pórtico cuya ley de momentos flectores se da en la figura 2.34a.

Paso 1. Los saltos en la ley de momentos flectores en los extremos A y B nos obligan a colocar en dichos puntos los momentos exteriores que se observan en la figura 2.34c.

Paso 2. Las pendientes en la ley de momentos nos dan la ley de cortantes de la figura 2.34b. En las vigas verticales para atinar con los signos conviene girar el papel de modo que la viga quede horizontal y los momentos flectores considerados negativos, por encima de la directriz. Así se determina el signo de la pendiente y el correspondiente signo del esfuerzo cortante. A continuación colocamos cargas puntuales allí donde hay saltos en la ley de cortantes (figura 2.34c).

Las cargas verticales que colocamos en los nudos C y E (figura 2.34c) podrían estar situadas en cualquier punto de AC y BE , respectivamente; lo más probable es que sean las reacciones en A y B . Igualmente, las cargas horizontales en C y E pueden ser una única de $4,667 \text{ t}$ colocada en cualquier punto del dintel.

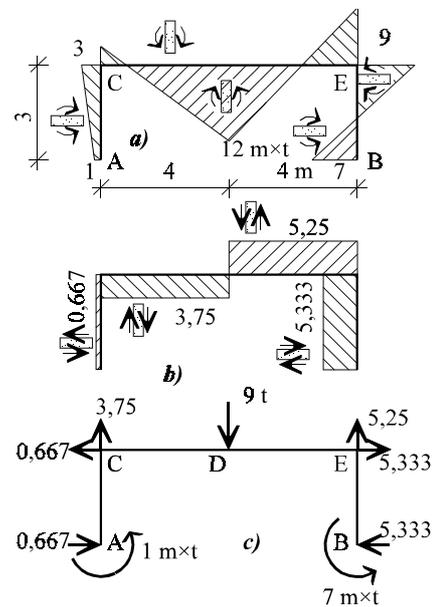


Figura 2.34
Estructura y diagramas del problema 2.8.2

Enseñanzas

Ver el tercer apartado del *Resumen* a continuación.

Resumen:

- Hemos descrito un procedimiento sistemático de encontrar las cargas actuantes sobre una estructura cuando se conoce la ley de momentos flectores que producen. Procedimos así:
 - Colocamos momentos puntuales en los lugares donde había saltos en la ley de momentos,
 - ▶ con signo contrario al del salto.
 - Derivando *visualmente* la ley de momentos, obtuvimos la de cortantes;
 - ▶ no cambiamos el signo porque ya partíamos de $-M_f(x)$,
 - ▶ usamos la propiedad de que la derivada de la parábola en un punto es doble que la de la cuerda.
 - Colocamos cargas puntuales en los lugares donde había saltos en la ley de cortantes,
 - ▶ con signo contrario al del salto,
 - ▶ positivas hacia arriba.
 - Derivando visualmente la ley de cortantes obtuvimos la de $-q(x)$
 - ▶ cambiamos el signo y colocamos las cargas $q(x)$,
 - positivas hacia arriba.
- Las cargas encontradas incluyen exteriores y reacciones, sin discriminación,
 - valen para cualquier sustentación isostática,
 - no valen, en general, para sustentación hiperestática,
 - ▶ habría que comprobar la compatibilidad en movimientos (capítulo 4).
- En el caso de pórticos:
 - aparecen ciertas indeterminaciones sobre la posición exacta de las cargas axiales;
 - para orientarnos con los signos de las barras inclinadas, conviene girar el papel de modo que las veamos:
 - ▶ horizontales
 - ▶ y de manera que los momentos considerados negativos queden por encima de la directriz.

3 Tensiones y deformaciones

3.0 Objetivos y contenido

Objetivos	Contenido
<p>General:</p> <ul style="list-style-type: none"> — Aprender a determinar las tensiones y deformaciones producidas por: <ul style="list-style-type: none"> • esfuerzos y • variaciones térmicas <p>en una rebanada elemental de viga, y conocer las hipótesis bajo las cuales se determinan.</p>	
<p>Específicos:</p> <ul style="list-style-type: none"> — Entender qué son las tensiones y saber que hay de dos tipos: normales y tangenciales §3.1 — Saber que las tensiones van indisolublemente unidas a sus correspondientes deformaciones §3.2 — Conocer la relación entre tensiones y deformaciones en nuestro material «oficial». . . §3.2 — Saber que nuestro material «oficial» es el de Hooke y conocer sus características. . . §3.2 — Saber que la causa única de las tensiones son los esfuerzos §3.3 — Saber que las resultantes de las tensiones que afectan a una sección son los esfuerzos que la cruzan (2ª definición de esfuerzo) §3.3 — Saber qué tensiones producen los esfuerzos axil y flector y cómo se reparten en la sección: <ul style="list-style-type: none"> • conocer la fórmula de Navier y su rango de validez <ul style="list-style-type: none"> ▶ conocer las hipótesis que lleva incluidas, ▶ saberla aplicar incluso en secciones discretas y no homogéneas; • saber obtener tensiones cuando la fórmula de Navier no es aplicable; • saber qué es el núcleo central de una sección y aprender a determinarlo. • saber cómo podemos corregir las tensiones introduciendo pretensado §3.3 — Saber qué función realizan las tensiones tangenciales y qué esfuerzo las produce. . . . §3.4 — Aprender qué relaciones hay entre tensiones tangenciales sobre planos ortogonales. . . §3.4 — Conocer la fórmula de la distribución de tensiones tangenciales en una sección: <ul style="list-style-type: none"> • las hipótesis en las que se basa, • el equilibrio con las tensiones normales, • sus discontinuidades en las uniones ala-alma, • dónde se da el máximo (en las secciones sensatas), • la doble distribución en las alas §3.4 — Saber qué deformaciones hay y qué esfuerzos las producen. Saber aplicar las fórmulas de las deformaciones por <ul style="list-style-type: none"> ▶ axil y ▶ flector §3.5 — Saber qué tipos de deformaciones produce una variación térmica y saber determinarlas: <ul style="list-style-type: none"> • para una distribución lineal sobre el canto, y • para una distribución no lineal sobre el canto, y en este caso <ul style="list-style-type: none"> ▶ saber obtener las tensiones internas que resultan §3.6 	
<p>Adicionales:</p> <ul style="list-style-type: none"> — Adquirir soltura en la determinación de tensiones y deformaciones en una sección producidas por: <ul style="list-style-type: none"> • esfuerzos, • variaciones térmicas, • pretensado <p>incluso cuando no es aplicable la fórmula de Navier. §3.7</p>	

3.1 Conceptos de tensión: total, normal y tangencial

Concepto intuitivo

Si tu peso hace que te hundas en la nieve, tratarás de solucionarlo colocando una raquetas bajo el calzado para aumentar la superficie de contacto. Lo que estarás haciendo es repartir tu peso sobre un área mayor de manera que la tensión resultante, *fuerza repartida sobre una superficie*, sea «admisibile» para la nieve.

Tensión total

En el capítulo anterior veíamos los esfuerzos como las cargas que fluyen a través de la superficie entera de una sección. Ahora vamos a fijarnos en una superficie de material resistente mucho más pequeño que la sección: una «peca» en su superficie, de área ΔA . A través de la peca pasará sólo una cierta cantidad de fuerza $\Delta \vec{F}$ (figura 3.1), que será un ente vectorial, con magnitud, dirección y sentido. Se define como **tensión total** sobre la peca la magnitud vectorial

$$(3.1-1) \quad \vec{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

Componentes σ y τ

Las dimensiones del vector \vec{t} (tensión total en ΔA) serán las de una presión, fuerza/superficie. El vector \vec{t} llevará cualquier dirección. Podemos descomponerlo en dos componentes: una según la normal \vec{n} a la sección, llamada **tensión normal**, que denotaremos con σ , y otra contenida en el plano de la sección, que llamaremos **tensión tangencial** y designaremos con τ (figura 3.1). Naturalmente:

$$(3.1-2) \quad \begin{aligned} \sigma &= (\vec{t} \cdot \vec{n}) \vec{n} \\ \vec{\tau} &= \vec{t} - \sigma \end{aligned}$$

Las dimensiones de σ y τ , los dos vectores en que hemos descompuesto \vec{t} , son también $F \times L^{-2}$.

Esfuerzos

Así pues, igual que a través de la cara entera de la sección fluyen los esfuerzos N , Q y M , a través de cada pequeño elemento de la misma cara pasarán las componentes σ y τ de la tensión total \vec{t} correspondiente al elemento. Naturalmente, *sumando (integrando) las contribuciones de cada $\sigma \Delta A$, $\tau \Delta A$ resultarán los esfuerzos*. Si en el capítulo anterior nos interesamos en los esfuerzos como resultantes de las cargas que entran por un lado de la sección, en este capítulo nos ocuparemos de los *esfuerzos como resultantes de los "paquetes" de tensiones σ y τ* .

Siguiendo con el símil hidráulico, un esfuerzo (tal como N kilonewtons de axil sobre una sección) es como el caudal Q m³/seg que pasa por una tubería de diámetro D metros. Las tensiones son como el caudal por unidad de área, esto es, la velocidad en cada punto: $Q/(0,25 \cdot \pi \cdot D^2)$ m/seg si fuera uniforme. Sumando (integrando) las velocidades en cada punto recobramos Q .

Resumen:

- Las fuerzas (kilonewtons) que cruzan una sección (de área en m²) se reparten por ella en forma de tensiones (kN/m²) normales a ella σ o tangenciales τ .
- El reparto exigirá que la cantidad total, suma o integral de las tensiones en el área de la sección, sea igual a los esfuerzos que las causan.

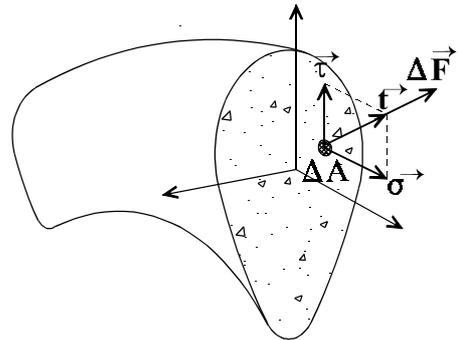


Figura 3.1
Concepto de tensión total;
componentes normal y tangencial

3.2 El material de la Resistencia de Materiales

Deformarse para resistir

Entre una estructura descargada y la misma estructura cargada debe de haber alguna diferencia. Algo tiene que suceder en su interior para que pase de una situación a la otra; en suma, para que la estructura *movilice* la energía suficiente para resistir. Lo que una estructura hace al ser cargada es similar a lo que hace un ejército atacado: repliegarse a posiciones de defensa.

Como el muelle

El fenómeno no es tan desconocido como parece en principio. Todos hemos apretado el muelle de un bolígrafo y experimentado cómo se repliega hasta encontrar una posición cuya energía elástica le permita hacer frente a la carga exterior. Pues bien, el comportamiento del humilde muelle es muy similar al de la más sofisticada estructura: para resistir tiene que deformarse. Esto es así hasta el punto que si una parte de la estructura no está deformada podremos acusarla de "escaqueo", escurrir el bulto, no colaborar a resistir.¹

Así pues, para entender cómo resiste una estructura es preciso saber cómo se deforma. En el fenómeno de la deformación van a intervenir dos personajes: el material de que está compuesta la estructura y la geometría de la misma, o forma en que dicho material está repartido.

El cuerpo, conocido

El cuerpo al que aplicamos nuestra ciencia menor es la ya conocida *pieza prismática* (§2.1).

El material de Hooke

También para hacer el estudio fácil, en Resistencia elegimos un material con buen comportamiento: postulamos que es homogéneo, isótropo, elástico y lineal. *Homogéneo*, porque no queremos que tenga defectos como agujeros de termitas que hagan cambiar sus propiedades de un punto a otro. *Isótropo*, para que sus propiedades no varíen con la orientación, y no tener que preocuparnos de si las cargas lo atacan por el flanco o por la retaguardia. *Elástico*, para que al retirar la carga se quede como si nada hubiera sucedido, porque no queremos investigar su nebuloso pasado. *Lineal*, para que a doble esfuerzo le corresponda doble tensión; si no, nos volveríamos locos con los cálculos. A este material le llamaremos *hookiano*, porque fue Hooke quien lo "inventó".

Diagrama F-ΔL

En Resistencia lo único que nos interesa saber de un material hookiano es su módulo de elasticidad E . Veamos cómo se determina experimentalmente. Coges una muestra (probeta) cilíndrica del material, con una relación diámetro/longitud mayor que la de un spaghetti y menor que la de una moneda. La estiras (o comprimes) con una fuerza F sobre las caras planas, que aumentas lentamente (figura 3.2a). Mides el alargamiento (o acortamiento) ΔL de la generatriz que se produce para cada valor de F . Lo dibujas en un gráfico. Como el material debe ser lineal, te resultará una línea recta (y si no, lo trucas). Así construyes la figura 3.2b.

Diagrama σ-ε

Ahora bien, los resultados de la figura 3.2b no los puedes vender porque dependen mucho de las dimensiones de tu probeta. Antes de lanzarlos al mercado los normalizas para no tener que dar muchas explicaciones de cómo fueron obtenidos. La carga F la divides por el área del círculo sobre el que actúa, como si se distribuyera uniformemente sobre él (que es casi verdad). Al resultado le llamas tensión normal σ , cuyas unidades son $F \times L^{-2}$. El alargamiento ΔL lo normalizas dividiendo por la longitud L de la probeta y obtienes el alargamiento por unidad de longitud

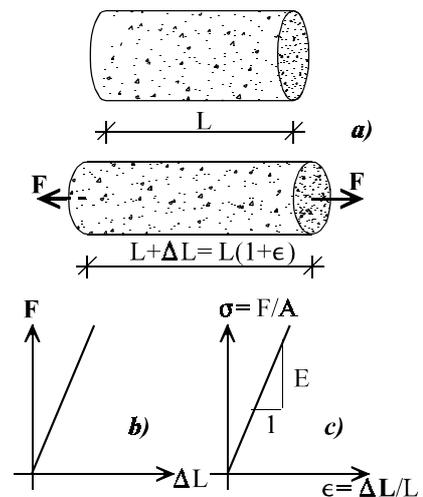


Figura 3.2
Comportamiento del material de Hooke

¹ Veremos, sin embargo, que ésta no es la forma habitual de proceder de las estructuras; antes bien: lo normal es que cada parte colabore en la medida de sus posibilidades, de manera mucho más social o solidaria que el injustamente llamado *homo sapiens*.

(unitario) que designas por ϵ , cantidad adimensional. El gráfico ni te molestas en tocarlo, sólo le cambias las escalas de los ejes (figura 3.2c) y a venderlo.

$$E = \sigma / \epsilon$$

A tus clientes sólo les va a importar la pendiente de la recta, o factor de proporcionalidad entre la tensión y la deformación. Le llamarás E , *módulo de elasticidad* para los amigos, módulo de Young para los *snoobs*. Sus unidades son las mismas de σ (porque ϵ es adimensional). Aunque el valor ha sido obtenido de un ensayo tensional muy simple, todo el mundo lo utilizará alegremente para relacionar tensiones con deformaciones en las circunstancias más diversas.

$$(3.1-3) \quad \frac{\sigma}{\epsilon} = E \quad (\text{constante})$$

Te preguntará con razón si no estaremos usando un material cuyo comportamiento en nada se parece al de los materiales reales, con lo cual nuestra bella disciplina carecerá de aplicación práctica. Pues bien, no: (i) Todos los materiales se comportan como hookianos hasta un cierto límite, llamado límite de proporcionalidad. (ii) Es conservador mantenernos dentro de él, porque aún nos queda una buena reserva de resistencia, que en otras asignaturas (cálculo no lineal, plasticidad) aprenderás a calcular. Debes tener claro, no obstante, que (iii) nuestra Resistencia nos da una primera aproximación del fenómeno resistente, algo así como el primer término del desarrollo en serie de Taylor. Parece, pues, natural quedarnos sólo con el primer término del desarrollo de $\sigma(\epsilon)$.

Ejemplo 3.2.1: Deformación limitada

Una barra de 5 m de longitud y 10 cm² sección, de acero ($E = 2 \times 10^7$ N/cm²), va a ser sometida a una fuerza de tracción P creciente. Sin embargo, un obstáculo impide que su alargamiento exceda de 1 cm (figura 3.3). Se pide:

- Determinar la máxima tensión que puede alcanzar el material de la barra.
- Determinar la máxima carga que puede recibir la barra.
- Explicar qué sucede si de la barra se cuelga una carga mayor.

a) La máxima deformación posible en la barra es:

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{0,01}{5} = 2 \times 10^{-3}$$

La máxima tensión correspondiente será $\sigma = E \times \epsilon = 40.000$ N/cm².

b) La carga máxima P que sentirá la barra es $\sigma \times A = 400.000$ N = 400 kN.

c) Si de la barra se cuelga una carga P de más de 400 kN, los primeros 400 kN se consumirán en alargar la barra todo lo permitido; el resto no lo recibirá la barra sino que será transferido al obstáculo que limita el alargamiento.

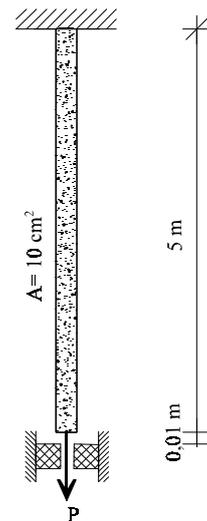


Figura 3.3
Barra del ejemplo 3.2.1

Enseñanzas:

- El ejemplo pone de relieve que:
 - para que se produzca una tensión se tiene que producir su correspondiente deformación;
 - si la deformación de un cuerpo está limitada:
 - ▶ está limitada la tensión que sufre,
 - ▶ y, por ende, está limitado el esfuerzo que resiste;
 - la carga no resistida irá al obstáculo que limita la deformación

Resumen:

- Para que un cuerpo resista tiene que deformarse: si no se deforma no trabaja, y recíprocamente (excepto en el caso térmico).
- La cantidad de deformación depende de la geometría del cuerpo, del material y de las cargas. En Resistencia estudiamos:
 - cuerpo: la pieza prismática;
 - material: hookiano (homogéneo, isótropo, elástico y lineal);
 - cargas: contenidas en el plano de curvatura de la pieza prismática.
- La ecuación de Hooke $\sigma = E(\epsilon - \epsilon_T)$ relaciona tensiones con deformaciones no térmicas. En Resistencia es de aplicación en todo momento.

3.3 Reparto de tensiones normales, según Navier

Objetivo

Determinar cómo fluyen los esfuerzos por el interior de una sección de una viga (o de una pieza prismática), qué tensión aparece en cada punto de ella, es el primer objetivo de la Resistencia de Materiales. Éste es un problema muy difícil del que se ocupa doña Elasticidad. Para simplificarlo la Resistencia de Materiales introduce una hipótesis simplificadora: la de Navier.

Hipótesis de Navier

La hipótesis de Navier mantiene que *toda sección plana y normal a la directriz de una pieza prismática descargada se transforma al cargar en otra sección plana y normal a la nueva directriz deformada* (ver figura 3.4a,b). Esto significa que las deformaciones de una sección recta son lineales (figura 3.4c) de la forma:

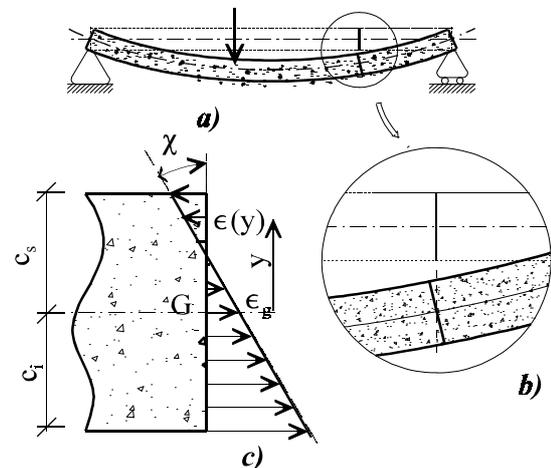


Figura 3.4 Hipótesis de Navier

$$(3.3-1) \quad \epsilon(y) = \epsilon_g - \chi \cdot y$$

siendo ϵ_g , χ constantes. La primera representa la deformación de la fibra baricéntrica (la que pasa por el c.d.g.); el significado físico de χ lo veremos más adelante.

La hipótesis de Navier implica que en R.M. nos quedamos con los dos primeros términos, los lineales, del desarrollo en serie de la verdadera $\epsilon(y)$.

Con material hookiano, la fórmula anterior implica que la distribución de tensiones en la sección también será plana:

$$(3.3-2) \quad \sigma(y) = \sigma_g - \chi E y$$

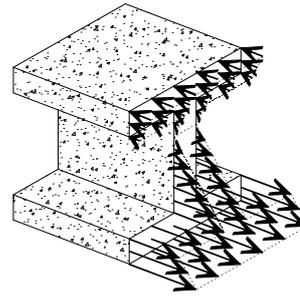
Equivalencia estática entre esfuerzos y paquete de tensiones

Como las tensiones resultan de repartir los esfuerzos en la sección, se deberá verificar:

$$(3.3-3) \quad \left. \begin{aligned} \int_{-c_i}^{+c_s} \sigma(y) b(y) dy &= N \\ \int_{-c_i}^{+c_s} \sigma(y) b(y) y dy &= -M \end{aligned} \right\}$$

El signo menos en la segunda ecuación viene de considerar que el momento flector es positivo cuando comprime (tensión normal negativa) la parte superior de la sección (figura 3.5).

Es importante observar que, mientras en el capítulo anterior considerábamos los esfuerzos como las fuerzas que cruzaban una sección, aquí vemos los esfuerzos como la fuerza y el momento resultantes o contenidos en el diagrama de tensiones.



Reemplazando $\sigma(y)$ por su expresión de Navier (3.3-2) y teniendo en cuenta que al medir y desde la fibra baricéntrica la integral de $b(y) \cdot y$ es el momento estático de toda la sección, que es cero con relación a dicha fibra, resulta:

$$(3.3-4) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_g \int_{-c_i}^{+c_s} b(y) dy &= N \\ \chi E \int_{-c_i}^{+c_s} y^2 b(y) dy &= M \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_g &= \frac{N}{A} \\ \chi E &= \frac{M}{I} \end{aligned}$$

siendo A el área e I el momento de inercia de la sección respecto de la fibra baricéntrica.

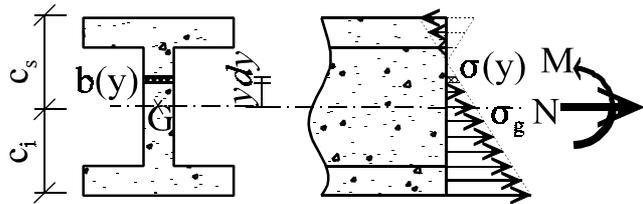


Figura 3.5
Distribución de tensiones de Navier.
Equivalencia estática entre esfuerzos y volumen de tensiones

La súper-fórmula

Volviendo sobre la ecuación (3.3-2), resulta:

$$(3.3-5) \quad \sigma(y) = \frac{N}{A} - \frac{M}{I} y$$

que es la gran fórmula de Navier que nos da el reparto de tensiones normales en una sección sometida a un esfuerzo axial y a un momento flector en los supuestos de que:

- se verifica la hipótesis de Navier,
- el material es hookiano (elástico lineal, homogéneo e isótropo)
 - y resiste lo mismo a tracción que a compresión.

Ejemplo 3.3.1: Material mejor y peor distribuido

a) Obtener las características mecánicas de las secciones de las figuras 3.6a y b.

b) Determinar las tensiones producidas en ellas por un esfuerzo axial de 500 kN de compresión y un momento flector de 200 kN·m.

c) Obtener las resultantes de las tensiones anteriores y comprobar el equilibrio.

a) El área de la primera figura es 0,14 m². La posición del centro de gravedad es a la mitad de la altura. El momento de inercia se obtiene restando al del rectángulo interior el de los dos rectángulos interiores:

$$I = \frac{1}{12} (0,50 \times 0,60^3 - 2 \times 0,20 \times 0,40^3) = 0,006867 \text{ m}^4$$

Para la segunda figura tenemos la misma área $A = 0,14 \text{ m}^2$: la cantidad de material es la misma en ambas secciones pero el momento de inercia resulta muy distinto:

$$I = \frac{1}{12} (0,10 \times 0,60^3 + 2 \times 0,20 \times 0,20^3) = 0,002067 \text{ m}^4$$

es la tercera parte. El material está peor distribuido para resistir la flexión; antes estaba más alejado del centro de gravedad, colocado donde las tensiones de flexión son mayores y así colaboraba más a resistir el momento.

b) Aplicando la fórmula (3.3-4) se obtienen los repartos de tensiones de las figuras 3.6c y d.

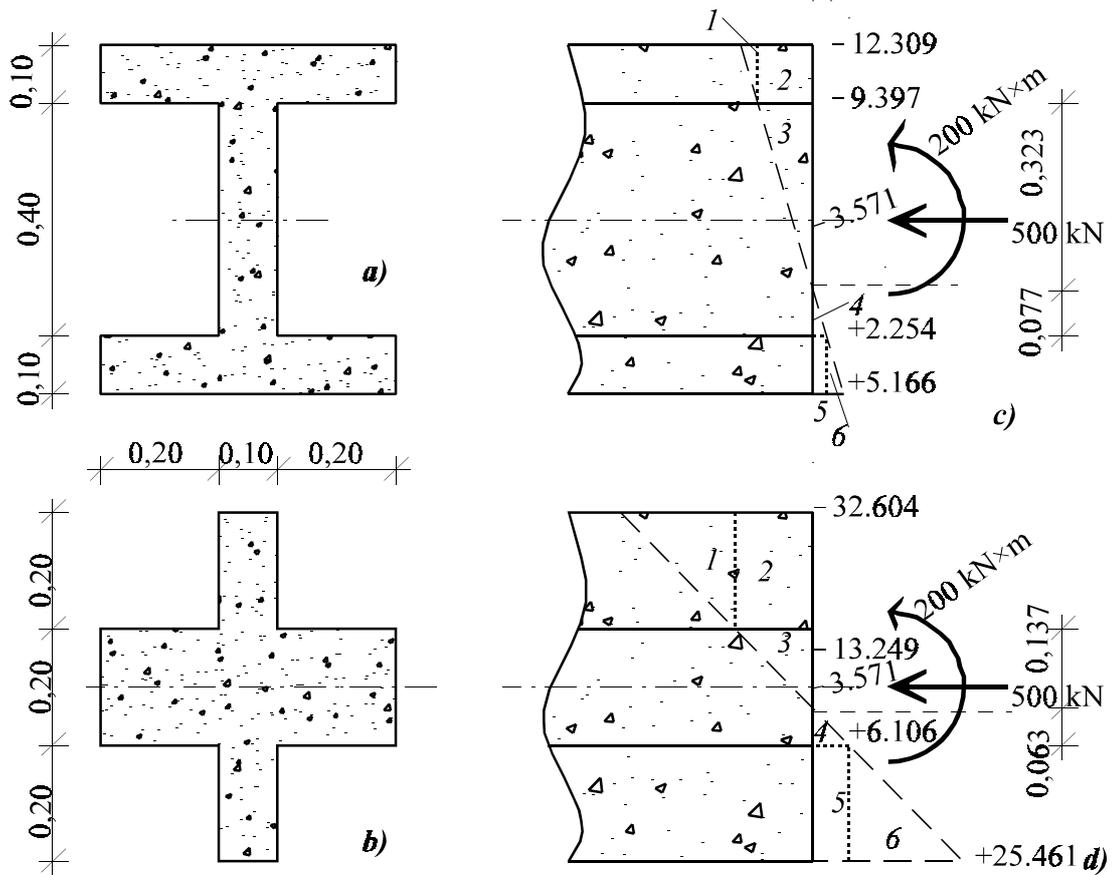


Figura 3.6 Secciones y diagramas de tensiones del ejemplo 3.3.1

c) Conocidas las tensiones calcularemos los esfuerzos integrando numéricamente, como se muestra en las tablas 3.1-2.

Tabla 3.1 Cómputo de los esfuerzos que producen el diagrama de tensiones de la figura 3.6c

N°	$\gamma^{(1)}$	b	h	σ	$N = \gamma b h \sigma$	y_c	$M = -N y_c$
1	1/2	0,50	0,10	-12.309+9.397	-72,800	0,30-0,10/3	+19,413
2	1	0,50	0,10	-9.397	-469,850	0,25	+117,463
3	1/2	0,10	0,323	-9.397	-151,762	0,20-0,323/3	+14,013
4	1/2	0,10	0,077	+2.254	+8,678	-(0,20-0,077/3)	+1,513
5	1	0,50	0,10	+2.254	+112,700	-0,25	+28,175
6	1/2	0,50	0,10	+5166-2.254	+72,800	-(0,30-0,10/3)	+19,413
					-500,234		+199,990

⁽¹⁾ Factor de área de la figura.

Tabla 3.2
Cómputo de los esfuerzos que producen el diagrama de tensiones de la figura 3.6d

N°	$\gamma^{(1)}$	b	h	σ	$N = \gamma b h \sigma$	y_e	$M = -N y_e$
1	1/2	0,10	0,20	-32.604+13.249	-193,550	0,30-0,20/3	+45,162
2	1	0,10	0,20	-13.249	-264,980	0,20	+52,996
3	1/2	0,50	0,137	-13.249	-453,778	0,10-0,137/3	+24,655
4	1/2	0,50	0,063	+6.106	+96,170	-(0,10-0,063/3)	+7,597
5	1	0,10	0,20	+6.106	+122,120	-0,20	+24,424
6	1/2	0,10	0,20	+25.461-6.106	+193,550	-(0,30-0,20/3)	+45,162
					-500,468		+199,996

⁽¹⁾ Factor de área de la figura.

Enseñanzas:

- Hemos aprendido a utilizar la fórmula del reparto plano de tensiones normales o de Navier.
- Hemos aprendido a resolver el problema inverso: obtener los esfuerzos que actúan en la sección a partir del *paquete* de tensiones normales que causan.
 - Observamos cómo las tensiones que actúan más alejadas del c.d.g. de la sección absorben más momento flector, en proporción cuadrática y^2 :
 - ▶ porque las fibras más alejadas reciben mayor tensión (en proporción a y), y
 - ▶ porque su brazo y es igualmente mayor.

Sección no-homogénea

La fórmula de Navier (3.3-4) sólo vale para secciones formadas por un solo material. Si en una sección aparecen dos materiales es preciso aplicar el truco de *homogeneizar*. Sea por ejemplo la sección de la figura 3.7a. En la fibra en que los dos materiales coinciden la deformación debe ser la misma ϵ . Por tanto, en esa fibra la tensión en el material 1 debe ser $\sigma_1 = \epsilon E_1$, y en el material 2, $\sigma_2 = \epsilon E_2 = \sigma_1 E_2 / E_1$. Debemos encontrar, pues, una fórmula alternativa a la (3.3-4) que nos dé en el material 2 tensiones $n = E_2 / E_1$ veces mayores que las obtenidas directamente de (3.3-4).

Para ello hacemos lo siguiente: en lugar de aplicar tensiones n veces mayores en el segundo material, imaginamos que aplicamos *las mismas*, pero sobre un ancho n veces mayor: así mantenemos la cuantía de los esfuerzos. Después corregiremos, haciendo que las tensiones finales sea n veces las dadas por la fórmula (3.3-4) sobre el ancho original.

Ejemplo 3.3.2: Distintos materiales

Determinar la distribución de tensiones normales sobre la sección de la figura 3.7a al ser solicitada por un momento flector de $120 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

La sección homogeneizada con referencia al material 1 se muestra en la figura 3.7b; el ancho del material 2 se ha multiplicado por $n = E_2 / E_1 = 10$. La posición encontrada del c.d.g. se muestra en la propia figura. El momento de inercia de la sección homogeneizada resulta ser $I = 0,003013 \text{ m}^4$. Aplicando la fórmula de Navier (3.3-4) con estos parámetros se obtiene la distribución de tensiones de la figura 3.7c. Las correspondientes a la sección real son las de la figura 3.7d, en la que se han multiplicado por n las tensiones obtenidas para el segundo material.

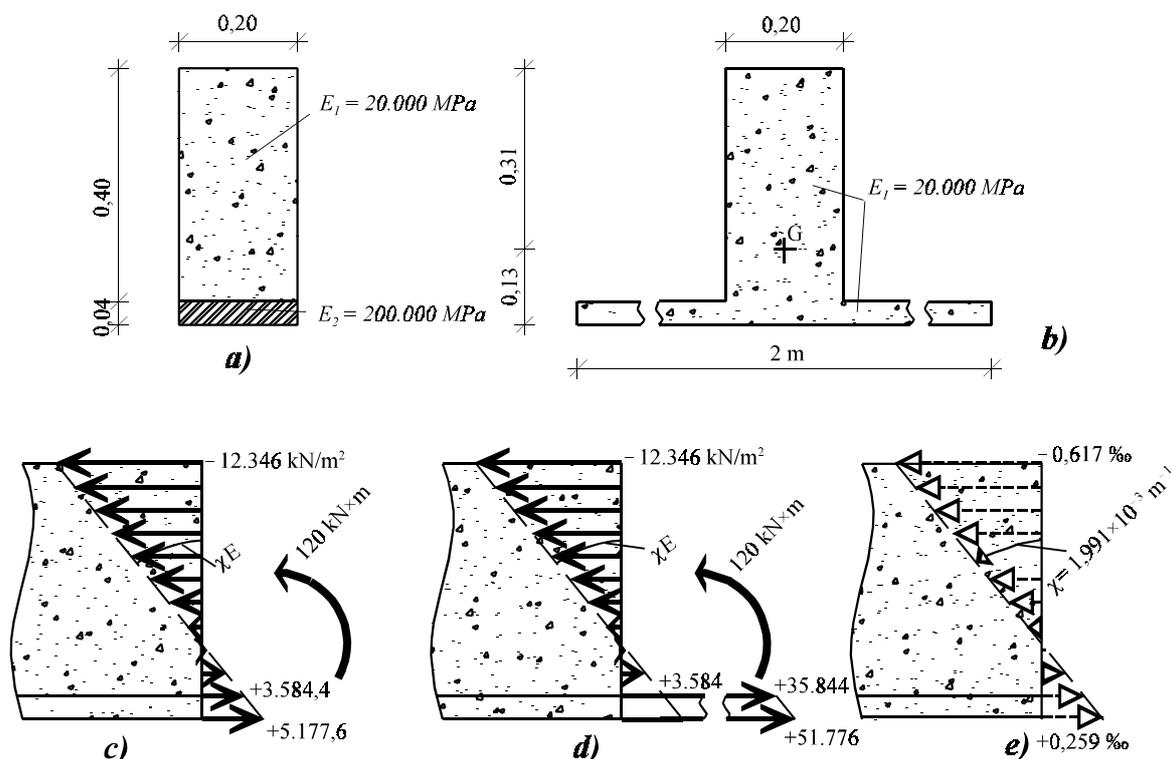


Figura 3.7
Sección no homogénea y diagramas del ejemplo 3.3.2

Comprobación

Para comprobar que la distribución de tensiones de la figura 3.7d es correcta deberemos comprobar lo siguiente:

- que equivale a un axil nulo y a un momento de 120 kN×m (equilibrio), y
- que satisface la hipótesis de Navier. Esto a su vez requiere:
 - que la deformación en la fibra de contacto de los dos materiales sea la misma, y
 - que la inclinación $-\chi$ del diagrama de deformaciones sea la misma en los dos materiales.

Es fácil comprobar que el diagrama de deformaciones de la figura 3.7e, que se obtiene dividiendo por E_1 las tensiones de la figura 3.7c, es congruente también con el diagrama de tensiones de la figura 3.7d. Su inclinación es $\chi = M/EI = 1,991 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ en ambos materiales.

Enseñanzas:

- Este ejemplo nos ha enseñado a homogeneizar una sección compuesta por dos materiales, para poder aplicarle la fórmula de Navier.
- Observamos que:
 - el diagrama de tensiones resulta multilíneo con saltos, pero
 - el diagrama de deformaciones es plano con inclinación única $\chi = M/(EI)_{\text{homogénea}}$, como exige Navier.

Si no valen tracciones...

La poderosa fórmula (3.3-4) de Navier da por hecho que el material es homogéneo y que resiste a tracción igual que a compresión. Sin embargo, si no se arma, el hormigón sólo resiste a compresión. El uso de la fórmula de Navier queda entonces restringido: habrá que buscar una *subsección* que dé resultados satisfactorios.

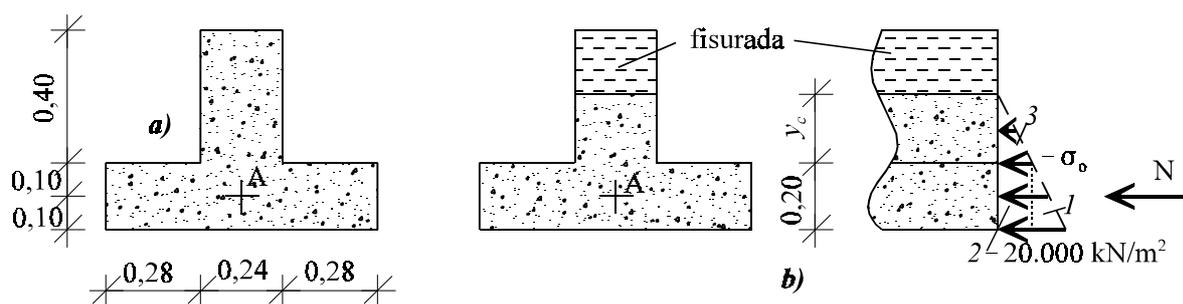


Figura 3.8

Sección que no resiste tracciones del ejemplo 3.3.3

Ejemplo 3.3.3: Con fisuración

El material de la sección en T de la figura 3.8a resiste hasta 20 MPa a compresión, pero no resiste tracciones. Se admite que se fisurará la zona traccionada y que seguirá resistiendo el resto de la sección. Se pide determinar el valor máximo de la fuerza axial de compresión aplicada en el punto A que la sección puede resistir.

Si consideramos la sección completa, determinamos la posición de su c.d.g., referimos a ella los esfuerzos $-N$ y $M = -N \times (c_i - 0,10)$ y calculamos la tensión en la fibra superior, nos saldrá de tracción. Así pues, no nos vale la fórmula.² Tenemos que prescindir de una parte indeterminada de la sección, asignarle un diagrama de tensiones plano (figura 3.8b) y obligar a que se cumplan en él las relaciones de equilibrio (3.3-3). Llamando y_c a la parte del alma que colabora en la *subsección* final, escribimos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{20}{\sigma_o} = \frac{y_c + 0,20}{y_c}$$

$$0,80 \frac{1}{2} (20 - \sigma_o) 0,20 \left(0,10 - \frac{1}{3} 0,20 \right) = 0,24 \frac{1}{2} \sigma_o y_c \left(0,10 + \frac{1}{3} y_c \right)$$

La primera ecuación (con tensiones en MPa) expresa la proporcionalidad en el diagrama de tensiones, y la segunda, que el momento del diagrama de tensiones de la figura 3.8b es nulo: esto es, que el momento respecto de A de la parte 3 es igual y contrario que el de la parte 1. Dividiendo la última ecuación por σ_o en los dos miembros y usando la primera resulta:

$$\frac{0,008}{3} \left(\frac{20}{\sigma_o} - 1 \right) = \frac{0,12}{3} y_c (0,30 + y_c)$$

$$\left(\frac{y_c + 0,20}{y_c} - 1 \right) = 15 y_c (0,30 + y_c)$$

$$15 y_c^3 + 4,5 y_c^2 - 0,20 = 0 \Rightarrow y_c = 0,169 \text{ m}$$

Si y_c hubiera resultado negativo o mayor que 0,40 no nos habría valido; tendríamos que cambiar la hipótesis y considerar que sólo trabaja una parte del ala. Con el valor encontrado de y_c se encuentra $\sigma_o = 9,16 \text{ MPa}$; se vuelve al diagrama de tensiones y se encuentra que los axiles encerrados en cada parte del diagrama son $N_1 = -0,867$, $N_2 = -1,466$, $N_3 = -0,186$. El axil máximo es $\sum N_i = -2,519 \text{ MN} = -2519 \text{ kN}$.

Enseñanzas:

- Hemos visto que no podemos aplicar la fórmula de Navier cuando el material no resiste a tracción igual que a compresión;
 - no hemos intentado buscar una subsección $A(x)$, $I(x)$ en la cual fuera aplicable.
- Hemos tenido que volver a los orígenes de la fórmula de Navier encontrando una *subsección* en la cual:
 - una distribución plana de tensiones sin tracciones
 - resulta estáticamente equivalente a los esfuerzos dados.

² No podemos quedarnos con la parte comprimida e ignorar la parte traccionada porque tal diagrama no estaría en equilibrio con los esfuerzos externos.

Núcleo central

Con frecuencia se desea que una fuerza de compresión aplicada a una sección no le produzca tracciones: en secciones de hormigón en masa, en zapatas de cimentación, etc. Esto se consigue colocando la fuerza dentro del *núcleo central* de la sección. *El núcleo central de una sección es aquella región de la misma en la que se puede colocar una fuerza de compresión sin que produzca tracciones.*

Si sobre una sección colocamos una fuerza N de compresión con una excentricidad e_s por encima de la fibra baricéntrica, corremos el riesgo de producir tracciones en la fibra inferior $y = -c_i$ (figura 3.9a). Para que esto no suceda:

$$-\frac{N}{A} + \frac{N \times e_s}{I} c_i = 0$$

De esta ecuación y su gemela para la excentricidad inferior e_i (figura 3.9b) resultan los extremos del núcleo central:

$$(3.3-6) \quad e_s = \frac{I}{A c_i}$$

$$e_i = \frac{I}{A c_s}$$

Para el rectángulo de dimensiones $b \times h$, el núcleo central se extiende $e_{max} = \pm h/6$ por encima y por debajo del c.d.g. (figura 3.9c) A este mismo resultado se llega también considerando que la posición de la carga N ha de coincidir con el c.d.g. del triángulo de tensiones: $c_i + e_s = 2h/3$.

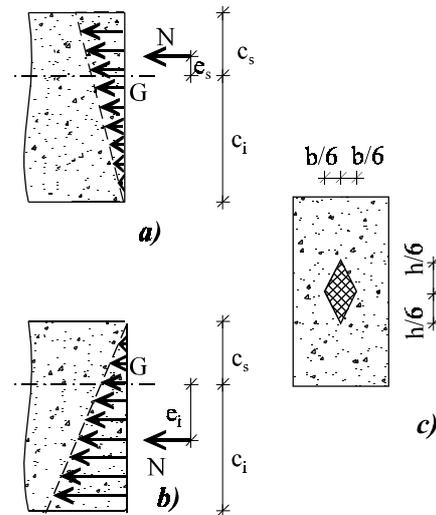


Figura 3.9 Cargas axiales en el borde del núcleo central y núcleo central de una sección rectangular

Pretensado

En vigas de hormigón es frecuente utilizar la técnica del pretensado para evitar la aparición de fuertes tracciones. Esta técnica consiste en dejar embebidos en el hormigón cables de alta resistencia fuertemente traccionados que comprimen el hormigón. Estos cables suelen ser excéntricos, con lo que, además de introducir unas tensiones de compresión que mejoran la capacidad resistente del hormigón, se inducen momentos flectores opuestos a los de la carga dominante, que reducen la flexión de ésta. Ver problema s 3.7.2 y 3.7.5.

Zapatas

La fórmula (3.3-4) de Navier es muy potente y su aplicación puede extenderse a otros campos. Así por ejemplo, si suponemos que un suelo continuo de cimentación se comporta como un conjunto de muelles, todos con la misma rigidez, podemos usar la fórmula de Navier para determinar las tensiones bajo una zapata rígida.

Ejemplo 3.3.4: Zapata

Determinar las tensiones producidas bajo el suelo de una zapata de cimentación de $2 \times 2 \text{ m}^2$ sometida a un axil de compresión de 500 kN y a un momento de $300 \text{ kN} \times \text{m}$ (figura 3.10a).

Si aplicamos la fórmula de Navier nos saldrán tracciones en un extremo de la zapata, tracciones que el suelo no admite. Debemos considerar que sólo trabaja la *subsección* que equilibra las fuerzas mediante compresiones.

La excentricidad de la carga es $e = M/N = 0,6 \text{ m}$. En esta posición (figura 3.10b) hemos de pensar que la carga se encuentra en el borde del núcleo central de una *subsección* rectangular de canto efectivo h_{ef}

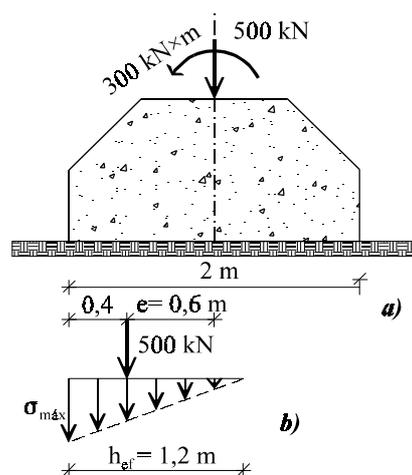


Figura 3.10 Tensiones bajo una zapata rígida

desconocido y 2 m de ancho; o que el c.d.g. del triángulo de tensiones debe quedar bajo la carga excéntrica. De cualquier manera, $h_{ef} = 1,2 \text{ m}$. La tensión máxima bajo la zapata (figura 3.10b) resulta de igualar las fuerzas axiales:

$$2 \frac{1}{2} \sigma_{m\acute{a}x} 1,2 = 500 \text{ kN} \rightarrow \sigma_{m\acute{a}x} = 416,667 \text{ kN/m}^2$$

Enseñanzas:

- La fórmula de Navier se puede extender al cálculo de zapatas rígidas:
 - para ello es preciso que podamos suponer que el terreno se comporta como un segmento de viga:
 - ▶ cada columna elemental de suelo se deforma como un muelle, con independencia de las columnas adyacentes,
 - ▶ todos los muelles con la misma rigidez, pero
 - ▶ sin resistir tracciones.

Secciones discretas

Para aplicar la fórmula de Navier no es necesario que la sección sea continua: puede estar formada por «puntos gordos» espaciados. Es el caso, por ejemplo, de un sólido rígido que cuelgue de varias barras.

Ejemplo 3.3.5: Sección colgada

Determinar la carga que se lleva cada barra del problema 6.3.3 en su primera hipótesis de carga: viga infinitamente rígida de 100 kN de peso propio. Las barras de aluminio son de 2 cm^2 de sección y $E = 0,7 \times 10^5 \text{ MPa}$, y la de acero, de 12 cm^2 de sección y $E = 2,1 \times 10^5 \text{ MPa}$.

Como las barras son de distintos materiales hay que homogeneizar sus áreas: $A_1 = A_3 = 2 \text{ cm}^2$; $A_2 = 12 \times E_2/E_1 = 36 \text{ cm}^2$.³

A continuación determinamos la posición del c.d.g. de la sección discreta de la figura 3.11 y su momento de inercia:

$$A = 40 \text{ cm}^2$$

$$y_G = \frac{36 \times 4 + 2 \times 6}{40} = 3,9 \text{ m}$$

$$I_G = 2 \times 3,9^2 + 36 \times 0,1^2 + 2 \times 2,1^2 = 39,6 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

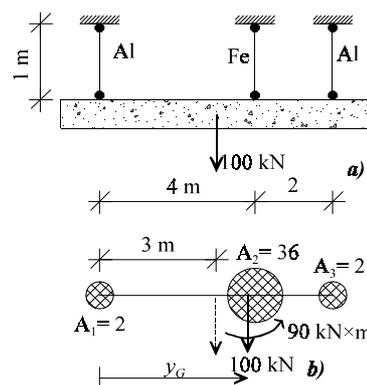


Figura 3.11
Estructura y sección del ejemplo 3.3.5

Con relación al c.d.g. los esfuerzos son $N = 100 \text{ kN}$, $M = 90 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Aplicando Navier las tensiones son:

$$\sigma_1 = \frac{100}{40 \times 10^{-4}} + \frac{90}{39,6 \times 10^{-4}} 3,9 = 113,636 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{100}{40 \times 10^{-4}} - \frac{90}{39,6 \times 10^{-4}} 0,1 = 22,727 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_3 = \frac{100}{40 \times 10^{-4}} - \frac{90}{39,6 \times 10^{-4}} 2,1 = -22,727 \text{ kN/m}^2$$

Los esfuerzos en las barras son $T_i = \sigma_i A_i$: $T_1 = 22,73 \text{ kN}$; $T_2 = 81,82 \text{ kN}$; $T_3 = -4,55 \text{ kN}$. Si en lugar de barras hubiéramos dispuesto cables, tendríamos que rehacer el cálculo prescindiendo del 3º porque no resistiría compresión.

³ Si los cables hubiesen sido de longitudes distintas, habría que haber tenido éstas en cuenta al homogeneizar, para considerar áreas equivalentes con la misma rigidez específica E/L . El factor n no habría sido el cociente de los módulos de elasticidad sino el cociente de las rigideces específicas E/L .

Enseñanzas:

- La fórmula de Navier sirve para resolver algunos problemas *hiperestáticos* en los que es preciso imponer que ciertos alargamientos se mantengan en línea recta.
 - Ello pone de manifiesto que la fórmula de Navier incluye una condición hiperestática. En efecto: además de imponer el equilibrio mediante las igualdades (3.3-3) impone también la condición (3.3-1) en deformaciones.
- Hemos resuelto un problema con una sección discreta, formada por puntos *gordos* en los que se concentran áreas resistentes.
- Además, correspondiendo las áreas a distintos materiales, hemos tenido que homogeneizar la sección.
 - Si las barras hubieran sido de longitudes distintas habríamos tenido que homogeneizar en proporción a sus rigideces específicas E_i/L_i , en vez de hacerlo en según sus E_i 's

Resumen:

- Los esfuerzos axil y flector producen tensiones σ normales a la sección (normal a la directriz).
- Para el cálculo de estas tensiones se precisa:
 - la condición de equilibrio o equivalencia estática entre los esfuerzos N y M y el volumen de tensiones $\sigma(y)$;
 - alguna condición más, que será de compatibilidad en deformaciones como en los problemas hiperestáticos que veremos más adelante.
- La condición adicional de compatibilidad en deformaciones es la hipótesis de Navier que acepta que *las secciones rectas perpendiculares a la directriz de la pieza prismática antes de deformarse se conservan planas y normales a la directriz después de deformarse*:
 - en realidad es una hipótesis simplificativa que reduce a dos los términos de la deformación;
 - de cumplimiento bastante aproximado en piezas prismáticas aún para casos extremos como los de variación térmica no lineal en el canto.
 - Con material hookiano implica que la distribución de tensiones también será plana.
- Las condiciones de equilibrio y distribución plana de tensiones resultan en la potente fórmula:

$$\sigma(y) = \frac{N}{A} - \frac{M}{I}y$$

que exige material lineal y homogéneo:

- vale incluso para secciones discretas
- y hemos aprendido a emplearla en tales casos.
- Hemos aprendido a usar la fórmula de Navier en secciones con más de un material después de *homogeneizar* la sección,
 - amplificando el ancho de cada material i por el factor E_i/E_{ref} .
- Hemos aprendido qué el núcleo central de una sección es aquella parte de la misma en la que podemos colocar una fuerza de compresión sin que se produzcan tracciones en ninguna fibra;
 - y hemos aprendido a determinar los puntos de su borde.
- Hemos aprendido a calcular distribuciones de tensiones producidas por esfuerzos N y M cuando el material no admite tracciones
 - buscando un diagrama plano de tensiones que fuera estáticamente equivalente a los esfuerzos dados.

3.4 Reparto de tensiones tangenciales

Objetivos

De los esfuerzos axil y cortante sabemos ya (i) qué tipo de tensiones producen y (ii) cómo éstas se distribuyen en una sección. Necesitamos ahora saber las mismas dos cosas del esfuerzo cortante.

El esfuerzo cortante Q que frota la sección se repartirá por ella produciendo una distribución de tensiones tangenciales τ_x desconocida todavía (figura 3.12), que habrá de cumplir la condición de equilibrio:

$$(3.4-1) \quad \int_{-c_1}^{c_2} \tau(y) b(y) dy = Q$$

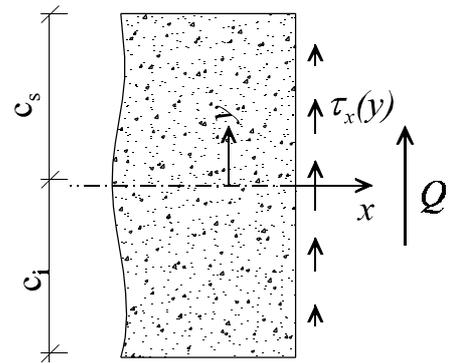


Figura 3.12
Reparto de tensiones tangenciales en una sección

Cometido: hacer el hojalдре monolítico

El efecto de las tensiones tangenciales en una viga es más importante de lo que parece a primera vista. Si para aumentar la resistencia de una viga de sección rectangular $b \times h$ que se nos ha quedado pequeña le colocáramos encima otra de las mismas dimensiones (figura 3.13a), obtendríamos doble resistencia (igual que si la colocáramos al lado). Si, en cambio, desde un principio hubiésemos construido la viga con doble canto (figura 3.13b), la resistencia se habría cuadruplicado (las tensiones se dividen por 4, el momento de inercia se multiplica por 8). La cantidad de material empleado es la misma pero los resultados, muy distintos; en el primero no se percibe la intervención de un ingeniero. ¿De dónde viene la diferencia? ¿Qué es lo que nos da derecho a considerar una sección monolítica y no un hojalдре de muchas láminas independientes?

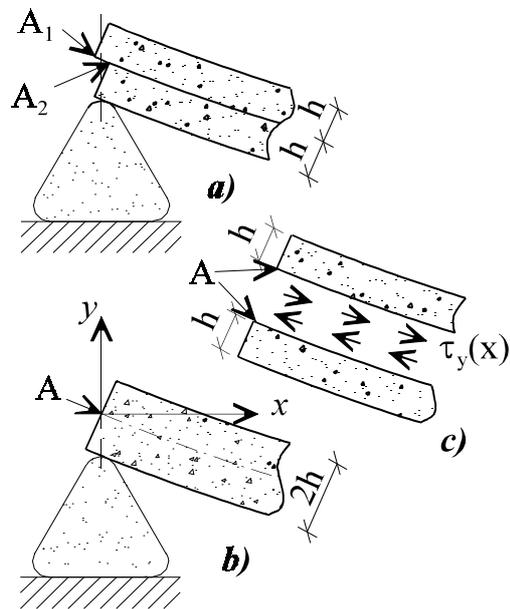


Figura 3.13
Efecto soldadura de las tensiones tangenciales

La diferencia en la forma de trabajar de dos vigas independientes (figura 3.13a, $I = 2 \times bh^3/12$) y dos vigas solidarias trabajando como una monolítica (figura 3.13b, $I = b(2h)^3/12 = 8bh^3/12$) radica en la aparición de tensiones tangenciales τ_y entre dos fibras longitudinales contiguas en la dirección y (figura 3.13c) que evitan los deslizamientos entre ellas que se aprecian en los extremos de las vigas de la figura 3.13a: harán coincidir en A (figura 3.13b) los puntos que de otra manera se habrían ido a A_1 y A_2 (figura 3.13a). Las tensiones tangenciales aseguran que las láminas de la sección se deformen solidariamente, como manda Navier, y no como un hojalдре de capas inconexas:

¡Las τ 's son cuatrillizas!

Pero, ¡alto ahí!, habrás estado tentado de decir. ¿Qué relación hay entre las τ 's que aparecen en la figura 3.12, que actúan sobre un plano perpendicular al eje x de la viga, y las de la figura 3.13c, que actúan sobre un plano perpendicular al eje y ? Pues no son primas sino hermanas cuatrillizas.

En efecto: hasta ahora las tensiones normales (como los esfuerzos) actuaban en pares de gemelas opuestas: si en la cara cuya normal exterior era el vector $+x$ llevaban el sentido de éste, en la cara cuya normal exterior era el $-x$, llevaban el de este otro, y viceversa (figura 3.14a); no podían darse la una sin la otra. El equilibrio de no girar en torno al eje z del *dato* de la figura 3.14b, sobre el que actúan tensiones tangenciales τ_x (en las caras normales al eje x), exige que sobre él actúen también las τ_y y tengan el mismo valor: $\tau_y = \tau_x$.

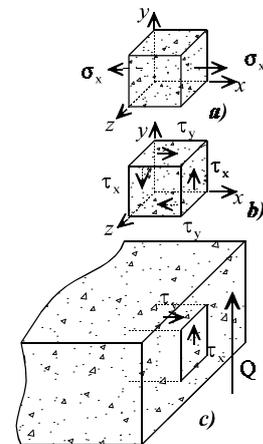


Figura 3.14
Tensiones σ mellizas y τ cuatrillizas

En palabras: *las tensiones tangenciales que actúan sobre planos perpendiculares apuntando hacia (o alejándose de) la arista común son iguales*. Por eso, determinando las τ_y 's de la figura 3.13c conoceremos sus iguales las τ_x 's de la figura 3.12 (figura 3.14c).

Las τ 's se determinan por equilibrio

Para conocer el reparto de las σ 's en la sección no nos bastó el equilibrio (3.3-3): necesitamos una condición adicional, que fue la de Navier. Para determinar las tensiones tangenciales, por el contrario, nos bastará con el equilibrio: será una distribución isostática.

Las tensiones tangenciales entre dos láminas de la rebanada a la altura y aparecen como consecuencia de que la parte de rebanada por encima de y es empujada hacia la izquierda por una fuerza mayor que hacia la derecha (figura 3.15): $F(y)$ proviene del momento flector M , $F+dF$, del $M+dM$. El equilibrio exige (figura 3.15b):

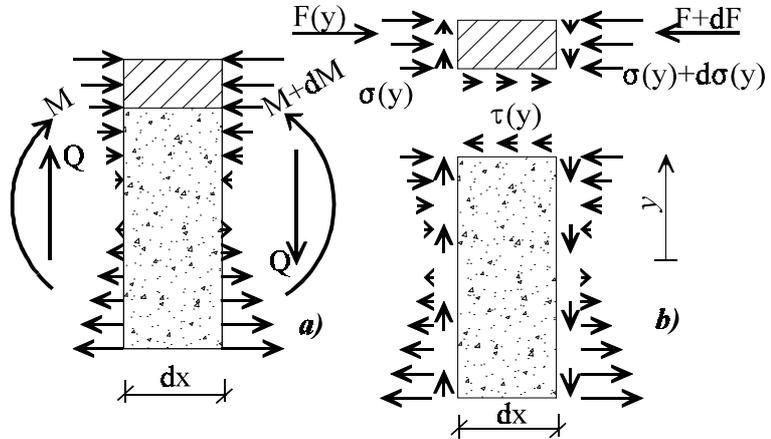


Figura 3.15 Las tensiones tangenciales tienen su origen en el desequilibrio de las tensiones normales

$$\tau(y)b(y)dx = dF = \int_y^{c_y} d\sigma(y)b(y)dy = \frac{-dM}{I} \int_y^{c_y} yb(y)dy = \frac{-dM}{I} \mu(y)$$

siendo:

$$(3.4-2) \quad \mu(y) = \int_y^{c_y} b(y)y dy$$

el momento estático del área de la sección por encima de la fibra y . Como quiera que según (2.5-1c) $Q = -dM/dx$:

$$(3.4-3) \quad \tau(y) = \frac{Q \mu(y)}{I b(y)}$$

que es la fórmula buscada. En realidad no hemos hecho uso de la condición de equilibrio (3.4-1) de partida, sino de otra. Dejamos para el alumno motivado el (nada trivial) ejercicio de demostrar que aquella también se cumple.

Una pregunta maliciosa puede ser: ¿influye la hipótesis de deformaciones de Navier en (3.4-3)? La respuesta es sí: aunque la hayamos obtenido de una mera condición de equilibrio, en él han intervenido las tensiones normales dadas por la fórmula (e hipótesis) de Navier (3.3-5).

Limitaciones

La fórmula (3.4-3) sólo vale para sección constante y axil constante, porque en dF no hemos considerado ni la variación de $N(x)/A(x)$ ni la de $I(x)$. Para casos complicados lo mejor es acudir al concepto original de que las $\tau(y)$ aparecen por la diferencia de empuje σ por encima de la lámina y entre dos caras separadas una distancia finita Δx (ver ejemplo 3.4.1).

Sección rectangular

La parte de sección por encima de la fibra y tiene de área $b(h/2 - y)$ (figura 3.16a) y su centro de gravedad dista de la fibra baricéntrica $y_G = y + (h/2 - y)/2 = (h/2 + y)/2$. Así pues:

$$\mu(y) = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

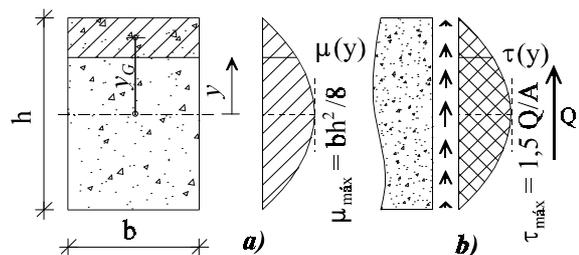


Figura 3.16 Distribución cuadrática de $\tau(y)$ en una sección rectangular

$$\tau(y) = \frac{Q}{\frac{1}{12}h^3b} \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = 1,5 \frac{Q}{A} \left[1 - 4 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]$$

La distribución de $\tau(y)$ que resulta es una parábola de 2º grado con su máximo en la fibra baricéntrica $y=0$, de valor $\tau_{m\acute{a}x} = 1,5Q/A$ (figura 3.16b).

Salto en las secciones en T; τ 's en las alas

La expresión $\mu(y)$ tiene siempre el aspecto parabólico de la figura 3.16a, con su máximo en $y=0$. Sin embargo, cuando la sección presenta discontinuidades en el ancho $b(y)$, éstas se acusan en el cociente $\mu(y)/b(y)$, que es la parte variable en la fórmula (3.4-3). Por eso, las distribuciones de tensiones tangenciales presentan el aspecto de las figuras 3.17a y b.

En las secciones verticales de las alas de una sección en T (ver sección 2-2 en figuras 3.17a,b) también aparecen tensiones tangenciales en sentido horizontal, por la misma causa que en las secciones horizontales aparecen con sentido vertical, y se calculan con la misma fórmula, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4.1: τ 's bidireccionales

En la viga biapoyada de la figura 3.18a, cuya sección en doble T se muestra en la figura 3.18b, sometida a la sobrecarga uniforme indicada, vamos a determinar: a) Las tensiones tangenciales en las fibras 1, 2 y 3 de la sección sobre el apoyo A. b) La ley de variación de τ sobre la fibra 1 entre A y C. c) La integral de estas τ 's que debe ser igual a la diferencia de compresiones en la cabeza superior entre ambas secciones.

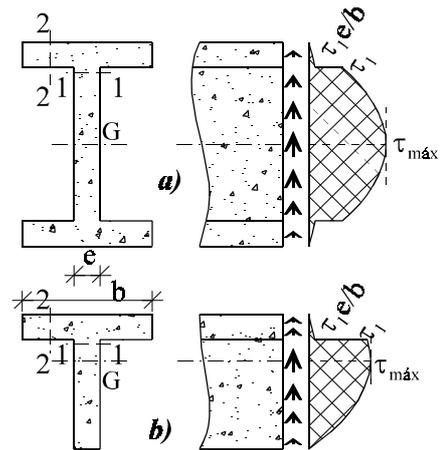


Figura 3.17
Distribuciones de $\tau(y)$ en secciones T y doble-T

a) La ley de esfuerzos cortantes se muestra en la figura 3.18c. Los valores buscados son:

$$\mu_1 = 0,50 \times 0,10 \times \left(0,20 + \frac{0,10}{2} \right) = 0,0125 \text{ m}^3$$

$$\mu_2 = \mu_1 + 0,20 \times 0,10 \times \frac{0,20}{2} = 0,0145 \text{ m}^3$$

$$\mu_3 = 0,20 \times 0,10 \left(0,20 + \frac{0,10}{2} \right) = 0,005 \text{ m}^3$$

$$\tau_1(A) = \frac{100}{0,006867} \frac{0,0125}{0,10} = 1820 \text{ kN/m}^2$$

$$\tau_2(A) = \tau_1(A) \frac{\mu_2}{\mu_1} = 2112 \text{ kN/m}^2$$

$$\tau_3(A) = \frac{100}{0,006867} \frac{0,005}{0,10} = 728 \text{ kN/m}^2$$

Hemos obtenido la τ , en la parte estrecha de la fibra 1, que es donde es mayor; en la parte ancha es 1/5 de ese valor. La distribución de tensiones tangenciales sobre la sección del apoyo se muestra en la figura 3.18d.

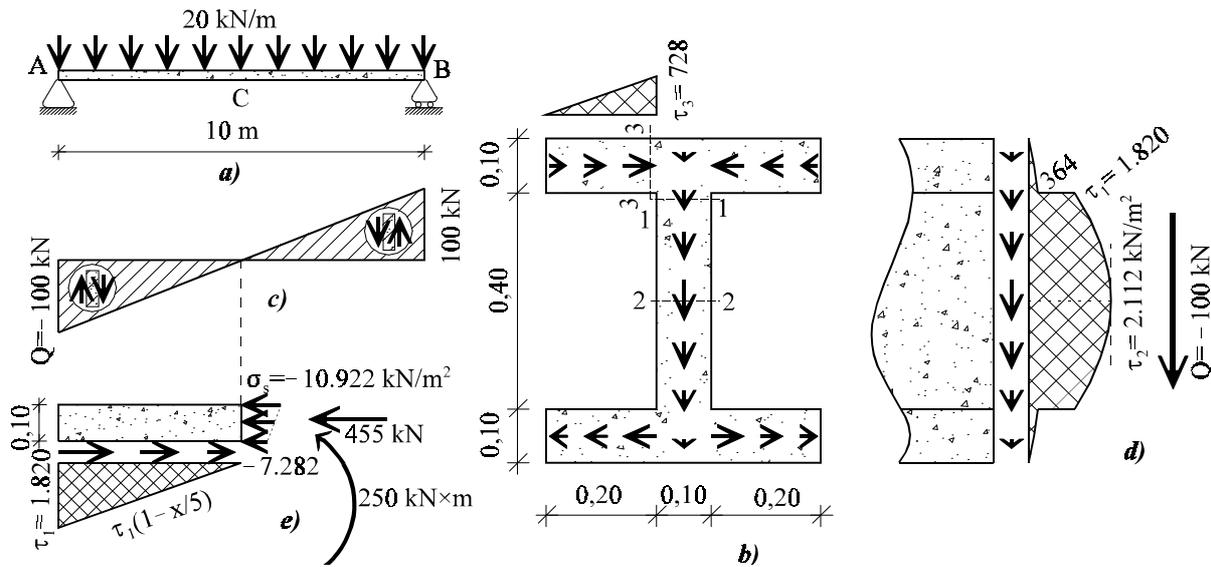


Figura 3.18 Estructura y diagramas del ejemplo 3.4.1

b) Las leyes de variación de las $\tau_i(x)$'s son afines a la de $Q(x)$, por consiguiente:

$$\tau_1(x) = 1820 \left(1 - \frac{x}{5} \right)$$

$$\tau_3(x) = 728 \left(1 - \frac{x}{5} \right)$$

Hay que notar una diferencia entre la τ_1 y la τ_3 que actúan en el plano de la sección: la primera está orientada verticalmente y la segunda, horizontalmente (figura 3.18b)

c) En la sección central $M_c = 250 \text{ kN}\cdot\text{m}$. La tensión normal en la fibra superior es $\sigma_s = -10.922 \text{ kN/m}^2$, y en la fibra 1, $\sigma_1 = -7.282 \text{ kN/m}^2$. La cabeza de la sección central sufre 455 kN de compresión; cada ala se lleva 182 kN. La misma cabeza en la sección A no sufre nada. Las diferencias tendrán que ser equilibrada por las tensiones tangenciales de las fibras 1 y 3 entre A y C (ver figura 3.18e):

$$\int_A^C 0,10 \tau_1(x) dx = 0,1 \times 1820 \int_0^5 \left(1 - \frac{x}{5} \right) dx = 0,10 \times \frac{1}{2} 1820 \times 5 = 455 \text{ kN}$$

$$\int_A^C 0,10 \tau_3 dx = 182 \text{ kN}$$

valor que coincide con el calculado a partir de las tensiones normales.

Enseñanzas:

- Hemos aprendido a calcular las tensiones tangenciales sobre cualquier fibra de una sección.
- Hemos comprobado que en las discontinuidades del ancho de la sección transversal se producen discontinuidades semejantes en el valor de las τ 's.
- Hemos escrito la ley de variación de tensiones tangenciales sobre una fibra paralela a la directriz, que es afín a la del esfuerzo cortante.
- Hemos comprobado que las tensiones tangenciales equilibran la diferencia de empujes normales entre dos secciones por encima (o por debajo) de la fibra correspondiente.
- Hemos notado que en las alas aparecen también tensiones tangenciales orientadas según la horizontal.

Caso patológico: la sección triangular

Ningún proyectista sensato ha diseñado jamás una viga con sección triangular para resistir a flexión.⁴ Pero como tiene algunas dificultades de cálculo y resultados "parajódicos"... cae a menudo en examen.

Llamando z a la distancia desde el vértice (figura 3.19a) $\mu(z)/b(z)$ resulta como sigue:

$$b(z) = b \frac{z}{h}$$

$$\mu(z) = \frac{1}{2} z b \frac{z}{h} \left(\frac{2}{3} h - \frac{2}{3} z \right) = \frac{b h^2}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right)$$

$$\frac{\mu(z)}{b(z)} = \frac{h^2 z}{3 h} \left(1 - \frac{z}{h} \right)$$

El máximo se tiene en $z = 1/2 h$ y vale $h^2/12$, con lo que resulta:

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{b h^3} \frac{h^2}{12} = 1,5 \frac{Q}{A}$$

que en la sección triangular la máxima tensión tangencial se produce en la fibra a la mitad de la altura, y vale 1,5 veces el valor medio.

Sección circular

Tampoco es posible predecir dónde se hallará la tensión tangencial máxima en una sección circular (figura 3.20) porque su ancho disminuye al alejarnos de la fibra media (si bien con decrementos de segundo orden al principio):

$$\begin{aligned} \mu(y_o) &= \int_{y_o}^R b(y) y dy = \\ &= \int_{\varphi_o}^{\pi/2} (2R \cos \varphi) (R \sin \varphi) R \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{3} R^3 \cos^3 \varphi_o \end{aligned}$$

$$\tau(y_o) = \frac{Q}{\pi R^4} \frac{1}{3} R^2 \cos^2 \varphi_o = \frac{4Q}{3A} \left[1 - \left(\frac{y_o}{R} \right)^2 \right]$$

El máximo se encuentra en la fibra baricéntrica (como si se tratara de una sección respetable⁵) y vale 4/3 del valor medio.

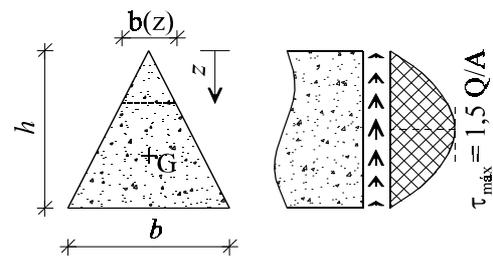


Figura 3.19
Tensiones tangenciales en la sección triangular

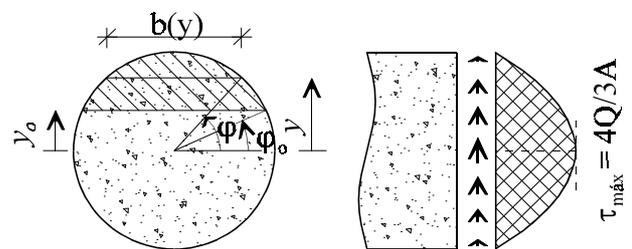


Figura 3.20
Tensiones tangenciales en la sección circular

⁴ Los insensatos, sí: tu autor amigo tuvo que calcular una vez una viga triangular para soportar el trampolín de una piscina. Tenía, además, el vértice hacia abajo, en la zona de compresiones, con lo que le faltaba hormigón en donde éste hubiera trabajado a placer y le sobraba allí donde sólo hacía pesar. (Y con el peligro añadido de darte un coscorrón con la arista si pasabas por debajo). Ideas de arquitectos...

⁵ No es adecuada para flexión porque la mayor parte del material se concentra en las proximidades de la fibra neutra, donde trabaja poco.

Resumen:

- Las tensiones tangenciales provienen de los esfuerzos:
 - cortante y
 - momento torsor (no estudiado aquí)
- Las tensiones tangenciales consiguen que las secciones trabajen como un manojo de fibras solidarias en vez de como un hojaldre de láminas independientes.
- Aunque las tensiones tangenciales son las que fuerzan el cumplimiento del hiperestatismo de la hipótesis de Navier, su cálculo se obtiene isostáticamente considerando solamente el equilibrio de las porciones de sección que reciben las tensiones normales (que marca Navier).
- La fórmula de (3.4-3) de reparto es sólo válida para sección constante y axil constante. En ella:
 - $\mu(y)$ es el momento estático del área de la sección que está por encima (o por debajo) de la fibra y ;
 - su máximo se encuentra *siempre* en la fibra baricéntrica.
- En las secciones que un proyectista sensato utiliza para flexión, la máxima tensión tangencial se encuentra en la fibra baricéntrica; sin embargo:
 - en secciones extrañas se localizará allí donde $\mu(y)/b(y)$ sea máximo;
 - en la sección circular también se encuentra en la fibra baricéntrica, pero
 - en el triángulo se encuentra a la mitad de la altura.
- En las alas, el gradiente de flexión produce tensiones tangenciales en dirección horizontal que se calculan de la misma manera que las del alma, pero
 - varían linealmente del borde al centro (no, parabólicamente).
- Es frecuente decir $\tau_{m\acute{a}x} = \beta \cdot \tau_{med}$ siendo $\tau_{med} = Q/A$ la tensión tangencial media, que se obtendría repartiendo el cortante uniformemente en la sección, y β un factor que depende de la sección:
 - $\beta = 1,5$ para la sección rectangular
 - $\beta = 1,33$ para la sección circular
 - $\beta = 1,5$ para la sección triangular isósceles.

(No se debe confundir este factor de tensiones con el que da el área efectiva a cortante de una sección $A_Q = \gamma \cdot A$, que lo piden los programas de cálculo que incluyen la deformación de la viga por esfuerzo cortante. Aquí nunca la incluiremos.)

3.5 Deformaciones mecánicas

Paquetes de deformaciones

Hemos visto (i) que no puede haber tensiones sin deformaciones y (ii) que el reparto de tensiones de Navier se obtiene con la hipótesis de que las secciones planas se mantienen planas. Queremos saber ahora qué deformaciones producen los esfuerzos axil, flector y cortante, pero no fibra a fibra sino de la sección completa, considerada como un paquete. Éstas son, de acuerdo con (3.3-1), $\epsilon(y) = \epsilon_g - \chi y$. El paquete de deformaciones depende de sólo dos términos: ϵ_g y χ .

El axil sólo produce alargamiento

De acuerdo con (3.1-3) $\epsilon_g = \sigma_g/E$, y de acuerdo con (3.3-4a) $\sigma_g = N/A$. Por consiguiente:

$$(3.5-1a) \quad \epsilon_g = \frac{N}{EA}$$

El esfuerzo axil produce un paquete de deformaciones que consiste en una alargamiento uniforme de todas las fibras de la sección $\epsilon(y) = \epsilon_g = N/A$, como lo haría un calentamiento uniforme (figura 3.21a).

El momento flector sólo produce curvatura

El otro término de la deformación es χ y de acuerdo con (3.3-4b):

$$(3.5-1b) \quad \chi = \frac{M}{EI}$$

Que χ representa la curvatura de la sección lo obtenemos de la figura 3.22b. Si tenemos una segmento de viga de longitud unidad sometida a un momento flector uniforme, la fibra inferior se alargará $u_i = 1 \times \epsilon_i$ y la superior se acortará $u_s = 1 \times \epsilon_s$. Para que cada fibra alcance distinta longitud, la pieza se tendrá que curvar; si la curvatura es uniforme se convertirá en un arco de circunferencia de radio R : las prolongaciones de las caras se encontrarán a una distancia R de manera que $R \times \chi = 1$, longitud del segmento de viga. Por consiguiente $\chi = 1/R$ representa la inversa del radio de curvatura, es decir, la curvatura de la sección.

El momento flector produce un paquete de deformaciones $\epsilon(y) = -My/EI$, que consiste en una curvatura de la rebanada de valor $\chi = M/EI$. Recordemos que la curvatura es un giro distribuido por unidad de longitud $\chi = d\theta/dx$.

El cortante...

En las piezas prismáticas que estudia la R.M., la deformación por esfuerzo cortante es mucho menor que la producida por los otros dos esfuerzos. Es necesario llegar a vigas de gran canto para que la influencia del cortante se deje sentir. Déjame decirte, no obstante, para fortalecer tu cultura, que el esfuerzo cortante produce un deslizamiento o deformación angular como se muestra en la figura 3.22. Con esta deformación podemos (a duras penas) mantener la hipótesis de que las caras se mantienen planas, pero no, la de que se mantienen normales a la directriz. Otro día calcularemos la expresión del deslizamiento angular γ por métodos energéticos.

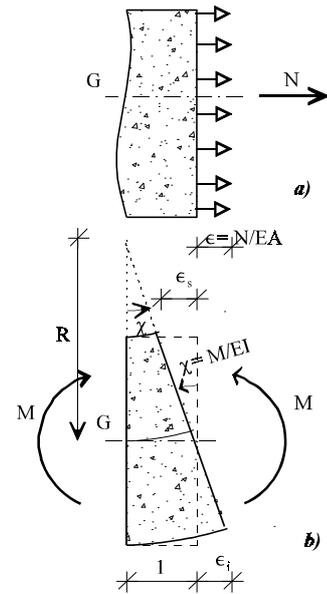


Figura 3.21
Deformaciones por axil y por flector

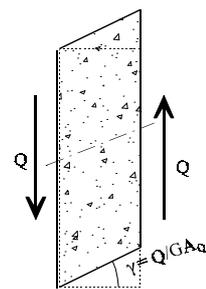


Figura 3.22
Deformación por cortante

Resumen:

- Cada esfuerzo produce su deformación particular, que se calcula de manera independiente:
 - el axil, una deformación longitudinal $\epsilon = N/EA$ igual en todas las fibras;
 - el flector, una curvatura $\chi = M/EI$;
 - en R.M. se desprecia la deformación por cortante, que es un deslizamiento $\gamma = Q/GA_0$ que no permite que la sección deformada se mantenga normal a la directriz (ni tampoco plana, en un cálculo riguroso)

3.6 Deformaciones térmicas

Tensiones, casi sólo mecánicas

Las tensiones proceden únicamente de los esfuerzos generados por las cargas exteriores. No existen tensiones térmicas a sumar a las mecánicas, aunque en estructuras hiperestáticas encontraremos tensiones producidas por cargas exteriores (reacciones) que tienen su origen en una dilatación. *Las tensiones aparecen sólo para equilibrar a los esfuerzos.* (Hay una excepción que veremos en seguida: cuando una sección sufre un calentamiento que varía sobre el canto de forma no lineal, para mantener la hipótesis de Navier de deformación plana, nos aparecerán unas ciertas tensiones internas de resultante nula, debidas —otra vez— al hiperestatismo interno de la sección.)

Deformaciones, mecánicas y térmicas

Las deformaciones, en cambio, pueden provenir de dos causas: esfuerzos y/o variaciones térmicas. Las deformaciones reales $\epsilon(y)$ y generalizadas, ϵ_g y χ , producidas por los esfuerzos las hemos estudiado en el apartado anterior. Aquí estudiaremos las deformaciones térmicas y lo haremos en dos pasos según su causa térmica sea: (i) lineal o (ii) no lineal sobre el canto. (A lo ancho siempre supondremos que la variación térmica es uniforme.)

ϵ_g y χ por $\Delta T(y)$ lineal

Cada fibra y de una sección se dilata $\epsilon(y) = \alpha \Delta T(y)$, siendo α el coeficiente de dilatación lineal del material. Si una rebanada de una viga se calienta ΔT_s en la cara superior, ΔT_i en la cara inferior y valores proporcionales, lineales, en las fibras intermedias, todo irá bien: mantendrá sus caras planas espontáneamente, como manda Navier, como las de la figura 3.23. El paquete de deformaciones $\epsilon(y)$ quedará determinado por las deformaciones generalizadas ϵ_g y χ , que resultan⁶:

$$(3.6-1) \quad \begin{aligned} \epsilon_g &= \alpha \Delta T_g \\ \chi &= -\alpha \frac{\Delta T_s - \Delta T_i}{h} \end{aligned}$$

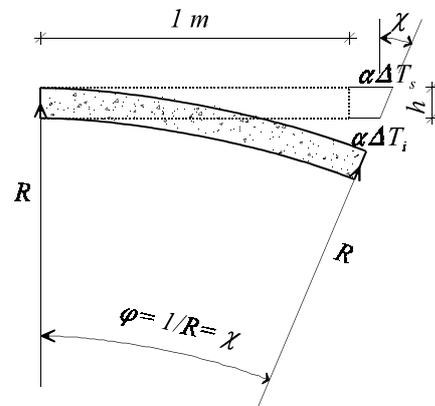


Figura 3.23
Deformaciones por incremento térmico lineal

Sentido físico

No pierdas nunca el sentido físico:

- un incremento de temperatura siempre alarga una viga;
 - si el incremento es mayor por arriba que por abajo, la viga se alargará más por arriba, tendrá que adquirir curvatura negativa, con la concavidad hacia abajo (figura 3.23).

ϵ_g , χ y $\sigma(y)$ por $\Delta T(y)$ no lineal

Consideraremos ahora el caso más general de gradiente térmico, aquél que no es lineal a lo alto del canto. Y en lugar de estudiar un caso teórico, adquiriremos los conocimientos necesarios mediante el siguiente:

Ejemplo 3.6.1: Variación térmica parabólica sobre el canto

Queremos saber qué deformaciones y tensiones puede sufrir la sección rectangular de la figura 3.24a, con material $E = 2 \times 10^4$ MPa y $\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, sometida al gradiente térmico parabólico de la figura 3.24b, que va de $\Delta T_i = +10^\circ\text{C}$ en la cara inferior a $\Delta T_s = +60^\circ\text{C}$ en la superior, pasando por un valor de $\Delta T_g = +40^\circ\text{C}$ en la fibra media.

La variación de temperatura es $\Delta T(y) = 40 + 100y - 80y^2$, para y en m, y las deformaciones correspondientes serán $\epsilon(y) = \alpha \Delta T(y)$. Estas deformaciones (homotéticas del ΔT de la figura 3.24b) no cumplen la hipótesis de Navier de deformación plana y no van a ser toleradas. Tendremos que introducir tensiones internas que reduzcan este estado de deformación a uno plano.

⁶ Algunos alumnos prefieren imaginar que la sección así calentada se encuentra sometida a un axil ficticio de valor $N_{fic} = \alpha \Delta T_g EA$ y a un momento flector ficticio de valor $M_{fic} = -\alpha EI(\Delta T_s - \Delta T_i)/h$. El peligro surge de olvidar que estos esfuerzos son ficticios y no se pueden sumar con los reales. Además, tu autor amigo no entiende qué ventajas aporta el partir de unas deformaciones impuestas para calcular unos esfuerzos ficticios con los cuales recalcular luego las deformaciones de partida...

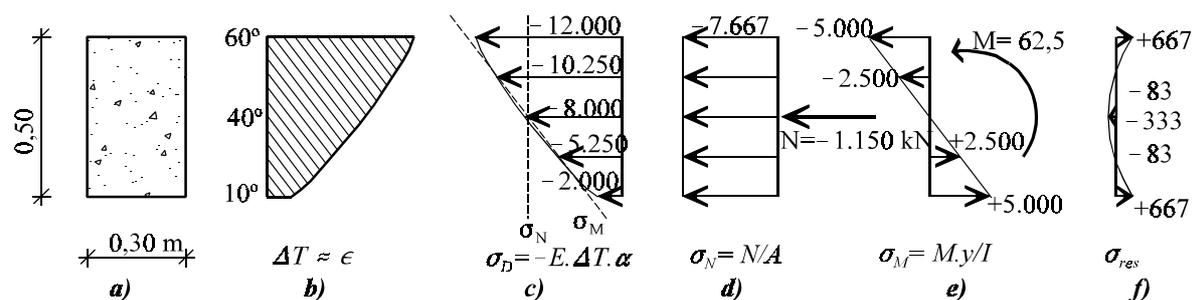


Figura 3.24

Diagramas de temperaturas y tensiones con variación no lineal sobre el canto

Método del dictador

Imaginemos que nuestra perversa intención fuera la de no permitir ninguna deformación térmica. De alguna manera tendríamos que introducir en la sección las tensiones «del dictador» que anularan toda deformación:

$$(3.6-2) \quad \sigma_D(y) = -E\alpha \Delta T(y)$$

Este estado tensional se dibuja en la figura 3.24c. Encerrados en este diagrama encontramos los siguientes esfuerzos (recuerda 3.3-3):

$$(3.6-3) \quad N = \int_{-c_i}^{c_s} \sigma_D(y) b(y) dy = -1.150 \text{ kN}$$

$$(3.6-4) \quad M = - \int_{-c_i}^{c_s} \sigma_D(y) b(y) y dy = 62,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Diagrama autoequilibrado

Pero hay algo más en (3.6-2) que no «cabe» en (3.6-3)+(3.6-4): su diagrama de tensiones es cuadrático y no entra entero en los dados por (3.6-3) y (3.6-4), lineales (figuras 3.24d,e). Aquí hay algo más que un axil y un momento: hay que considerar una nueva componente del diagrama, que es la de la figura 3.24f, dada por la diferencia (3.6-2)–(3.63)–(3.6-4):

$$(3.6-5) \quad \sigma_{res}(y) = \sigma_D(y) - \frac{N}{A} - \frac{M}{I}y$$

Este diagrama de tensiones (figura 3.24f) no lleva encerrado nada de axil y nada de momento, porque en (3.6-5) hemos extraído todo lo que de ellos había en (3.6-2): es lo que se llama un *diagrama de tensiones autoequilibrado*.

Si escribimos la fórmula anterior de esta otra manera:

$$(3.6-6) \quad \sigma_D(y) = \frac{N}{A} + \frac{M}{I}y + \sigma_{res}(y)$$

podemos interpretarla como un desarrollo en serie de Taylor de las tensiones del dictador, con los términos constante, lineal y el término residual. Nos dice que el diagrama de tensiones del dictador se pueden considerar formado por la superposición de tres diagramas:

- el de un esfuerzo axil (3.6-3) (figura 3.24d)
- el de un momento flector (3.6-4) (figura 3.24e)
- el residual (3.6-5) (figura 3.24f), que —podemos creer— surge espontáneamente de la sección para cumplir la hipótesis de Navier.

Liberación

Ahora bien, es posible que el dictador no disponga de los apoyos necesarios para mantener las tensiones (3.6-6) que impiden todo intento de deformación; en cuyo caso tendrá que liberar algunas. Puede suceder lo siguiente:

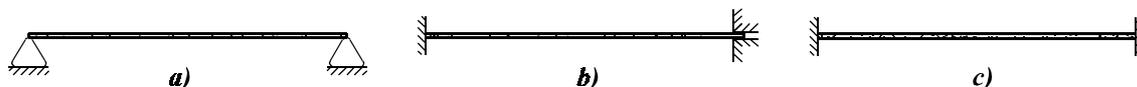


Figura 3.25
Los hiperestatismos dan algún apoyo o todo al «dictador»

- En ninguna *estructura isostática* va a disponer de apoyos que le proporcionen ni axil ni momento; tendrá que liberar ambos esfuerzos:
 - quedándose con: $\sigma(y) \equiv \sigma_D(y) - \frac{N}{A} - \frac{M}{I}y = \sigma_{res}(y)$
 - y permitiendo el alargamiento $\epsilon_g = -\frac{N}{EA} = 0,383 \times 10^{-3}$ y la curvatura $\chi = -\frac{M}{EI} = -1 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$.
- En estructuras *hiperestáticas* tal vez disponga de apoyos que le permitan mantener total o parcialmente los esfuerzos:
 - si sólo parcialmente, se procede como en el cálculo general de hiperestáticas que veremos en el capítulo 6;
 - si dispone de apoyos que le proporcionen el axil (3.6-3), como sucede en el caso de la figura 3.25a, liberará sólo las tensiones del momento (de la figura 3.24e):
 - ▶ quedándose con: $\sigma(y) \equiv \sigma_D(y) - \frac{M}{I}y = \frac{N}{A} + \sigma_{res}(y)$,
 - ▶ y permitiendo una curvatura: $\chi = -\frac{M}{EI} = -1 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$;
 - si dispone de apoyos que le proporcionen el momento (3.6-4), como en el caso de la figura 3.25b, se acorta el cálculo general liberando las tensiones del axil (de la figura 3.24d):
 - ▶ quedándose con: $\sigma_D(y) - \frac{N}{A} = \frac{M}{I}y + \sigma_{res}(y)$
 - ▶ y permitiendo un alargamiento de todas las fibras: $\epsilon_G = -\frac{N}{EA} = 0,383 \times 10^{-3}$;
 - si «el dictador» dispone de ambos tipos de apoyos, como en el caso de la figura 3.25c, se quedará con las tensiones de (3.6-2) y no liberará deformación alguna: el cálculo hiperestático está hecho.

Observa que las deformaciones obtenidas al liberar son de alargamiento positivo y curvatura negativa, como manda el sentido físico de la dilatación de la figura 3.24b. En el cálculo de las magnitudes te podrás equivocar; en el signo, no serás ingeniero si yerras.

Deformaciones, siempre planas

No te olvides jamás de que *el diagrama de deformaciones final tiene que ser plano* (para eso hemos montado todo este tinglado). Al diagrama $\epsilon_D(y) = \sigma(y)/E$ de las tensiones que nos hayan quedado hay que sumarle las deformaciones térmicas $\epsilon_T(y) = \alpha \Delta T(y)$. Lo calculas con más facilidad a partir de los diagramas de deformaciones liberadas $\epsilon(y) = \epsilon_g - \chi \cdot y$ que correspondan.

Enseñanzas:

- Cuando una sección de una viga *isostática* sufre una variación de temperatura no lineal en el canto:
 - sufre deformaciones siempre lineales $\epsilon(y) = \epsilon_g - \chi \cdot y$:
 - ▶ alargamiento:

$$(3.6-7) \quad \epsilon_g = \frac{\alpha}{A} \int_{-c_1}^{c_2} \Delta T(y) b(y) dy$$
 - ▶ curvatura:

$$(3.6-8) \quad \chi = -\frac{\alpha}{I} \int_{-c_1}^{c_2} \Delta T(y) b(y) y dy$$
 - y tensiones internas *autoequilibradas*, sin resultante, que la propia sección genera para satisfacer la hipótesis de Navier:

$$(3.6-9) \quad \sigma_{res}(y) = [-\alpha \Delta T(y) + \epsilon_g - \chi y] E$$

- Si la sección pertenece a una viga *hiperestática*, sufre tensiones internas adicionales como consecuencia de restringir total o parcialmente las deformaciones anteriores; su cálculo se verá en el capítulo 6. Sin embargo,
 - si las restricciones al alargamiento y/o a la curvatura son *totales*, el cálculo puede ser más rápido mediante los razonamientos de este ejemplo que por los métodos del capítulo 6.

Resumen:

- Hay dos causas de deformaciones:
 - las tensiones y
 - las dilataciones.
- Se dice a menudo (erróneamente) que hay una sola causa de tensiones:
 - los esfuerzos, producidos:
 - ▶ por las cargas mecánicas exteriores
 - en todo tipo de estructuras, y
 - ▶ por las reacciones de cargas térmicas,
 - *sólo* en estructuras hiperestáticas.

Pero al decir esto nos olvidamos de una segunda causa:

 - las tensiones internas autoequilibradas
 - ▶ producidas por gradiente *no lineal* de temperaturas sobre el canto,
 - incluso en estructuras isostáticas.
- Una dilatación **lineal** a lo alto del canto produce
 - en estructuras isostáticas:
 - ▶ las dos deformaciones generalizadas:
 - alargamiento $\epsilon_g = \alpha \Delta T_g$, y
 - curvatura $\chi = -\alpha(\Delta T_s - \Delta T_i)/h$
 - en estructuras hiperestáticas:
 - ▶ las deformaciones anteriores más
 - ▶ las deformaciones y tensiones mecánicas por reacciones de compatibilidad (cap.6).
- Una dilatación **no lineal** a lo alto del canto produce:
 - En estructuras isostáticas:
 - ▶ las dos deformaciones generalizadas:
 - alargamiento $\epsilon_g = \frac{\alpha}{A} \int_{-c_i}^{c_s} \Delta T(y) b(y) dy$,
 - curvatura $\chi = -\frac{\alpha}{I} \int_{-c_i}^{c_s} \Delta T(y) b(y) y dy$;
 - ▶ y unas tensiones internas autoequilibradas $\sigma_{res}(y) = [-\alpha \Delta T(y) + \epsilon_g - \chi y] E$.
 - En estructuras hiperestáticas:
 - ▶ las deformaciones y tensiones anteriores más
 - ▶ las deformaciones y tensiones mecánicas por reacciones de compatibilidad (cap.6).
- Tu autor amigo **no** te recomienda tratar las deformaciones térmicas como producidas por ciertos esfuerzos ficticios (y no te lo ha enseñado). Si lo haces, a tu propio riesgo, recuerda que:
 - siempre puedes superponer deformaciones mecánicas y térmicas, pero
 - nunca puedes sumar esfuerzos mecánicos (reales) con los ficticios de las cargas térmicas,
 - ▶ sólo con los esfuerzos que surgen del hiperestatismo,
 - reales,
 - pero sólo aparentemente térmicos.

3.7 Problemas de secciones

Problema 3.7.1: Sección evolutiva

La ménsula de la figura a tiene inicialmente la sección de la figura b. En esta primera fase, la estructura está sometida a su peso propio y a la sobrecarga uniforme q de la figura a. El peso específico y el módulo de elasticidad del material (hormigón) se dan en esta figura b. Posteriormente, para soportar mejor una sobrecarga adicional Δq (dada en la figura c) que se aplicará después, se refuerza la sección pegando una chapa metálica, como se observa en la figura d. El módulo de elasticidad del metal se da en esta figura d y su peso se desprecia. Este refuerzo se coloca mientras actúan las cargas de la fase anterior (peso propio y sobrecarga q), y antes de aplicar la sobrecarga adicional Δq . Se pide:

a) Dibujar y acotar la distribución de tensiones normales en la sección A del empotramiento (en el hormigón y en el acero) cuando finalmente actúan todas las cargas.

b) Calcular la fuerza tangencial total que tiene que resistir el pegamento que une los dos materiales, en toda la superficie C-C' de contacto, desde A hasta B. (Examen febrero 04)

a) Sobre la sección inicial de la figura 3.26a ($A = 0,09 \text{ m}^2$, $c_i = 0,161 \text{ m}$, $I = 1,964 \times 10^{-3} \text{ m}^4$) gravitan el peso propio y la sobrecarga inicial (figura 3.26a), total $4,25 \text{ kN/m}$. El momento flector en el empotramiento A es de $-34 \text{ kN}\cdot\text{m}$ y produce las tensiones de la figura 3.27b.

Luego de reforzar la sección, se obtienen (para la sección homogeneizada multiplicando por 10 el ancho de la chapa metálica, figura 3.27c) los siguientes valores: $A = 0,11 \text{ m}^2$, $c_i = 0,225 \text{ m}$, $I = 3,956 \times 10^{-3} \text{ m}^4$. En el empotramiento A esta nueva sección soporta un $\Delta M = -16 \text{ kN}\cdot\text{m}$ que incrementa las tensiones en los valores mostrados en la figura 3.27d. El diagrama de tensiones finales se muestra en la figura 3.27e.

b.) Para el cálculo de la fuerza total en el pegamento podemos seguir dos caminos. En el primero calculamos la τ en el pegamento de la sección del empotramiento, que es, de acuerdo con (3.4-3):

$$\tau_A = \frac{\Delta Q_A}{I} \times \frac{\mu(y=0,275)}{b} = \frac{8}{3,956 \times 10^{-3}} \times \frac{10 \times 0,1 \times 0,02(0,295 - 0,01)}{0,1} = 115,27 \text{ kN/m}^2$$

En el extremo B este valor es nulo, y varía linealmente de A a B porque $\Delta Q(x)$ varía linealmente. La integral de estas τ 's sale de multiplicar el área del triángulo de la figura 3.27f por el ancho afectado, resultando $F = 23,05 \text{ kN}$.

b.) Otra forma de calcular la resultante de las tensiones tangenciales en el pegamento es recordando que su origen está en la diferencia de empujes normales en los extremos. Este empuje es nulo en B y en A vale (figura 3.27e):

$$F = \frac{11.930 + 11.120}{2} \times 0,02 \times 0,1 = 23,05 \text{ kN}$$

La figura 3.27f ilustra este equilibrio que hemos puesto de relieve en la chapa metálica entre las tensiones tangenciales y las normales en todo el desarrollo entre A y B.

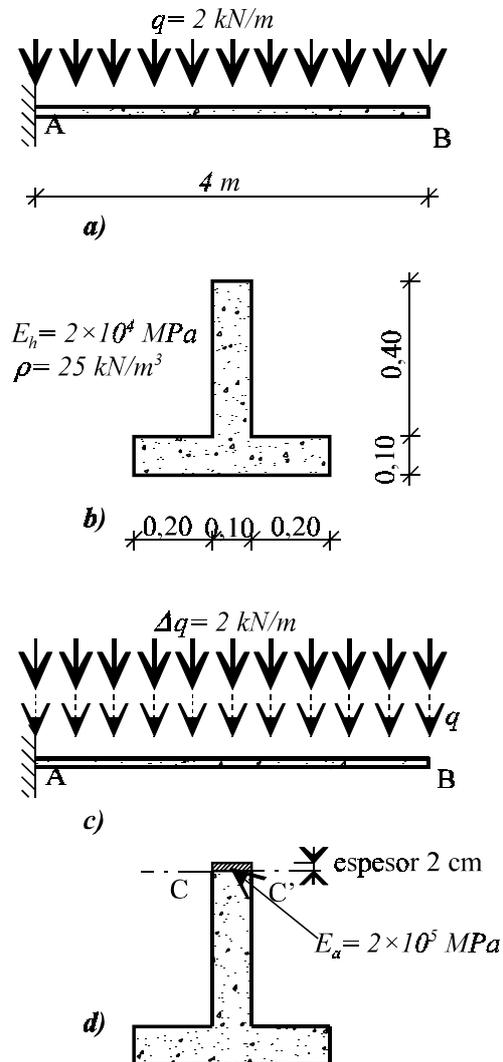


Figura 3.26
Datos del problema 3.7.1

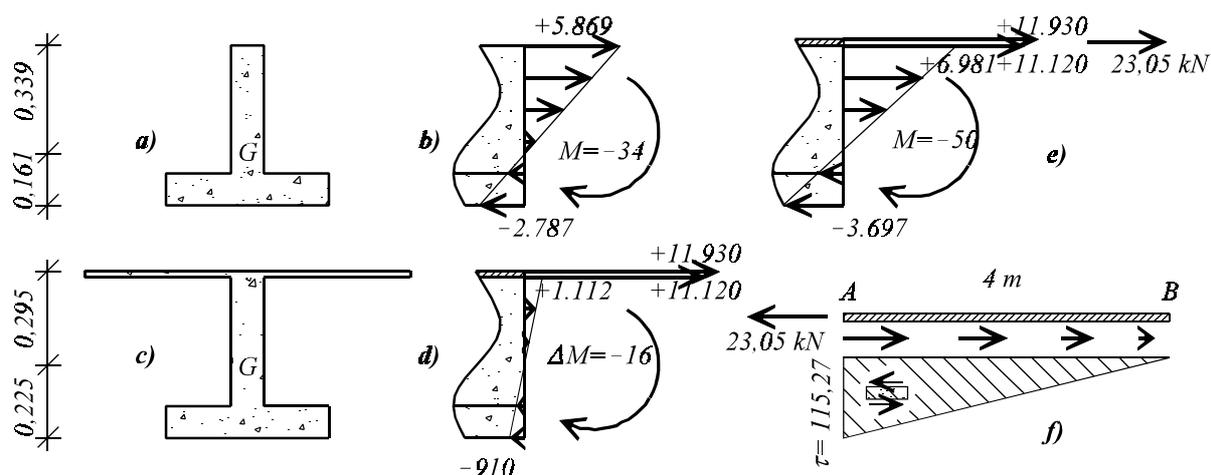


Figura 3.27

Secciones y diagramas tensionales del problema 3.7.1

Enseñanzas:

- Hemos resuelto un problema que llamamos de estructura *evolutiva* porque en ella se introducen modificaciones sin retirar la carga;
 - lo hemos resuelto de manera *incremental*.
- El problema enseña cómo aplicar cada incremento de carga sobre la sección existente en ese momento:
 - Una sección inicial resistía una carga inicial y adquiría unas ciertas tensiones iniciales.
 - Luego, sin retirar la carga:
 - reforzamos la sección,
 - empleamos la técnica de homogeneizar la sección compuesta por dos materiales distintos,
 - aplicamos un incremento de carga que produjo:
 - tensiones adicionales sobre la parte antigua de la sección
 - y tensiones «navales» sobre el material nuevo.
- Tanto las tensiones como las deformaciones son suma de las incrementales, con una diferencia muy notable:
 - La ley de tensiones finales presenta saltos por dos razones:
 - no todas las fibras han sufrido las mismas cargas, y
 - al deshomogeneizar las fibras más rígidas reciben tensiones proporcionalmente mayores;
 - La ley de deformaciones finales ha de ser plana, es decir $\chi = -\Delta\epsilon/\Delta y$ debe tener el mismo valor en todo el canto,
 - el valor $\chi = M/EI_1 + \Delta M/EI_2$
 - contando que la chapa metálica se colocaría con un χ_1 de construcción.
- Hemos calculado el esfuerzo rasante total entre los dos materiales mediante dos cálculos independientes, implícitos en la fórmula (3.4-3):
 - el de la resultante de tensiones *normales* en los extremos de una «subviga», y
 - el de la integral de las tensiones *tangenciales* dadas por (3.4-3) que actúan en las fibras superior e inferior de la misma,
 - integral que hemos resuelto numéricamente como el volumen del diagrama prismático de tensiones tangenciales.
- No hemos calculado, sin embargo, el estado tensional que quedaría al retirar la carga,
 - que no sería nulo porque no la retiraríamos de la misma estructura en que la pusimos, pero
 - tendría que ser un estado tensional *autoequilibrado*
 - porque al no haber cargas no puede haber esfuerzos
 - en estructura isostática;
 - sí los habría, en cambio, de resultante nula, en estructura hiperestática.

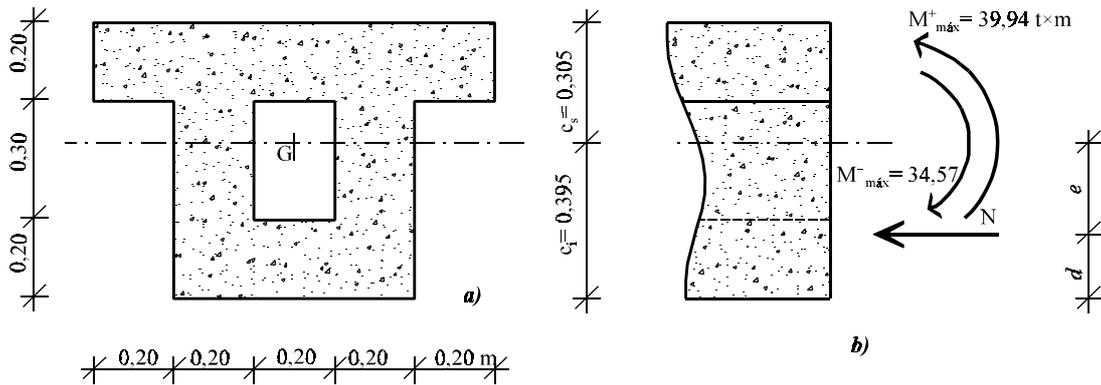


Figura 3.28
Sección y datos del problema 3.7.2

Problema 3.7.2: Objetivos del pretensado

La sección en cajón de la figura 3.28a corresponde a un puente de hormigón pretensado. De las múltiples hipótesis de carga consideradas para el puente, se desprende que los momentos flectores pésimos que dicha sección podrá sufrir serán de $+39,94 \text{ m}\times\text{t}$ y de $-34,57 \text{ m}\times\text{t}$. El hormigón empleado admite una tensión máxima de tracción de 25 kp/cm^2 . Para que este valor no se sobrepase se aplicará un esfuerzo axial (de pretensado) N en algún punto del eje de simetría de la sección (figura 3.28) en la chapa metálica b). Se pide determinar el valor mínimo del esfuerzo N que hay que aplicar y la posición del punto en que hay que aplicarlo, definida ésta por su distancia d a la fibra inferior de la sección. (Exámenes septiembre 89 y febrero 93.)

Calculamos $A = 0,44 \text{ m}^2$, $c_s = 0,305 \text{ m}$, $c_i = 0,395 \text{ m}$, $I = 0,02106 \text{ m}^4$.

Si colocáramos el axil de pretensado sobre la fibra baricéntrica, ayudaría en igual medida a combatir las tracciones de la fibra superior que las de la inferior. Sin embargo, éstas últimas son más peligrosas, porque su fibra está más alejada del c.d.g. y porque el momento que las produce es mayor. Por consiguiente, esperamos que la solución óptima resulte de aplicar un axil de compresión $-N_p$ con una excentricidad e por debajo de la fibra baricéntrica (ver figura 3.28b), más próximo a la fibra más comprometida. Este pretensado, además de comprimir toda la sección, induce un momento negativo $M_p = -N_p \times e$ que reduce el positivo, más peligroso, aunque aumente el negativo. El cálculo confirmará (si e resulta positiva, hacia abajo) o desmentirá (si e resulta negativa, hacia arriba) nuestra intuición. Las fibras cuya tracción queremos controlar son:

(i) La inferior, bajo la acción combinada del momento pésimo positivo y los esfuerzos de pretensado: $N = -N_p$, $M = +39,94 - M_p$:

$$\sigma_i = -\frac{N_p}{0,44} + \frac{39,94 - M_p}{0,02107} \times 0,395 = 250 \text{ t/m}^2$$

(ii) La superior, bajo la acción combinada del momento pésimo negativo y los esfuerzos de pretensado: $N = -N_p$, $M = -34,57 - M_p$:

$$\sigma_s = -\frac{N_p}{0,44} + \frac{34,57 + M_p}{0,02107} \times 0,305 = 250 \text{ t/m}^2$$

Del sistema formado por ambas ecuaciones se obtiene $M_p = 7,475 \text{ m}\times\text{t}$, $N_p = 157,79 \text{ t}$. Como $e = M_p/N_p = 0,047 \text{ m}$. La distancia del punto de aplicación del pretensado a la fibra inferior será $d = c_i - e = 0,348 \text{ m}$.⁷

En la vida profesional ahora tendríamos que calcular las tensiones de compresión en las fibras opuestas para asegurarnos de que el hormigón podría resistirlas.

⁷ Un alumno simpático aseguró en el examen que la solución no era válida porque el esfuerzo del pretensado "se escapa por el agujero de la sección". La realidad es que el pretensado se aplicaría a partes iguales en las dos almas del cajón, probablemente mediante cables, de forma que su c.d.g. estuviera donde hemos calculado.

Enseñanzas:

- Hemos aprendido el doble objetivo del pretensado:
 - producir una compresión previa N_p/A en el hormigón que permita traccionarlo posteriormente, y
 - producir un cierto momento $N_p \times e$ contrario al momento más peligroso,
 - ▶ para reducir éste
 - ▶ aun a costa de empeorar el pésimo de signo contrario, momento que es gratis: se consigue con sólo dar una excentricidad adecuada.
- No hemos visto en este problema:
 - Que la peor situación puede ser en fase de ejecución
 - ▶ cuando sólo actúe el pretensado y, quizás, todo o parte del peso propio,
 - ▶ sin las sobrecargas que nos producían los momentos extremos.
 - Que reducimos (o anulamos) las tracciones a costa de aumentar las compresiones, por lo que
 - ▶ hay que comprobar la máxima tensión de compresión que resulta.

Problema 3.7.3: Cabeza caliente, alma fría

La ménsula de la figura 3.29a, cuya sección en T se muestra en la figura 3.29b ($E=2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$, $\alpha=10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$), sufre un calentamiento uniforme de 20°C en la cabeza superior. Se quiere saber que tensiones sufrirán las diversas secciones de la viga.

La geometría de la sección arroja $A=0,28 \text{ m}^2$, $c_s=0,271 \text{ m}$, $c_i=0,529 \text{ m}$, $I=0,0151 \text{ m}^4$. Para impedir toda deformación necesitamos una distribución de tensiones $\sigma=-E\epsilon=-E\alpha\Delta T=-400 \text{ t/m}^2$ sobre la cabeza (figura 3.29c). Para mantener dicha distribución necesitamos en un esfuerzo de axil $N=-64 \text{ t}$ y un momento flector $M=10,944 \text{ t}\times\text{m}$. Pero como la viga es isostática, los apoyos no podrán ningún impedimento a la dilatación, no nos proporcionarán dichos esfuerzos para «combatir» la deformación térmica: tendremos que descargar las tensiones de esos esfuerzos (figura 3.29d), con lo que se llega a la distribución de la figura 3.29e.

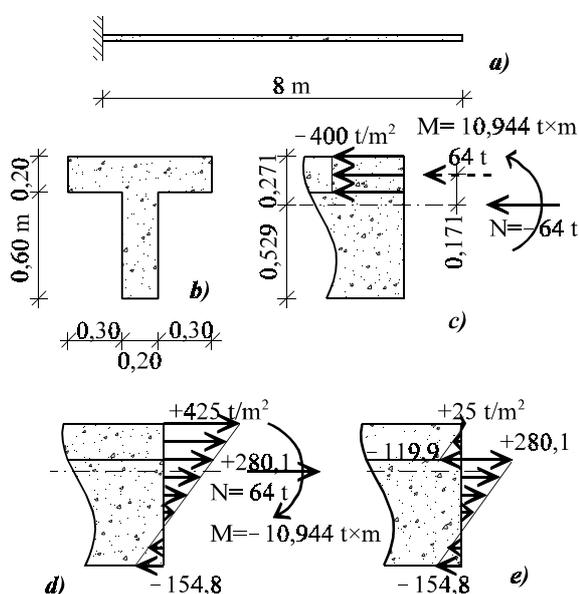


Figura 3.29
Sección y diagramas del problema 3.7.3

La distribución de deformaciones será plana:

$$\epsilon(y) = \left(\frac{64}{0,28} + \frac{10,944}{0,0151} \right) \frac{y}{E} = (0,114 + 0,362y) \times 10^{-3}$$

Enseñanzas

- Hemos resuelto un problema de dilatación no lineal sobre el canto por el procedimiento «del dictador» que consiste en:
 - colocar tensiones internas que anulen toda deformación,
 - ver qué axil y que momento encierran,
 - liberar dichos axil y momento (en estructuras isostáticas)
 - ▶ sobre la sección total,
 - de manera que sumamos estados de deformación plana.
- Encontramos que una dilatación no lineal sobre el canto produce una tensiones internas
 - incluso en estructura isostática (por el hiperestatismo interno de la rebanada),
 - ▶ distribución que *no* es plana,
 - porque no debe contener ni axil ni momento,
 - debe ser autoequilibrada
 - ▶ que resulta al exigir que la sección se mantenga plana,
 - o sea que el diagrama de deformaciones *sí* tiene que ser plano.

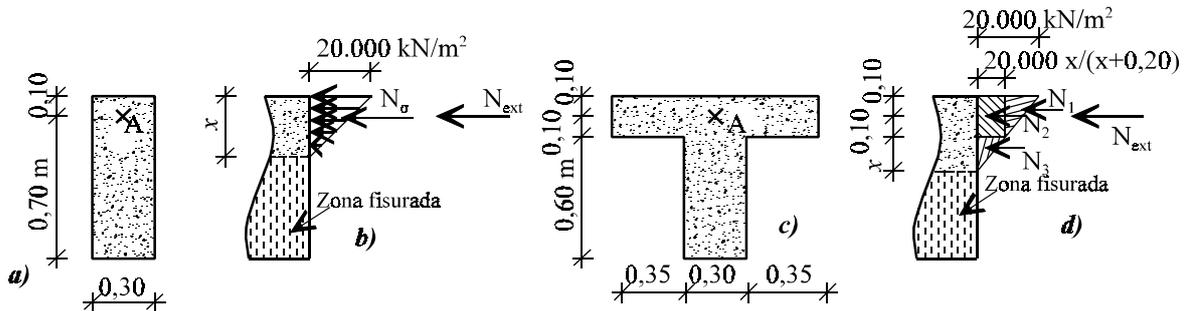


Figura 3.30
Secciones y diagramas del problema 3.7.4

Problema 3.7.4: No se aceptan tracciones

Para las secciones de la figura 3.30a y c, cuyo material resiste hasta 20.000 kN/m² de compresión pero no resiste tracciones, determinar el máximo valor del esfuerzo axil que se puede aplicar en el punto A de cada una de ellas.

La fórmula reina (3.3-4) de Navier no es aplicable porque el material no resiste tracciones; habría que encontrar una subsección A(x), I(x) que nos diera tensión nula en el borde inferior para fuerza aplicada en el punto A, y esto es mucho más difícil que empezar por el principio.

Empezamos con la sección rectangular (figura 3.30a). Partimos de una distribución plana de tensiones, como manda Navier, sin tracciones (figura 3.30b). Para que el axil aplicado en el punto A sea máximo, hacemos máxima la compresión en la fibra superior. Desconocemos la profundidad x hasta donde alcanza el diagrama de «sólo compresiones». Sabemos que el axil resultante de las tensiones de compresión N_σ debe ser estáticamente equivalente al axil exterior N_{ext}: deben de dar el mismo momento en cualquier punto del espacio. Para ello es preciso que el punto de actuación de N_σ, c.d.g. del diagrama de tensiones, esté precisamente en A (que es donde nos dicen que está aplicado N_{ext}). Por eso para la sección rectangular x = 0,30 m. Su valor será:

$$N_{ext} = \frac{1}{2} \cdot 0,30 \cdot \sigma_{m\acute{a}x} \cdot x = 900 \text{ kN}$$

Para la sección en T de la figura 3.30c tiene que suceder lo mismo: que el c.d.g. del diagrama de tensiones de compresión esté en A. La resultante del diagrama es la de tres fuerzas N₁, N₂ y N₃ cuya resultante ha de pasar por A. Como N₂ ya pasa, sólo falta que lo haga N₁ + N₃, o sea que el momento en A de N₁ sea igual y contrario que el de N₃:

$$N_1 = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20.000 \cdot \left(1 - \frac{x}{x+0,20}\right) \cdot 0,20 ; \quad N_3 = 0,30 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20.000 \cdot \frac{x}{x+0,20} \cdot x$$

$$N_1 \times \left(0,10 - \frac{1}{3} \cdot 0,20\right) = N_3 \times \left(0,10 + \frac{1}{3}x\right)$$

$$0,04 = 0,30x^2(0,30+x) \Rightarrow x = 0,169 \text{ m}$$

Con este valor se recalcula N₁ = 1.084 kN, N₂ = 1.832 kN, N₃ = 232 kN, total 3.148 kN.

Enseñanzas:

- Hemos resuelto un problema de distribución de tensiones en la que no se aceptaban tracciones:
 - no hemos podido aplicar la fórmula de Navier por esta razón;
 - pero hemos aplicado el mismo razonamiento de Navier:
 - diagrama plano de tensiones,
 - bien que sin tracciones,
 - equipolente a los esfuerzos de partida

- En el problema típico nos darán los esfuerzos y buscaremos las tensiones. Formularemos un sistema
 - con dos incógnitas:
 - ▶ tensión máxima y
 - ▶ profundidad de la zona comprimida, y
 - con dos ecuaciones:
 - ▶ igual axil interior que exterior, e
 - ▶ igual momento exterior que interior.
- Nuestro problema no era el típico sino uno mixto:
 - del diagrama de tensiones
 - ▶ conocíamos $\sigma_{m\acute{a}x}$ pero
 - ▶ desconocíamos su profundidad;
 - de los esfuerzos:
 - ▶ conocíamos el punto donde el momento es nulo, pero
 - ▶ desconocíamos el axil.

Problema 3.7.5: Flexión esviada, núcleo central y pretensado

Para la sección en U de la figura 3.31a, se pide:

a) Dibujar y acotar el núcleo central de la sección.

b) Si sobre la sección puede actuar un esfuerzo axil N_x (kN), bien aislado o bien simultáneamente con los momentos flectores $M_y = 25$ kN×m y $M_z = -18$ kN×m, determinar las coordenadas del punto de aplicación del mínimo esfuerzo N_x para que no aparezcan tensiones normales de tracción.

c) Calcular las tensiones normales extremas. (Examen)

a) Para flexión doble o esviada en torno a dos ejes necesitamos la fórmula de Navier completa. Nos fijamos en un punto (y,z) con coordenadas positivas. Observamos que un momento M_y positivo tracciona los puntos con z positiva mientras que un momento M_z positivo comprime los puntos con y positiva; por consiguiente la fórmula con los dos momentos será:

$$(3.7-1) \quad \sigma_x(y,z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_{yy}}z - \frac{M_z}{I_{zz}}y$$

Esta fórmula, generalización de la (3.3-4), sólo vale referida a los ejes *principales de inercia* de la sección, con su origen en el c.d.g. Necesitamos la posición de éste y los momentos de inercia respecto de ambos ejes. Encontramos: $A = 0,0568$, $y_i = 0,0749$, $y_d = 0,2251$ (figura 3.31b), $z_s = z_i = 0,45$; $I_{zz} = 0,4186 \times 10^{-3}$, $I_{yy} = 6,279 \times 10^{-3}$.

Para hallar el punto E_i de coordenadas $(0, -z_E)$ del núcleo central colocamos en él un cierto N_E de compresión (que dará un momento $M_y = N_E \times z_E$) y obligamos a que la tensión en el borde superior AB sea nula:

$$\sigma_{AB} = -\frac{N_E}{0,0568} + \frac{N_E \times z_E}{6,279 \times 10^{-3}} \cdot 0,45 = 0 \Rightarrow z_E = 0,246 \text{ m}$$

Así pues, $E(0; -0,246)$ y por simetría $F(0; 0,246)$.

De manera semejante hallamos $H(0; -y_H)$ y $G(0; y_G)$. Para el primero anulamos la tensión en el borde BD y para el segundo, en el AC:

$$\sigma_{BD} = -\frac{N_H}{0,0568} + \frac{N_H \times y_H}{0,4186 \times 10^{-3}} \cdot 0,2251 = 0 \Rightarrow y_H = 0,0327 \text{ m}$$

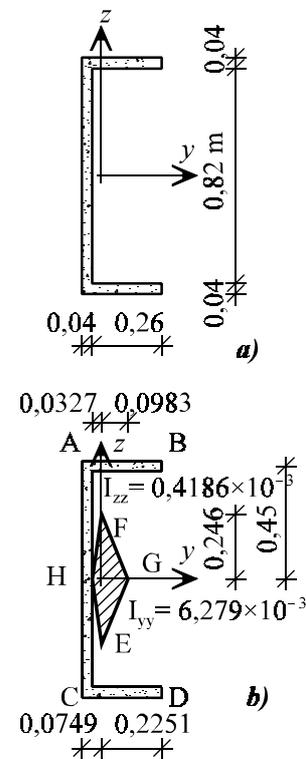


Figura 3.31
Sección y núcleo central del problema 3.7.5

$$\sigma_{AC} = -\frac{N_G}{0,0568} + \frac{N_G \times y_G}{0,4186 \times 10^{-3}} 0,0749 = 0 \Rightarrow y_G = 0,0983 \text{ m}$$

Hemos buscado primero los puntos en que la excentricidad z de N daba valores extremos de M_y y nulos de M_z y después, extremos de M_z y nulos M_y . Como la fórmula (3.7-1) es lineal, si fijáramos valores intermedios de una excentricidad, nos resultaría un valor intermedio de la otra: ello nos permite unir los puntos E, F, G, H mediante rectas (como ya hicimos muy alegremente en la figura 3.9).

b) El momento $M_y = 25 \text{ kN}\times\text{m}$ pone sus tracciones sobre el borde AB y el $M_z = -18 \text{ kN}\times\text{m}$, las suyas sobre el BD . Por consiguiente, el punto más peligroso por tracciones es la esquina B donde resulta:

$$\sigma_B = \frac{25}{6,279 \times 10^{-3}} 0,45 + \frac{18}{0,4186 \times 10^{-3}} 0,2251 = 11.471 \text{ kN/m}^2$$

Ésta es la tensión que queremos corregir mediante pretensado. En principio, cuanto más arrimemos el axil de pretensado a la esquina B menos axil necesitaremos para anular esa tracción. Pero como el pretensado también puede actuar solo (sin los momentos M_y y M_z dados), no podemos sacarlo del núcleo central para que por sí mismo no produzca tracciones. Lo máximo que lo podemos acercar a B es colocándolo en algún lugar sobre el segmento FG . Si lo colocamos en F necesitaremos:

$$-N_F \left(\frac{1}{0,0568} + \frac{0,246}{6,279 \times 10^{-3}} 0,45 \right) = -11.471 \text{ kN/m}^2 \Rightarrow N_F = 328,9 \text{ kN}$$

Si lo hacemos en G :

$$-N_G \left(\frac{1}{0,0568} + \frac{0,0983}{0,4186 \times 10^{-3}} 0,2251 \right) = -11.471 \text{ kN/m}^2 \Rightarrow N_G = 162,8 \text{ kN}$$

Ésta es la mínima cantidad de axil necesaria y G el punto donde colocarla. En posiciones intermedias del segmento FG obtendremos valores intermedios de N . Si no lo crees, mira qué ocurre si colocas N en un punto de FG :

$$\frac{y}{0,0983} + \frac{z}{0,246} = 1$$

$$-N(y) \left[\frac{1}{0,0568} + \frac{0,246 \left(1 - \frac{y}{0,0983} \right)}{6,279 \times 10^{-3}} 0,45 + \frac{y}{0,4186 \times 10^{-3}} 0,2251 \right] = -11.471 \text{ kN/m}^2$$

(Comprueba que las fórmulas anteriores salen de poner en ésta $y = 0$ e $y = 0,0983$.) El mínimo $N(y)$ buscado se correspondería con el *máximo* de la cantidad entre corchetes. Como ésta es lineal, sus valores extremos estarán en los extremos del intervalo; luego los de $N(y)$, también, c.q.d. (Te lo aseguro: rara vez vas a encontrar máximos o mínimos en esta disciplina derivando e igualando a cero; lo siento: tendrás que razonar en vez de limitarte a operar.)

c) La tensión normal mínima en valor absoluto será 0 en B cuando actúan «todos» y 0 en C con el pretensado solo. La máxima compresión con axil en G y momentos se tendrá en C y valdrá:

$$\frac{-162,8}{0,0568} - \frac{25}{6,279 \times 10^{-3}} 0,45 - \frac{18 - 162,8 \times 0,0983}{0,4186 \times 10^{-3}} 0,0749 = -5.015 \text{ kN/m}^2$$

La máxima compresión, sin embargo, se da para la hipótesis de pretensado actuando solo, y vale -11.471 kN/m^2 en el borde BD . Lo sabemos porque ése es el valor de la tracción que desde el principio queríamos anular en B .

Enseñanzas

- El problema tenía dificultades de tres tipos:
 - de formular bien la flexión en torno a los dos ejes principales de inercia,
 - de encontrar el núcleo central,
 - de colocar bien el pretensado;
 - y (como los tres mosqueteros) una cuarta de no equivocarte al meter los datos geométricos de cada fórmula.

- Para flexión en torno a dos ejes:
 - Escribimos la fórmula (3.7-1) observando:
 - ▶ si tracciona o comprime un momento positivo sobre un punto del primer cuadrante,
 - ▶ colocándole, en consonancia, el signo + o el - al término correspondiente.
 - Advertimos que la fórmula sólo vale:
 - ▶ referida a los ejes principales de inercia,
 - ▶ con material homogéneo (un solo valor del módulo de elasticidad),
 - de no ser así homogeneizaríamos,
 - ▶ resistiendo igual a tracción que a compresión.

- Para encontrar el núcleo central de una sección como ésta, con cuatro puntos extremos, se procede:
 - colocando un axil de compresión en un punto genérico de cada semieje,
 - haciendo que sea nula la tensión en el vértice más alejado,
 - ▶ lo que nos da la excentricidad máxima sobre ese semieje,
 - uniendo los puntos extremos en virtud de la linealidad de (3.7-1).
- Sobre el pretensado con doble excentricidad aprendimos:
 - que si puede actuar solo, hay que colocarlo en el borde del núcleo central,
 - ▶ sobre el borde más cercano a la esquina más traccionada por las otras cargas,
 - en uno de los extremos de dicho borde.

- La dificultad de operar en cada instante con los parámetros pertinentes la reducimos preparando una figura con todos ellos reunidos.⁸

⁸ Maldito disgusto me dio un colaborador por desoír este sabio consejo.

4 Movimientos

4.0 Importancia, objetivos y contenido

Los movimientos que realiza la viga o pieza prismática bajo sus cargas van a ser muy pequeños, pero importantes de evaluar por dos razones: (i) para asegurarnos de que van a ser todo lo pequeños que nos exige el cliente o las normas de construcción, por lo inquietante que resulta la sensación de que la estructura cede bajo nuestros pies; (ii) porque en estructuras hiperestáticas es necesario calcular movimientos para llegar a evaluar sus esfuerzos.

Objetivos	Contenido
General: <ul style="list-style-type: none"> — Aprender a calcular movimientos en estructuras isostáticas de vigas bajo cargas: <ul style="list-style-type: none"> • gravitatorias y • térmicas 	
Específicos: <ul style="list-style-type: none"> — Entender las implicaciones de las <i>hipótesis simplificativas</i> del cálculo de movimientos pequeños y saber aplicarlas — Entender las implicaciones del Principio de Superposición y saber aplicarlo — Aprender a calcular los movimientos que sufre una estructura isostática sometida a: <ul style="list-style-type: none"> • alargamientos discretos • elongación continua <ul style="list-style-type: none"> ▶ con coacciones externas (de apoyos <i>aviesos</i>), ▶ con coacciones internas; • giros discretos <ul style="list-style-type: none"> ▶ en ménsulas, ▶ en vigas apoyadas, <ul style="list-style-type: none"> □ giros en los apoyos; • curvatura <ul style="list-style-type: none"> ▶ en ménsulas, ▶ en vigas apoyadas, <ul style="list-style-type: none"> □ con rótulas intermedias, ▶ por variaciones térmicas. — Aprender cómo se mueven los puntos de una estructura sometida a dilatación térmica <ul style="list-style-type: none"> • cuando ésta es uniforme, • cuando no es uniforme. — Conocer la fórmula de Bresse y el significado de sus múltiples términos: <ul style="list-style-type: none"> • de arrastre <ul style="list-style-type: none"> ▶ por traslación, ▶ por giro; • relativos: <ul style="list-style-type: none"> ▶ elongación: <ul style="list-style-type: none"> □ mecánica, □ térmica; ▶ giros discretos o concentrados, <ul style="list-style-type: none"> □ rótulas; ▶ giros continuos (curvatura): <ul style="list-style-type: none"> □ de flexión mecánica, □ de curvatura térmica. 	§4.1 §4.1 §4.2 §4.2 §4.3 §4.3 §4.4 §4.4
Adicional: <ul style="list-style-type: none"> — Adquirir soltura en el cálculo de movimientos 	§4.5

4.1 Simplificaciones de la *microcinemática*

Simplificación fundamental

La simplificación fundamental de la microcinemática consiste en suponer que *los movimientos son muy pequeños frente a las demás dimensiones de la estructura*. Por esta razón los movimientos recibirán el mismo trato que en Cálculo dábamos a los *diferenciales*: despreciaremos los términos de segundo grado frente a los de primer grado, etc., etc.. Pero observa que nunca despreciaremos un término *per se* sino en *comparación* con otro(s) más importante(s).

Causas aisladas, sucesivas, simultáneas

Un aumento de temperatura ΔT_1 causa en una barra de longitud L un alargamiento $\Delta L_1 = \alpha \Delta T_1 L$: su longitud pasa a ser $L(1 + \alpha \Delta T_1)$. Con un aumento posterior ΔT_2 la nueva longitud pasará a ser:

$$(4.1-1) \quad L + \Delta L = L(1 + \alpha \Delta T_1)(1 + \alpha \Delta T_2) = L \left[1 + \alpha(\Delta T_1 + \Delta T_2) + \alpha^2 \Delta T_1 \Delta T_2 \right]$$

Despreciando el producto de alargamientos como prescribe la simplificación fundamental, la longitud final será: $L[1 + \alpha(\Delta T_1 + \Delta T_2)]$. El alargamiento total es:

$$(4.1-2) \quad \Delta L = L\alpha(\Delta T_1 + \Delta T_2) = \Delta L_1 + \Delta L_2$$

Principio de Superposición

Este resultado muestra lo que proclama el principio de Superposición que dice dos cosas:

- aplicando las causas de forma sucesiva se obtiene el mismo efecto que aplicándolas conjuntamente, y
- que este efecto es la suma de los efectos que produce cada causa aislada sobre la estructura sin deformar.

Forzados a despreciar

Pero para que se cumpla *estamos obligados a despreciar* los términos de segundo orden, "el alargamiento del alargamiento", igual que en los cálculos de interés simple despreciamos el interés del interés¹. Si no desprecias, el cálculo no resultará lineal (a doble causa no le corresponderá doble efecto), y perderás el valioso principio de superposición que te permite ir sumando directamente los movimientos aportados por causas diversas (incrementos de temperatura en distintas zonas de la estructura, fuerzas exteriores variadas, etc.) sobre la estructura *inicial*.

Movimientos causados por un giro pequeño

Veamos a continuación cuál es el movimiento que un pequeño giro θ_A del punto A causa sobre otro punto B rígidamente unido a aquél (figura 4.1). En cinemática convencional B describiría un arco de circunferencia e iría a parar a B' distante $BB' = AB \times \theta_A$. Observa ahora el desarrollo en serie de las funciones trigonométricas en la figura 4.2a. Para ángulos muy pequeños, supuestos infinitésimos, se verifican las relaciones de la figura 4.2b (son las partes principales que utilizabas cuando calculabas límites). Por consiguiente:

$$(4.1-3) \quad \overline{BB'} = \overline{AB} \times \theta_A \sim \overline{AB} \times \text{tg} \theta_A = \overline{BB_1}$$

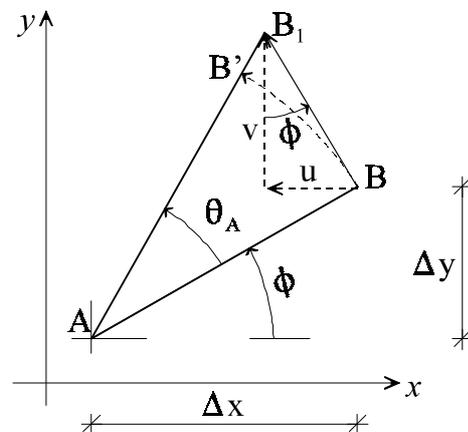


Figura 4.1
Movimientos en B causados por un giro pequeño en A

¹ En un cálculo estricto tampoco podríamos aceptar la fórmula "de interés compuesto" $L(1 + \alpha \Delta T)$ porque la primera porción $d(\Delta T)$ alargará un tanto la barra y el segundo $d(\Delta T)$ se aplicaría sobre la nueva longitud $L[1 + \alpha d(\Delta T)]$, y así sucesivamente. El cálculo riguroso habría de ser como el del interés continuo, que tiene una expresión exponencial.

La circunferencia degenera

La fórmula anterior nos dice que *para giros pequeños el arco de circunferencia BB' degenera en el segmento recto perpendicular BB₁*. En efecto, el error B'B₁ es:

$$B'B_1 = AB \left(\frac{1}{\cos\theta_A} - 1 \right) = AB \left(\frac{1}{2}\theta_A^2 + \frac{5}{24}\theta_A^4 \right)$$

que es de orden 2 en el movimiento θ_A y, por hipótesis, despreciable.

Hipotenusa= cateto grande

Además, al despreciar la distancia B'B₁ resulta que *¡la hipotenusa AB₁ y el cateto grande AB tienen la misma longitud!*

Giro × distancia perpendicular

Pero hay más simplificaciones. El movimiento BB₁ tendrá componentes horizontal *u* y vertical *v* cuyas expresiones resultan muy fáciles de calcular (figura 4.1b):

$$(4.1-4) \quad \begin{aligned} u &= -\overline{BB_1} \sin\phi = -\theta_A \overline{AB} \sin\phi = -\theta_A \Delta y \\ v &= \overline{BB_1} \cos\phi = \theta_A \overline{AB} \cos\phi = \theta_A \Delta x \end{aligned}$$

o sea, *desplazamiento horizontal = giro × distancia vertical* (el signo depende del sistema coordinado elegido) y *desplazamiento vertical = giro × distancia horizontal*.

Discriminación angular

En los cálculos anteriores han aparecido los ángulos ϕ y θ , absolutamente heterogéneos en cuanto a la consideración que les merecen a las funciones trigonométricas. El primero es un ángulo geométrico y como tal susceptible de ser *abrazado* por las funciones seno, coseno, etc. El ángulo θ , en cambio, es un movimiento, será muy pequeño (lo mediremos generalmente en miliradianes) y por ello siempre reemplazaremos:

$$(4.1-5) \quad \begin{aligned} \sin\theta &\rightarrow \theta \\ \cos\theta &\rightarrow 1 \\ \operatorname{tg}\theta &\rightarrow \theta \end{aligned}$$

Resumen:

- Los movimientos, por hipótesis, son muy pequeños; se desprecian sus términos de orden superior
- Los movimientos de una causa anterior no influyen en el cálculo de los de una causa posterior. Dicho de otra manera: en el cálculo de movimientos no intervienen los movimientos previos (sólo los simultáneos).
- El principio de Superposición permite calcular los movimientos producidos por cada causa actuando sola sobre la estructura sin deformar, y sumarlos algebraicamente para considerar el efecto de todas las causas actuando simultáneamente.
- Los giros causan desplazamientos perpendiculares al radio:
Desplazamiento = giro × distancia perpendicular
- Las funciones trigonométricas discriminan a los ángulos de movimientos (no a los geométricos), y hacen *sen θ → θ, cos θ → 1, tg θ → θ*.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \rightarrow \operatorname{sen}\theta \approx \theta \\ \operatorname{cos}\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \rightarrow \operatorname{cos}\theta \approx 1 \\ \operatorname{tg}\theta &= \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \frac{\theta^7}{7} + \dots \rightarrow \operatorname{tg}\theta \approx \theta \end{aligned}$$

a) b)

Figura 4.2
Desarrollos en serie de las funciones trigonométricas y partes principales

4.2 Movimientos por esfuerzo axial

Muelle

Empezaremos por lo más fácil. La pieza más sencilla que se mueve por esfuerzo axial es el muelle lineal (figura 4.3). El movimiento u se relaciona con el esfuerzo sufrido F mediante la sencilla fórmula $u = F/k$. La constante $k = F/u$ del muelle se mide en unidades de fuerza/longitud.

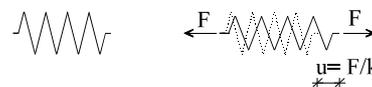


Figura 4.3
Movimientos en un muelle lineal

Movimientos como suma de deformaciones discretas

Pese a su sencillez, este primer ejemplo pondrá de relieve que los movimientos son sumas de deformaciones.

Ejemplo 4.2.1: Alargamientos discretos

La estructura de la figura 4.4a consiste en tres bloques infinitamente rígidos unidos por dos muelles de rigideces $k_1 = 3000$ kN/m, $k_2 = 2000$ kN/m. La estructura está sometida a las cargas horizontales $H_1 = 30$ kN y $H_2 = 20$ kN. Se pide calcular el movimiento horizontal de los puntos C y D de aplicación de las cargas.

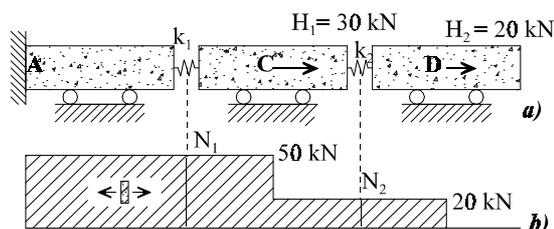


Figura 4.4
Alargamientos discretos del ejemplo 4.2.1

La ley de esfuerzos axiales de la estructura es la que se muestra en la figura 4.4b. Los bloques rígidos permanecen «impasibles» al esfuerzo que soportan; los muelles, no. Éstos resisten su esfuerzo alargándose. Toma nota de que las deformaciones se calculan con los esfuerzos soportados (que para el muelle 1 son 50 kN y para el 2, 20); **no**, con las cargas exteriores:

$$\delta_1 = \frac{N_1}{k_1} = \frac{50 \text{ kN}}{3.000 \text{ kN/m}} = 16,667 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_2 = \frac{N_2}{k_2} = \frac{20}{2.000} = 10 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Los movimientos resultan de sumar los alargamientos encontrados desde el punto fijo:

$$u_C = \sum_A^C \delta_i = 16,667 \text{ mm}$$

$$u_D = \sum_A^D \delta_i = 16,667 + 10 = 26,667 \text{ mm}$$

Enseñanzas:

- Para calcular movimientos los pasos son:
 - obtener los esfuerzos producidos por las cargas exteriores,
 - obtener las deformaciones producidas por los esfuerzos, y
 - sumar (o integrar) los esfuerzos a partir de un punto fijo o de movimiento conocido.
- Errores frecuentes son:
 - calcular las deformaciones a partir de las cargas exteriores (o sea, confundir esfuerzos con cargas exteriores), y
 - olvidar los movimientos de arrastre del punto de partida

Movimientos como integrales de deformaciones continuas

En el siguiente ejemplo se pone de relieve que (i) en el caso más general, los movimientos son las integrales de las deformaciones, y (ii) que no necesitamos evaluar aquéllas analíticamente: la evaluación numérica puede ser exacta.

Ejemplo 4.2.2: Alargamientos continuos

La viga de la figura 4.5a soporta una carga axial uniforme $p = -30 \text{ kN/m}$. Su rigidez axial es $EA = 150.000 \text{ kN}$. Se pide calcular el movimiento horizontal de cualquier punto de la viga.

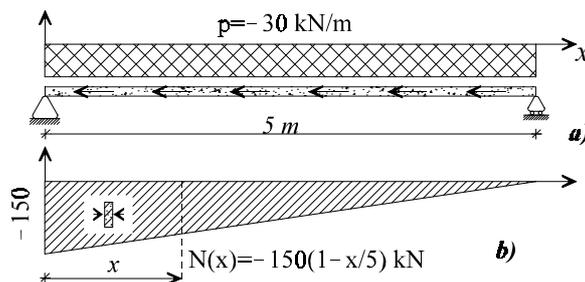


Figura 4.5 Alargamientos continuos del ejemplo 4.2.2

En este caso, cada rebanada dx de viga se alarga, por la acción del esfuerzo axial $N(x)$ que soporta, la cantidad $\Delta d(x) = \epsilon(x)dx = N(x)dx/EA$. Así pues, lo primero que necesitamos para el cálculo de movimientos es la ley de esfuerzos axiales; ésta es la representada en la figura 4.5b. El movimiento $u(x)$ vendrá dado ahora por la integral (en vez de la suma del caso anterior) de los alargamientos de cada rebanada desde el punto fijo hasta llegar a «la nuestra»:

$$u(x) = \frac{1}{EA} \int_{z=0}^{z=x} N(z) dz$$

Sin embargo, rara vez calcularemos la integral hallando su primitiva. Como equivale al área del trapecio de esfuerzos entre $N(0) = -150$ y $N(x) = -150(1 - x/5)$, resulta:

$$(a) \quad u(x) = -\frac{150 + 150\left(1 - \frac{x}{5}\right)}{2EA} x = -\frac{1}{EA} (150x - 15x^2) = -(x - 0,1x^2) \times 10^{-3} \text{ m}$$

Comprobación: en el extremo B, $x = 5$, el movimiento debe resultar $-\frac{1}{2} \frac{150}{EA} \times 5 = -2,5 \text{ mm}$. Concuerda.

Enseñanzas:

- En el cálculo de deformaciones (como en el de tensiones) intervienen los esfuerzos; no, las cargas exteriores. Por ello:
 - hemos empezado por calcular los esfuerzos (a partir de las cargas exteriores y sus reacciones de apoyo).
- Los movimientos resultan siempre de integrar las leyes de esfuerzos:
 - aquí era la ley de esfuerzos axiales dividida de la rigidez axial EA . Sin embargo:
 - ▶ rara vez realizaremos las integrales de los esfuerzos analíticamente
 - ▶ lo habitual será calcularlas como las áreas encerradas.

Movimientos adicionales por apoyos aviesos

En algunos casos los apoyos inducen movimientos que aquí llamamos secundarios, aunque sólo por el orden en que los calculamos.

Ejemplo 4.2.3: Alargamientos con restricciones externas

Determinar los movimientos horizontal u , vertical v y giro θ de todos los puntos de la misma viga del ejemplo anterior pero colocada con una inclinación de 60° y sustentada como se muestra en la figura 4.6.

El acortamiento por axil producirá un primer movimiento $w(s)$ según el eje de la viga que valdrá lo obtenido en la ecuación (a) del ejemplo anterior:

$$(a) \quad w(s) = -(s - 0,1s^2) \times 10^{-3} \text{ m}$$

Este primer movimiento tiene componentes horizontal y vertical de valor:

$$(b) \quad \begin{aligned} u(s) &= -(s - 0,1s^2) \cos 60^\circ \times 10^{-3} \text{ m} \\ v(s) &= -(s - 0,1s^2) \sen 60^\circ \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

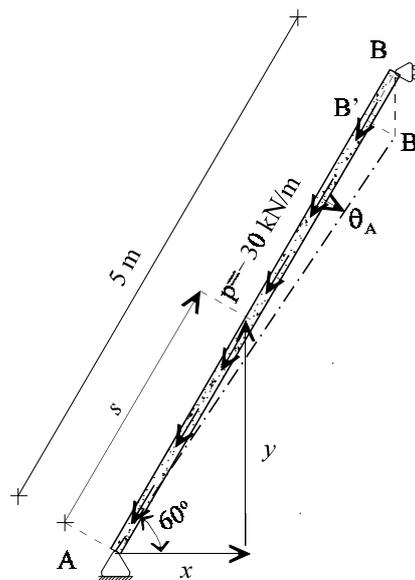


Figura 4.6 Movimientos con coacción de apoyo del ejemplo 4.2.3

Sin embargo, estos movimientos «primarios» no son los finales porque no satisfacen la condición de que B se mueva en la vertical $u(s=5) = 0$. Calcularemos el movimiento complementario de dos maneras.

a) *Procedimiento físico.* Al acortarse la viga 2,5 mm (calculado en el ejemplo anterior) el extremo B pasaría a la posición B' . Como ésta es incompatible con la exigencia de que B se mueva sobre la vertical, la barra entera girará en torno a su extremo A hasta dar con B' en B_1 (figura 4.6a). $B'B_1$ sería en principio un arco de circunferencia con centro en A pero como en *microcinemática* la circunferencia degenera en un segmento perpendicular al radio, $B'B_1$ es un segmento perpendicular a AB de magnitud $B'B_1 = BB' \operatorname{tg} 30^\circ = 1,443 \text{ mm}$. El giro $\theta_A = -B'B_1/AB = -0,2887 \text{ mrad}$. (Dividimos por AB y no por AB' porque las medidas geométricas se toman siempre de la estructura sin deformar.) A los movimientos $u(s)$, $v(s)$ hallados antes habrá que sumarles $-\theta_A \times y$, $\theta_A \times x$ respectivamente, según (4.1-1).

b) *Procedimiento matemático.* A los movimientos «primarios» (b) habrá que añadirles los de un posible giro desconocido en torno a A : $-\theta_A \times y$, $\theta_A \times x$. Resultarán:

$$(c) \quad \begin{aligned} u(s) &= -\frac{1}{2}(s-0,1s^2) \times 10^{-3} - \theta_A \times s \frac{\sqrt{3}}{2} \\ v(s) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}(s-0,1s^2) \times 10^{-3} + \theta_A \times s \frac{1}{2} \\ \theta(s) &= \theta_A \end{aligned}$$

Para determinar θ_A imponemos la condición $u(s=5) = 0$ y encontramos el mismo valor que antes. Los movimientos finales son los indicados en (c) con $\theta_A = -0,2887 \text{ mrad}$

Enseñanzas:

- Cuando se tienen movimientos por elongación de una barra hay que comprobar si los apoyos los permiten.
 - En caso contrario habrá que añadir movimientos de sólido rígido.
- Los movimientos de sólido rígido se pueden calcular de dos maneras:
 - por el procedimiento *físico*, entendiendo la cinemática del problema y aplicando trigonometría,
 - ▶ recomendable para aprender el funcionamiento de las estructura, o
 - por el procedimiento *matemático*, que consiste en introducir movimientos desconocidos de sólido rígido y determinarlos con las condiciones de contorno en los apoyos
 - ▶ más automático de formular.

Movimientos adicionales por coacciones internas

Los movimientos que llamamos «secundarios» y que en el ejemplo anterior eran inducidos por un apoyo, pueden ser inducidos también por las restricciones internas de la propia estructura.

Ejemplo 4.2.4: Alargamientos con restricciones internas

Queremos calcular el movimiento del nudo C de la estructura de la figura 4.7a. El pilar CB es de hormigón, de $0,20 \times 0,20 \text{ m}^2$ de sección y módulo de elasticidad $2 \times 10^4 \text{ MPa}$, y el tirante de acero, de 20 cm^2 de sección y módulo de elasticidad $2 \times 10^5 \text{ MPa}$.

La estructura es isostática como la del problema 2.7.2 por la rótula en C . Allí aprendimos también que la carga en el nudo se distribuye entre las dos piezas de acuerdo con la regla del paralelogramo de suma vectores (figura 4.7b): $N_{CB} = -200 \text{ kN}$, $N_{AC} = 223,61 \text{ kN}$. Para demostrarlo basta con calcular las reacciones: $H_B = 0$ para que el momento flector en C sea nulo; por consiguiente, $H_A = -100 \text{ kN}$. Las reacciones verticales tienen que equilibrar el momento de vuelco 100×5 : $V_B = -V_A = 200 \text{ kN}$. Comprueba ahora que las reacciones en A y en B llevan la dirección de las piezas que llegan a esos apoyos.

Los alargamientos de las piezas son $\delta = NL/EA$: $\delta_{AC} = 3,125 \text{ mm}$, $\delta_{CB} = -1,250 \text{ mm}$. Observa qué pequeñas son, en general, las deformaciones por esfuerzo axial incluso en vigas esbeltas. Al alargarse el cable, su punto C querría moverse a C' . Al acortarse la columna, su punto C intentaría irse a C'' . Esta discrepancia la negocian yéndose al punto de intersección de las circunferencias de centro en A y radio AC' y centro en B y radio BC'' . Como estas circunferencias degeneran en rectas (§4.1), la intersección se produce en C_1 . Así pues, $\theta_A = -C'C_1/AC$, $\theta_B = -C''C_1/BC$. No obstante saber esto, haremos el cálculo por el método matemático:

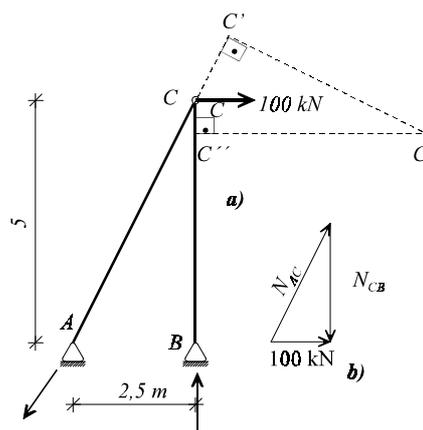


Figura 4.7
Movimientos con restricciones internas
del ejemplo 4.2.4

$$\left. \begin{aligned} u_C^{(AC)} &\equiv -\theta_A \times 5 + 3,125 \times 0,447 = -\theta_B \times 5 \equiv u_C^{(BC)} \\ v_C^{(BC)} &\equiv \theta_A \times 2,5 + 3,125 \times 0,894 = -1,250 \equiv v_C^{(BC)} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \theta_A &= -1,618 \text{ mrad} \\ \theta_B &= -1,897 \text{ mrad} \end{aligned} \right\}$$

Entrando con estos valores en las ecuaciones anteriores se determina $u_C = 9,484 \text{ mm}$, $v_C = -1,250 \text{ mm}$.

De otro modo

Sean u_C y v_C los movimientos del punto C. Sus proyecciones sobre las piezas AC y BC han de dar los alargamientos de las mismas:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{AC} &\equiv u_C \times 0,447 + v_C \times 0,894 = 3,125 \\ \delta_{BC} &\equiv v_C = -1,250 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} u_C &= 9,491 \text{ mm} \\ v_C &= -1,250 \text{ mm} \end{aligned} \right\}$$

Contragradiencia

Observa la *contragradiencia* o diferencia de trato entre fuerzas y movimientos. En la figura 4.7b las fuerzas en las piezas se proyectan sobre el nudo. En las ecuaciones anteriores, los movimientos del nudo se proyectan sobre las piezas.

Enseñanzas:

- Hemos aprendido que las fuerzas que actúan en un nudo sólo producen esfuerzos axiales sobre las piezas que lo forman, y
 - cuando sólo son dos piezas, el reparto se hace mediante la regla del paralelogramo de suma de vectores.
- Hemos calculado los movimientos del nudo a partir de los alargamientos de las piezas:
 - por el método físico, que nos adelantaba los signos de los movimientos;
 - por el método matemático de añadir giros de sólido rígido para igualar los movimientos del nudo en cada pieza.
 - Una variante de este método matemático nos permitió reducir el cálculo, a costa de no determinar los giros de sólido rígido.
- Hemos puesto de relieve el principio de contragradiencia, por el cual se tratan de manera diferente el reparto de fuerzas y movimientos en un nudo:
 - las fuerzas que actúan sobre las piezas se proyectan sobre el nudo;
 - los movimientos del nudo se proyectan sobre las piezas que lo componen.

Resumen:

- Los esfuerzos axiales producen elongaciones de las piezas afectadas, semejantes a los de una dilatación térmica.
 - Se calculan, por tanto a partir de las leyes de esfuerzos axiales; no, de las cargas exteriores.
- Los pasos para el cálculo son:
 - determinar la ley de esfuerzos axiales,
 - pasar de esfuerzos a deformaciones dividiendo por la rigidez EA,
 - sumar o integrar adecuadamente las deformaciones anteriores:
 - la integral se convierte en el área de la ley de esfuerzos, pero
 - pueden aparecer factores como senos y cosenos de ángulos geométricos.
- A veces los movimientos no se producen en la dirección de la pieza por restricciones externas o internas. En tales casos, a los movimientos *primarios* hay que sumarles otros de *sólido rígido* que los compatibilicen con las restricciones mencionadas. Estos movimientos de sólido rígido se pueden determinar:
 - por el método físico, que requiere entender cómo se producen exactamente estos movimientos, o
 - por el método matemático, incluyéndolos en fórmulas de validez general que igualan los movimientos de los nudos en los extremos de las piezas que a ellos concurren.
- El **principio de contragradiencia** marca las diferencias fundamentales en la forma de repartirse las cargas y los movimientos de un nudo :
 - las fuerzas en las piezas se proyectan sobre las del nudo, mientras que
 - los movimientos del nudo se proyectan sobre las piezas.

4.3 Movimientos por flexión

Muelle rotativo

Empezaremos otra vez con lo más fácil, que para movimientos por flexión (momento flector) es el muelle rotativo (figura 4.8). El giro θ se relaciona con el esfuerzo sufrido M mediante la sencilla fórmula $\theta = M/k$. La rigidez $k = M/\theta$ del muelle tiene dimensiones de fuerza×distancia y unidades de momento/radián. Aprenderemos casi todo lo que hay que aprender en este capítulo estudiando los movimientos de ménsulas y vigas formadas por piezas rígidas unidas por muelles rotativos.

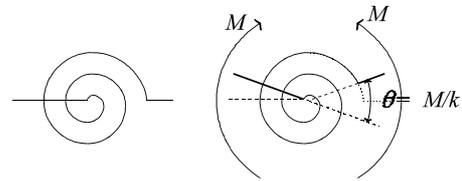


Figura 4.8
Movimiento en muelle rotativo

Ejemplo 4.3.1: Flexión discreta en una ménsula

La ménsula de la figura 4.9a está compuesta por tres piezas indeformables unidas por muelles rotativos cuyas rigideces (en $kN \times m/rad$) se dan en la propia figura. Sobre la estructura actúan las tres cargas puntuales que se muestran en la figura. Se quiere determinar los movimientos de los puntos de aplicación de las cargas.

Los momentos que deforman los muelles son más fáciles de calcular que de leer en la ley de momentos flectores (sobre la directriz AB) de la figura 4.9b. Son:

$$M_2 = -10 \times 0,5 = -5 \text{ kN} \times \text{m}$$

$$M_1 = -10 \times 2,5 - 10 \times 1,5 = -40 \text{ kN} \times \text{m}$$

Sufrirán los giros:

$$\theta_2 = \frac{M_2}{k_2} = -0,5 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \theta_1 = \frac{M_1}{k_1} = -2 \times 10^{-3} \text{ rad}.$$

La deformada se da en la figura 4.9c con los ángulos muy exagerados (200 veces).

Conviene calcular los movimientos desde un punto fijo; en nuestro caso es el A. Es obvio que el punto C no se mueve porque no hay ninguna deformación en el camino que va de A a C. Los movimientos del punto D son, de acuerdo con (4.1-1) (ver tabla 4.1 con coordenadas):

$$\theta_D = \theta_1 = -2 \text{ mrad} (\leftarrow)$$

$$u_D = -\theta_1(y_D - y_1) = -(-2)(-0,5) = -1 \text{ mm} (\leftarrow)$$

$$v_D = \theta_1(x_D - x_1) = -2 \times 1,5 = -3 \text{ mm} (\downarrow)$$

Los del punto E se calculan de igual manera y usando el principio de superposición:

$$\theta_E = \theta_1 + \theta_2 = -2,5 \text{ mrad} (\leftarrow)$$

$$u_E = -\theta_1(y_E - y_1) - \theta_2(y_E - y_2) = 2 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 = 1,25 \text{ mm} (\rightarrow)$$

$$v_E = \theta_1(x_E - x_1) + \theta_2(x_E - x_2) = -2 \times 2,5 - 0,5 \times 0,5 = -5,25 \text{ mm} (\downarrow)$$

Observa que los giros son todos negativos; los movimientos verticales, todos hacia abajo (negativos), y los horizontales, positivos por encima del eje AB y negativos, por debajo. Coincide con lo que se espera de la figura 4.9c. Los puntos de la directriz no tienen movimientos horizontales porque en ellos $\Delta y = 0$.

Es posible también calcular los movimientos desde un punto móvil cuyos movimientos de arrastre conozcamos. En tal caso hemos de considerar el efecto del arrastre y el relativo. Supón que hemos determinado los movimientos de F, $v_F = -2 \text{ mm}$, $\theta_F = -2 \text{ mrad}$. Desde él podemos calcular los de D y E como sigue:

$$\theta_D = \theta_F = -2 \text{ mrad}$$

$$u_D = u_F - \theta_F(y_D - y_F) = 0 + 2 \times (-0,5) = -1 \text{ mm}$$

$$v_D = v_F + \theta_F(x_D - x_F) = -2 - 2 \times 0,5 = -3 \text{ mm}$$

Tabla 4.1
Coordenadas de puntos de interés

Punto	Coordenadas	
	x	y
1	2	0
2	4	0
B	6	0
C	1,5	0,5
D	3,5	-0,5
E	4,5	0,5

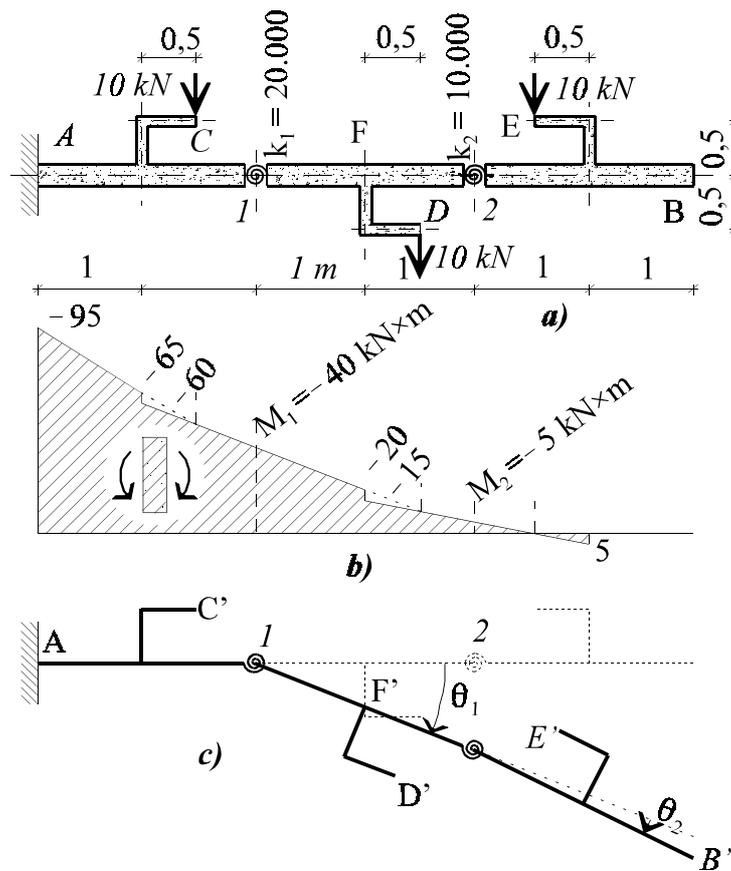


Figura 4.9
Ménsula rígida con giros concentrados del ejemplo 4.3-1

$$\theta_E = \theta_F + \theta_2 = -2 - 0,5 = -2,5 \text{ mrad}$$

$$u_E = u_F - \theta_F(y_E - y_F) - \theta_2(y_E - y_2) = 0 + 2 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 = 1,25 \text{ mm}$$

$$v_E = v_F + \theta_F(x_E - x_F) + \theta_2(x_E - x_2) = -2 - 2 \times 1,5 - 0,5 \times 0,5 = -5,25 \text{ mm}$$

Enseñanzas:

- Hemos resuelto un problema en que las deformaciones eran de giros concentrados.
- El giro en un punto es el momento flector en ese punto dividido por la rigidez en él.
- Por ello el primer paso es determinar los momentos flectores.
- Los movimientos causados en un punto por giros concentrados son:
 - sumas (superposición) de movimientos independientemente,
 - productos de giros por distancias (medidas perpendicularmente a la dirección del movimiento), como en (4.1-1),
 - de los giros que encontramos desde el punto de partida hasta llegar al nuestro por un camino sobre la estructura.
- Los movimientos se miden desde un punto de partida:
 - si el punto es fijo, resultarán movimientos absolutos; es lo conveniente;
 - si el punto es móvil, el resultado es relativo; para obtener el movimiento absoluto habrá que sumar los términos de arrastre:
 - ▶ el propio movimiento del punto, más
 - ▶ su giro por la distancia (en el caso de traslaciones).

Ejemplo 4.3.2: Flexión discreta en una viga; giros en los apoyos

La viga simplemente apoyada de la figura 4.10a está compuesta por tres piezas indeformables unidas por muelles rotativos cuyas rigideces (en $kN \times m / rad$) se dan en la propia figura. Sobre la estructura actúan las tres cargas puntuales que se muestran en la figura. Se quiere determinar los movimientos de los puntos de aplicación de las cargas.

Para calcular los giros en los muelles necesitamos encontrar los momentos flectores a que están sometidos. Éstos son mucho más fáciles de calcular que la ley de la figura 4.10b:

$$M_1 = 12,75 \times 2 - 9 \times 0,5 = 21 \text{ kN} \times \text{m}$$

$$M_2 = 14,25 \times 2 - 9 \times 0,5 = 24 \text{ kN} \times \text{m}$$

Los giros respectivos son $\theta_1 = M_1/k_1 = 1,05 \text{ mrad}$, $\theta_2 = M_2/k_2 = 2,4 \text{ mrad}$. Para que estos giros se produzcan y la viga se siga sustentando en A y B, es indispensable que se produzcan giros en los apoyos (figura 4.10c). Determinaremos el giro en A con la condición de que la flecha en B sea nula:

$$(a) \quad \begin{aligned} v_B &= \theta_A(x_B - x_A) + \theta_1(x_B - x_1) + \theta_2(x_B - x_2) \equiv 0 \\ v_B &= \theta_A \cdot 6 + 1,05 \times 4 + 2,4 \times 2 \equiv 0 \Rightarrow \theta_A = -1,5 \text{ mrad} \end{aligned}$$

El giro resulta negativo como anticipaba la figura 4.10c. El método de cálculo utilizado ha sido el general: hacer nula la flecha en otro apoyo. Para calcular θ_B hacemos lo mismo, anular la flecha en A:

$$(b) \quad v_A = -\theta_B \cdot 6 + \theta_2 \cdot 4 + \theta_1 \cdot 2 \equiv 0 \Rightarrow \theta_B = 1,95 \text{ mrad}$$

Una vez calculados los giros en los apoyos, podemos calcular los movimientos de cualquier punto de la viga, por la derecha o por la izquierda; por donde resulte *plus facile*.

Por el lado fácil (más cercano):

$$\begin{aligned} \theta_C &= \theta_A = -1,5 \text{ mrad} \\ u_C &= -\theta_A \times 0,5 = 0,75 \text{ mm} \\ v_C &= \theta_A \times 1,5 = -2,25 \text{ mm} \\ \theta_D &= \theta_A + \theta_1 = -0,45 \text{ mrad} \\ u_D &= -\theta_A \times (-0,5) - \theta_1 \times (-0,5) = -0,225 \text{ mm} \\ v_D &= \theta_A \times 3,5 + \theta_1 \times 1,5 = -3,675 \text{ mm} \\ \theta_E &= \theta_B = 1,95 \text{ mrad} \\ u_E &= -\theta_B \times 0,5 = -0,975 \text{ mm} \\ v_E &= -\theta_B \times 1,5 = -2,925 \text{ mm} \end{aligned}$$

Por el lado alejado:

$$\begin{aligned} \theta_C &= \theta_B - \theta_2 - \theta_1 = -1,5 \text{ mrad} \\ u_C &= -\theta_B \times 0,5 + \theta_2 \times 0,5 + \theta_1 \times 0,5 = 0,75 \text{ mm} \\ v_C &= -\theta_B \times 4,5 + \theta_2 \times 2,5 + \theta_1 \times 0,5 = -2,25 \text{ mm} \\ \theta_D &= \theta_B - \theta_2 = -0,45 \text{ mrad} \\ u_D &= \theta_B \times 0,5 - \theta_2 \times 0,5 = -0,225 \text{ mm} \\ v_D &= -\theta_B \times 2,5 + \theta_2 \times 0,5 = -3,675 \text{ mm} \end{aligned}$$

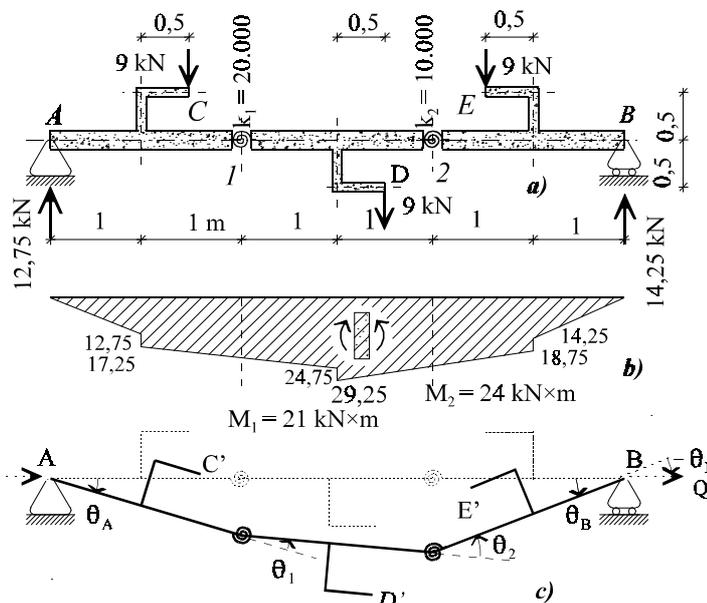


Figura 4.10
Viga simplemente apoyada con giros concentrados, ejemplo 4.3.2

$$\begin{aligned}\theta_E &= \theta_A + \theta_1 + \theta_2 = 1,95 \text{ mrad} \\ u_E &= -(\theta_A + \theta_1 + \theta_2) \times 0,5 = -0,975 \text{ mm} \\ v_E &= \theta_A \times 4,5 + \theta_1 \times 2,5 + \theta_2 \times 0,5 = -2,925 \text{ mm}\end{aligned}$$

Enseñanzas:

- Lo primero es determinar los esfuerzos deformantes: aquí, los momentos flectores.
- En el cálculo de movimientos en vigas biapoyadas intervienen siempre los giros en los apoyos;
 - olvidarse de ellos puede ser trágico: suelen dar la componente más importante del movimiento.
- Los giros en los apoyos se calculan imponiendo flecha cero en otro apoyo;
 - partimos del supuesto de que serán positivos y el cálculo determinará valor y signo.
- Los giros en los apoyos θ_A y θ_B son *giros absolutos* (medidos respecto de la directriz original); cuando son positivos:
 - suben los puntos a su derecha y
 - bajan los puntos que están a su izquierda.
- Los giros concentrados θ_1 y θ_2 son *giros relativos* (diferencia entre el giro por la derecha y el giro por la izquierda); cuando son positivos:
 - suben los puntos a diestra y siniestra.

Comprobación

Si venimos paseando desde P a Q siguiendo la deformada de la viga (figura 4.10c) efectuaremos los siguientes giros: θ_A , θ_1 , θ_2 y finalmente $-\theta_B$ para recuperar la orientación inicial. Por tanto:

$$\theta_A + \Sigma \theta_i - \theta_B = 0 \rightarrow \theta_B = \theta_A + \Sigma \theta_i$$

Hallazgos

En los dos ejercicios anteriores has descubierto las claves del cálculo de movimientos:

- En los puntos flexibles se producen *giros concentrados* de valor $\theta_i = M_i/k_i$
 - por lo que el primer paso es determinar los momentos flectores en ellos;
 - son de *raza relativa* (valor por la derecha menos valor por la izquierda) y tratan igual a los puntos a su derecha que a los a su izquierda.
- En ménsulas calculamos movimientos desde el empotramiento; en vigas apoyadas, desde los apoyos; aunque
 - podemos partir puntos móviles a condición de introducir los movimientos de arrastre.
- En vigas biapoyadas se producen giros en los apoyos:
 - es imprescindible calcular uno de ellos;
 - ▶ se calculan con la condición de flecha cero en otro apoyo:

$$(4.3-1) \quad \theta_A = -\frac{\Sigma \theta_i \times (L - x_i)}{L} \quad \theta_B = \frac{\Sigma \theta_i \times x_i}{L}$$

- ▶ la prueba del 9 es:

$$(4.3-2) \quad \theta_B = \theta_A + \Sigma \theta_i$$

- son de *raza absoluta*: suben (bajan) los puntos a su derecha y bajan (suben) los a su izquierda.

Siguiente objetivo

En los ejemplos siguientes pasaremos de giros discretos a giros continuos, repartidos; es decir, curvatura. Veremos lo poco que cambia el cálculo porque transformaremos los giros repartidos en unos pocos giros concentrados en puntos estratégicos, y todo volverá a ser como en los dos ejercicios precedentes.

Ejemplo 4.3.3: Ménsula con momento en la punta

Calculemos el giro y la flecha en el extremo de la ménsula de la figura 4.11a).

Cada rebanada dx de viga girará $d\phi = \chi dx = Mdx/EI$, así que en vez de los giros finitos concentrados en ciertos puntos de los ejemplos anteriores, tendremos giros infinitamente pequeños y en cantidad infinita desparramados por toda la ménsula. Como el momento flector tiene el mismo valor en toda la ménsula (figura 4.11b), la curvatura $\chi = M/EI$ es constante: la deformada es en realidad una circunferencia de radio $R = EI/M$ (figura 4.11c).

Los movimientos en B serán:

$$\theta_B = \sum_A^B \theta_i = \int_A^B d\phi = \int_0^L \frac{M(x)}{EI} dx$$

$$v_B = \sum_A^B \theta_i (L - x_i) = \int_A^B d\phi (L - x) = \int_0^L \frac{M(x)}{EI} (L - x) dx$$

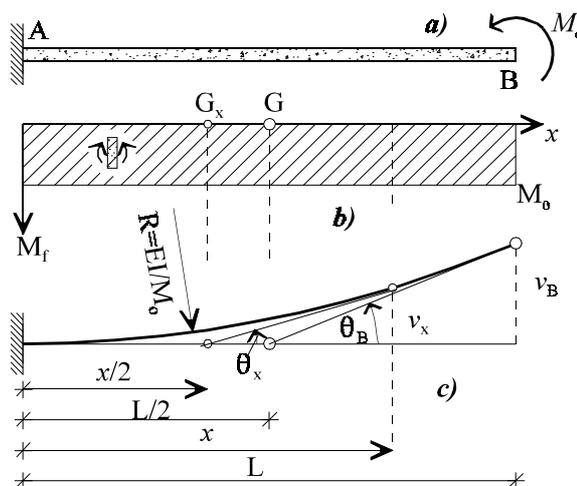


Figura 4.11

Ménsula con momento en el extremo del ejemplo 4.3-3

Las sumas de infinitésimos se han convertido en integrales definidas. Afortunadamente casi nunca las calcularemos hallando su primitiva y evaluándola en los extremos. Acudimos al teorema del centro de gravedad para afirmar que la primera de ellas es el área de momentos dividida de EI y la segunda, el momento del valor anterior respecto del punto $x = L$. En nuestro caso:

$$\theta_B = \int_0^L \frac{M(x)}{EI} dx = \frac{M_0}{EI} L$$

$$v_B = \int_0^L \frac{M(x)}{EI} (L - x) dx = \theta_B \frac{L}{2} = \frac{M_0}{EI} L \frac{L}{2} = \frac{M_0 L^2}{2EI}$$

Interpretación geométrica: teoremas de Mohr

El giro relativo entre A y B es igual al área de momentos entre esos puntos dividida de EI , y la flecha (distancia de B movido a la tangente en A) resulta como si todo ese giro estuviera concentrado en el centro de gravedad del área de momentos (figura 4.11c). Estos dos «hallazgos» se conocen ni más ni menos que con el nombre de Teoremas 1 y 2 de Mohr.

Con estos hallazgos es fácil calcular el giro y la flecha en cualquier punto x (figura 4.11c):

$$\theta(x) = \frac{\text{Área de } M_f^x}{EI} = \frac{M_0}{EI} x$$

$$v(x) = \theta(x)(x - x_G) = \frac{M_0}{EI} x \left(x - \frac{x}{2} \right) = \frac{M_0 x^2}{2EI}$$

Enseñanzas:

- Los movimientos de flexión los producen los momentos flectores: lo primero es determinar éstos.
- Hemos descubierto los **teoremas de Mohr**:
 - el giro relativo entre dos puntos es el área de momentos flectores entre ellos, dividida de EI ;
 - la flecha (movimiento, distancia) de un punto con relación a la tangente en otro es el producto del giro anterior, concentrado en el c.d.g. del área anterior, por su distancia al segundo punto.
- Si el punto de partida es un empotramiento fijo, los movimientos absolutos son iguales a los relativos.

«Giros gordos»

Como en las revoluciones, hemos dado un giro de 360°: todo ha cambiado y todo está igual que antes. Comenzamos con problemas poco reales de giros concentrados. Avanzamos «ideológicamente» a tratar problemas de curvaturas o giros distribuidos. Y encontramos que éstos últimos se reducen a los primeros si sabemos concentrar las curvaturas en puntos estratégicos donde se producen «giros gordos».

C.d.g.'s siempre sobre la directriz

Estos puntos son centros de gravedad totales o parciales áreas de curvaturas. Como las curvaturas se instalan en la directriz de la pieza, los c.d.g.'s hay que considerarlos *siempre sobre la directriz*, nunca despegados de ella según el capricho de la escala que hayamos querido elegir para representar la curvatura. (En buena ley, la curvatura habría que representarla en un plano perpendicular al de flexión; al del papel, en todos los ejemplos de dos dimensiones que tratamos aquí.) En la tabla 1.1 vimos las áreas y posiciones de los c.d.g.'s de diversas figuras y lo muy fácil que es recordarlas por la secuencia de los factores 1, 1/2, 1/3,... de las áreas y 1/2, 1/3, 1/4,... de los c.d.g.'s.

Ejemplo 4.3.4: Ménsula con carga en la punta

Queremos encontrar los movimientos del extremo B de la ménsula de la figura 4.12a.

La ley de momentos flectores es la de la figura 4.12b. Su área es $\frac{1}{2}b \times h$, su c.d.g. está en $x = b/3$. Las fórmulas son las mismas del problema anterior; sólo varía su evaluación:

$$\theta_B = \frac{\text{Área de } M_f|_A^B}{EI} = \frac{1}{2} \frac{-PL}{EI} L = -\frac{PL^2}{2EI}$$

$$v_B = \frac{\text{Área de } M_f|_A^B}{EI} (x_B - x_G) = \frac{1}{2} \frac{-PL}{EI} L \frac{2L}{3} = -\frac{PL^3}{3EI}$$

Si queremos evaluar $\theta(x)$, $v(x)$, consideramos el área de momentos entre A y x; es un trapecio cuyo c.d.g. no conocemos. Podemos evitarlo descomponiendo el área en un rectángulo más un triángulo o en dos triángulos. Por el primer procedimiento (figura 4.12d) sale (para abreviar llamamos $z = L - x$, después desharemos el cambio):

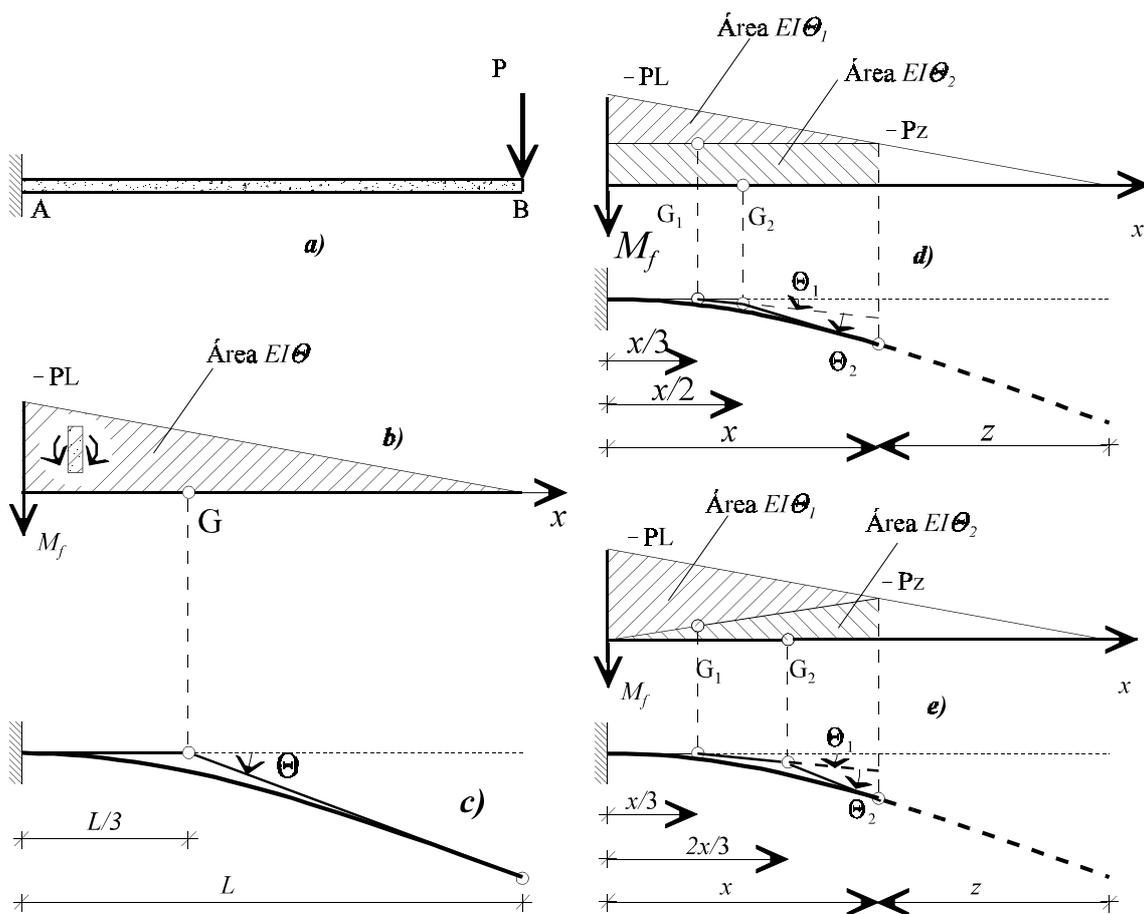


Figura 4.12
Diversos cálculos de los movimientos de una ménsula con una carga en la punta

$$\theta(x) = \int_{s=0}^{s=x} \frac{M_f(s)}{EI} ds = \Theta_1 + \Theta_2 = \left(-\frac{1}{2} \frac{P(L-z)}{EI} x \right) + \left(\frac{-Pz}{EI} x \right) = -\frac{PL^2}{2EI} \left[2 \frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

$$v(x) = \int_{s=0}^{s=x} \frac{M_f(s)}{EI} (x-s) ds = \Theta_1 \left(x - \frac{x}{3} \right) + \Theta_2 \left(x - \frac{x}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2} \frac{P(L-z)}{EI} x \right) \frac{2x}{3} + \left(\frac{-Pz}{EI} x \right) \frac{x}{2} = -\frac{PL^3}{6EI} \left[3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]$$

Por el segundo procedimiento (figura 4.12e):

$$\theta(x) = \Theta_1 + \Theta_2 = \left(-\frac{1}{2} \frac{PL}{EI} x \right) + \left(-\frac{1}{2} \frac{Pz}{EI} x \right) = -\frac{PL^2}{2EI} \left[2 \frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

$$v(x) = \Theta_1 \left(x - \frac{x}{3} \right) + \Theta_2 \left(x - \frac{2x}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2} \frac{PL}{EI} x \right) \frac{2x}{3} + \left(-\frac{1}{2} \frac{Pz}{EI} x \right) \frac{x}{3} = -\frac{PL^3}{6EI} \left[3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]$$

Será bueno que entiendas que si hubiéramos dividido por la otra diagonal del trapecio, los triángulos obtenidos habrían sido los mismos, sólo que «montados» a la inversa, el segundo sobre el primero.

Enseñanzas:

- Hemos resuelto un caso bastante general de cálculo de giros y flechas resolviendo inconscientemente las siguientes integrales:

$$(4.3-3) \quad \theta(x)|_0^x = \frac{1}{EI} \int_{s=0}^{s=x} M_f(s) ds$$

$$v(x)|_0^x = \frac{1}{EI} \int_{s=0}^{s=x} M_f(s) (x-s) ds$$

- Las hemos resuelto numéricamente aprovechando que:
 - *el giro es el área* de curvaturas (momentos/EI) entre los puntos;
 - *la flecha es el momento* de dicha área respecto del segundo punto.
- Cuando hay figuras complejas, se pueden descomponer en otras simples, cuyo c.d.g. conozcamos para tomar momentos;
 - no importa la forma de la descomposición, pero
 - los c.d.g. tienen que estar situados sobre la directriz.

Vigas apoyadas: novedades viejas

Quando calculamos movimientos en vigas simplemente apoyadas, surge el inconveniente visto en el ejemplo 4.3-2 de que tenemos que empezar calculando al menos un giro en un apoyo, que es de naturaleza *absoluta*, y que obtenemos obligando a que la flecha sea nula en otro apoyo.

Ejercita tu memoria

Los giros que algunas cargas sencillas producen en los apoyos los debes memorizar porque los necesitarás muy a menudo. La tabla 4.2 recoge los que te recomiendo encarecidamente que recuerdes. También has de saber obtenerlos con soltura. El tercero lo obtendremos a continuación.

Ejemplo 4.3.5: Viga apoyada con carga puntual

Calcularemos los giros en los apoyos de la tercera figura de la tabla 4.2 (figura 4.13a).

Moviéndonos desde A hasta B encontramos el giro θ_A de valor desconocido, y los giros θ_1 en G_1 , $x = 2a/3$ y θ_2 en G_2 , $x = L - 2b/3$ con los valores de las áreas triangulares que se dan a continuación (figura 4.13b). Obligaremos a que la flecha en B causada por todos ellos sea nula.

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \frac{Pab}{LEI} a \quad ; \quad \theta_2 = \frac{1}{2} \frac{Pab}{LEI} b$$

$$v_B = \theta_A L + \theta_1 \left(\frac{a}{3} + b \right) + \theta_2 \left(\frac{2}{3} b \right) = 0$$

$$\theta_A L + \frac{Pab}{6LEI} [a^2 + 3ab + 2b^2] = 0$$

$$\theta_A L + \frac{Pab}{6LEI} [(a+b)^2 + ab + b^2] = 0$$

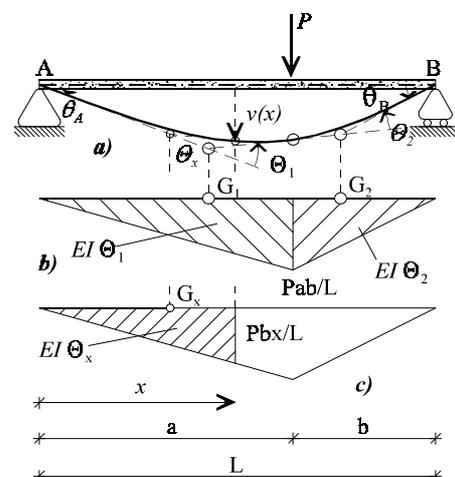


Figura 4.13
Cálculo de giros y flechas
en viga biapoyada con carga puntual del ejemplo 4.3-5

Tabla 4.2
Fórmulas de giros en apoyos causados por cargas sencillas que debes recordar

<p>$\theta_A = \frac{M_A L}{3EI}$ $\theta_B = -\frac{M_A L}{6EI}$</p> <p>a)</p>	<p>$\theta_A = -\frac{M_B L}{6EI}$ $\theta_B = \frac{M_B L}{3EI}$</p> <p>b)</p>
<p>$\theta_A = -\frac{Pab(L+b)}{6LEI}$ $\theta_B = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$</p> <p>c)</p>	<p>$\theta_A = -\frac{qL^3}{24EI}$ $\theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$</p> <p>d)</p>

$$\theta_A L + \frac{Pab}{6LEI} (L^2 + bL) = 0$$

$$\theta_A = -\frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

De manera simétrica resulta la otra fórmula. Si queremos calcular la flecha en $x \leq a$, consideramos los movimientos por θ_A y θ_x en $2x/3$:

$$v(x \leq a) = \theta_A x + \frac{1}{2} \frac{Pbx}{LEI} x \frac{1}{3} x = -\frac{Pbx}{6LEI} [a(L+b) - x^2]$$

Enseñanzas:

- Los giros en los apoyos se calculan con la condición de flecha nula en otro apoyo
- La flecha en un punto resulta del producto de los giros por las distancias:
 - los giros que encontramos desde un apoyo hasta el punto en cuestión; incluye:
 - el giro del apoyo, que es *absoluto*; cuando es positivo:
 - sube los puntos a la derecha,
 - baja los puntos a su izquierda;
 - y los *giros gordos* de las áreas de curvatura concentradas en sus c.d.g's, que son *giros relativos* porque, cuando son positivos, suben los puntos a diestra y siniestra;
 - por las distancias de esos giros al punto en cuestión, con los signos de las reglas anteriores.

Ejemplo 4.3.6: Viga biapoyada con carga uniforme

Calcularemos los giros en los apoyos de la viga biapoyada con carga uniforme (figura 4.14a) con poco esfuerzo aprovechando la simetría. Ésta exige $\theta_A = -\theta_B$, y como $\theta_A + \Sigma\theta_i = \theta_B$ resulta (figura 4.14b):

$$-\theta_A = \theta_B = \frac{1}{2}\Sigma\theta_i = \frac{1}{2}\int_A^B \frac{M_f(x)}{EI} dx = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{qL^2}{8EI} L = \frac{qL^3}{24EI}$$

que nos dice que al ser iguales los giros en los extremos, cada uno es la mitad del giro relativo que los separa, la mitad del área de curvaturas. Si queremos la flecha en el centro, consideramos que la parábola «grande» entre A y L/2 es un rectángulo con c.d.g. en G_A menos una parábola «pequeña» (como la de la tabla 1.1) con c.d.g. en G_1 (figura 4.14b):

$$v_{L/2} = \theta_A \frac{L}{2} + \frac{qL^2}{8EI} \frac{L}{2} \frac{L}{4} - \frac{1}{3} \frac{qL^2}{8EI} \frac{L}{2} \left(\frac{L}{2} - \frac{1}{4} \frac{L}{2} \right) = -\frac{5qL^4}{384EI}$$

Truco: Cuando la ley de curvatura es simétrica, el giro en el punto medio es nulo. Podemos situarnos en él y considerar que la viga son dos ménsulas que se curvan hacia arriba: la flecha aparente en los apoyos será igual y de signo contrario a la del punto medio:

$$v_{L/2}^B = \frac{qL^2}{8EI} \frac{L}{2} \frac{L}{4} - \frac{1}{3} \frac{qL^2}{8EI} \frac{L}{2} \frac{1}{4} \frac{L}{2} = \frac{5qL^4}{384EI}$$

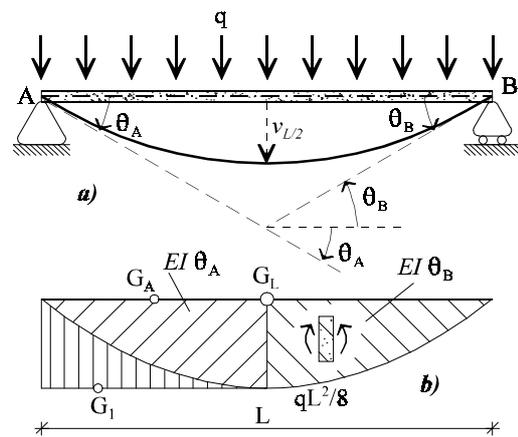


Figura 4.14

Calculo de flechas y giros en la viga biapoyada con sobrecarga uniforme del ejemplo 4.3-6

Enseñanzas:

- Cuando la ley de curvaturas es simétrica el cálculo se simplifica:
 - el giro en el centro de simetría es nulo;
 - los giros en los apoyos son, en valor, absoluto, la mitad del área de curvaturas;
 - la flecha en el centro se calcula mejor como flecha del apoyo en ménsula visto desde el centro.

Giros en rótulas

Los giros en las rótulas se calculan igual que los de los apoyos. Ello a pesar de que estos últimos son absolutos y los de las rótulas, relativos.

Ejemplo 4.3.7: Viga con rótula

Calcular los giros en C y R en la viga de la figura 4.15a.

Lo primero es advertir que la viga es isostática: le sobra un apoyo vertical pero su reacción *extra* se puede calcular con la condición adicional de momento flector nulo en la rótula. La ley de momentos flectores de la figura 4.15b se puede dibujar directamente con las siguientes consideraciones: en C debe valer $+M$ por estar aplicado allí el momento. Debe ser una recta hasta B con valor nulo en la rótula; por tanto en B valdrá $-M$. El momento flector en el apoyo A tiene que ser nulo y entre A y B la ley tiene que ser recta por no haber cargas repartidas. (Las reacciones de la figura 4.15a se pueden determinar por los saltos en la ley de cortantes o por $M_R = 0$ más las ecuaciones de equilibrio.) Con la ley de momentos de la figura 4.15b se puede estimar la deformada de la figura 4.15a. Observa que en la rótula tiene que cambiar el signo del momento flector y, por tanto, el sentido de la curvatura. La figura 4.15a sugiere que tanto θ_C como θ_R serán positivos.

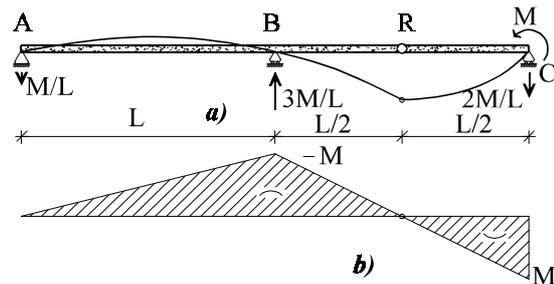


Figura 4.15

Viga con rótula del ejemplo 4.3.7

Por el método general de anular flechas en los apoyos:

$$v_B = -\theta_C L + \frac{1}{2} \frac{M L}{EI} \left(L - \frac{1}{3} \frac{L}{2} \right) + \theta_R \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{M L}{EI} \frac{1}{3} \frac{L}{2} = 0$$

La presencia de la rótula añade una incógnita más. Anularemos la flecha en el otro apoyo:

$$v_A = -\theta_C 2L + \frac{1}{2} \frac{M L}{EI} \left(2L - \frac{1}{3} \frac{L}{2} \right) + \theta_R \frac{3L}{2} - \frac{1}{2} \frac{M L}{EI} \left(L + \frac{1}{3} \frac{L}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{M}{EI} L \frac{2}{3} L = 0$$

Del sistema de ecuaciones resulta $\theta_C = 2ML/3EI$, $\theta_R = ML/EI$; efectivamente, con los signos que sugiere la deformada de la figura 4.15a.

Este método general nos dará resultados siempre. Con *trucos* se puede reducir el cálculo. Observa que la viga AB tiene la misma ley de momentos flectores que si, estando aislada, sufriera un momento $-M$ en B. Su giro será (tabla 4.2b) $\theta_B = -ML/3EI$. Igualamos ahora la flecha en la rótula por la izquierda y por la derecha:

$$v_R^{(izq)} \equiv -\frac{ML}{3EI} \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{ML}{EI} \frac{L}{2} \frac{L}{3} = -\theta_C \frac{L}{2} + \frac{1}{2} \frac{ML}{EI} \frac{L}{2} \frac{L}{3} \equiv v_R^{(der)}$$

se obtiene $\theta_C = 2ML/3EI$ directamente, sin pasar por calcular θ_R . Anulando la flecha en C:

$$v_C \equiv -\frac{ML}{3EI} L - \frac{1}{2} \frac{ML}{EI} \left(L - \frac{L}{3} \right) + \theta_R \frac{L}{2} + \frac{1}{2} \frac{ML}{EI} \frac{L}{3} = 0$$

se llega a $\theta_R = ML/EI$ sin necesidad de obtener θ_C . El desacoplar las ecuaciones tiene la ventaja de que un error en una no afecta a la otra.

Enseñanzas

- El momento flector tiene que ser cero en las rótulas;
 - ello añade una ecuación pseudo-estática al cálculo de reacciones,
 - que reduce el hiperestatismo en un grado (§6.1).
- Hemos puesto de relieve que el método general de cálculo de giros en rótulas (y en apoyos) consiste en imponer flecha cero en un (otro) apoyo.
- Se ha puesto de manifiesto que:
 - los giros en apoyos son *absolutos*, medidos respecto de la directriz original; los positivos:
 - suben los puntos a su derecha,
 - bajan los puntos a su izquierda;
 - los giros en rótulas son *relativos*, de la cara derecha respecto de la izquierda (como los de cualquier otro punto de la directriz, aunque *finitos*); los positivos:
 - suben *todos* los puntos : tanto los a su derecha como los a su izquierda.
- Hemos visto trucos para simplificar el cálculo de giros y flechas, como eran:
 - en una viga con ley de momentos lineal, el giro en los apoyos resulta de aplicar las fórmulas de los momentos en los extremos, igual que si estuviera aislada;
 - igualando flechas en una rótula nos podemos ahorrar de calcular su giro.
- Pintando la deformada que nos sugiere la ley de momentos flectores (la de *curvaturas*, realmente) podemos a menudo anticipar los signos de los giros.
- La deformada siempre tiene un cambio de curvatura en las rótulas (salvo casos patológicos).

Curvaturas térmicas

Las curvaturas pueden proceder de dos causas:

- los momentos flectores, dadas por $\chi = M/EI$, en (3.5-1b)
- las deformaciones térmicas, dadas por $\chi = -\alpha(\Delta T_s - \Delta T_i)/h$ en (3.6-1) o por (3.6-8) en el caso más general.

Se pueden sumar algebraicamente las unas con las otras. No se puede invertir, en cambio $M = \chi EI$ a menos que quitemos de χ la parte térmica.

Para usar las curvaturas térmicas conviene reescribir las fórmulas de la tabla 4.2 de forma que aparezcan en ellas las cargas exteriores sino sus curvaturas; así las fórmulas a, b y c, se pueden reinterpretar como las dadas en la figura 4.16. (Observa que de la tercera de ellas se obtienen las otras dos como casos particulares.)

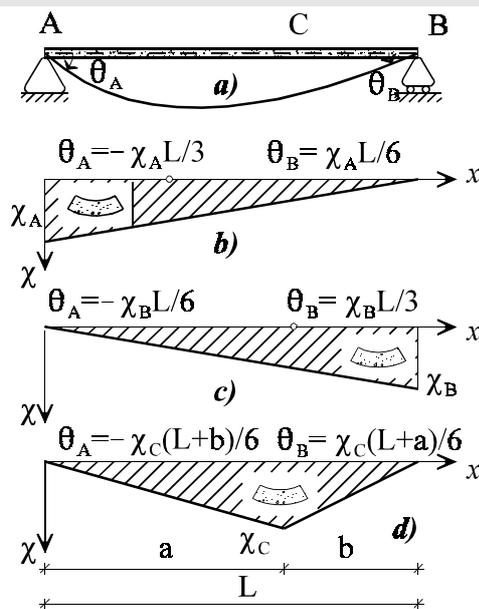


Figura 4.16
Giros en apoyos producidos por curvaturas lineales

Ejemplo 4.3.8: Curvatura térmica

La ménsula de la figura 4.17a tiene por sección la mostrada en la figura 4.17b, que está formada por dos materiales con el mismo módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ pero distinto coeficiente de dilatación térmica. En el cuarto superior, $\alpha = 5 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$; en la parte inferior, $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Cuando toda la ménsula se calienta 50°C , se pide:

a) Dibujar el diagrama de tensiones normales en cualquier sección.

b) Dibujar el diagrama de deformaciones de cualquier sección.

c) Calcular los movimientos del extremo B de la ménsula.

a) Aplicaremos el método del «dictador» de la sección 3.6. Las tensiones que anulan toda deformación son las de la figura 4.17c. Para mantenerlas necesitaríamos apoyos que nos proporcionaran reacciones horizontales de 640 t y momentos de 96 t×m; como no los tenemos, habremos de liberar las tensiones correspondientes, que son las mostradas en la figura 4.17d. La superposición de las tensiones «del dictador» y las liberadas da como resultante el diagrama de la figura 4.17e para cualquier sección de la ménsula.

b) Las deformaciones son la suma de las térmicas más las que producen las tensiones de la figura 4.17e, o lo que es lo mismo, las correspondientes a las tensiones de la figura 4.17d, que dan un diagrama afín a este mismo con los valores divididos por $E = 2 \times 10^6$. Esto equivale a alargamiento y curvatura:

$$\epsilon_G = \frac{4.250 - 250}{2E} = 1 \times 10^{-3}$$

$$\chi = -\frac{4.250 + 250}{0,8E} = -2,8125 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$$

valores que igualmente podríamos haber calculado con N/EA y M/EI .

c) Con los valores de ϵ_G y χ calculados se obtienen los siguientes movimientos del extremo B:

$$u_B = \int_A^B \epsilon(x) dx = 1 \times 10^{-3} \times 6 = 6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta_B = \int_A^B \chi(x) dx = -2,8125 \times 10^{-3} \times 6 = -16,875 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$v_B = \int_A^B \chi(x)(x_B - x) dx = -2,8125 \times 6 \times 3 = -50,625 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Enseñanzas:

- En una sección que sufre deformaciones impuestas con distribución no lineal en el canto, hemos calculado:
 - tensiones internas,
 - deformaciones y
 - movimientos.
- Hemos empleado el método del dictador de la sección 3.6:
 - aplicamos tensiones de inmovilización,
 - vimos los esfuerzos que necesitaríamos para mantenerlas, y
 - liberamos las tensiones de los esfuerzos que no podíamos mantener.
- El diagrama de tensiones era la superposición de:
 - las tensiones del dictador,
 - con distribución irregular (no plana)
 - y las tensiones liberadas,
 - con distribución plana,
 por lo que resultó un diagrama de tensiones irregular, no plano.

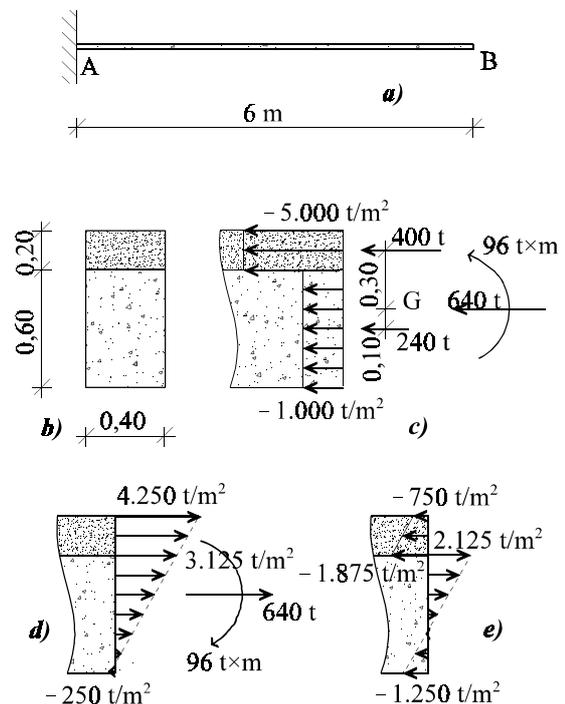


Figura 4.17
Estructura y diagramas del ejemplo 4.3.8

- El diagrama de deformaciones, en cambio:
 - había de resultar necesariamente plano (por la hipótesis de Navier)
 - y se corresponde con el de tensiones liberadas (divididas por E)
 - porque las deformaciones térmicas y las de las tensiones del dictador se anulan mutuamente,
 - ya que para eso introdujimos las tensiones del dictador.
- Los movimientos resultaron los correspondientes al diagrama de deformaciones plano:
 - ϵ_G nos produce el movimiento horizontal y
 - χ nos produce los otros dos movimientos:
 - giro, integral de χ
 - movimiento vertical, giro concentrado por distancia horizontal.

Resumen:

- Los momentos flectores producen curvaturas en las vigas, que a su vez causan flechas y giros en el plano de flexión;
 - para calcular flechas y giros lo primero es dibujar la ley de momentos flectores.
- Hemos avanzado evolutivamente viendo los movimientos:
 - por giros concentrados en puntos discretos de la directriz;
 - por curvatura o giros distribuidos de manera continua sobre la directriz,
 - y concluido que se podía tratar como por giros «gordos», concentrados
 - localizados en los centros de gravedad del área de curvaturas,
 - siempre sobre la directriz (en piezas rectas).
- Los pasos para el cálculo de flechas y giros son:
 - obtener la ley de momentos flectores
 - y pasarla a ley de curvaturas dividiéndola por EI ,
 - para el cálculo de giros:
 - sumar los giros encontrados desde el punto de partida al de llegada,
 - o integrar las curvaturas
 - lo cual casi siempre se reduce a calcular sus áreas;
 - para el cálculo de flechas:
 - sumar los productos de *giros concentrados* \times *distancias* desde la salida hasta la meta,
 - o integrar curvaturas por distancias,
 - lo cual casi siempre se reduce al caso de giros concentrados una vez que reemplazamos las áreas de curvatura por giros «gordos» situados en los c.d.g.'s de aquéllas;
 - centros de gravedad que (en piezas rectas) están siempre situados sobre la directriz de la viga (no, en el interior de la ley de curvaturas).
- Cuando calculamos movimientos en vigas biapoyadas es imprescindible empezar con el cálculo de giros en los apoyos;
 - *los giros en los apoyos (y los giros en rótulas) se calculan con la condición de flecha cero en otro apoyo,*
 - aunque sean de distinta clase social.
- Conviene pensar que hay giros de dos clases sociales:
 - *absolutos*, como el de cualquier punto de la directriz, incluidos los apoyos, que cuando son positivos
 - suben los puntos a su derecha
 - y bajan los a su izquierda, y
 - *relativos*, los que se producen en rótulas o da la curvatura en cualquier punto, cuyos positivos
 - suben los puntos a su derecha,
 - y *suben también* los puntos a su izquierda.
- Cuando las curvaturas provienen de efectos térmicos el procedimiento de cálculo es el mismo, pero
 - debemos reinterpretar las fórmulas dadas para cargas y fijarnos en las curvaturas;
 - así las de la figura 4.16 son las mismas tres primeras de la tabla 4.2,
 - reinterpretando $M_A/EI \rightarrow -\chi_A$, $M_B/EI \rightarrow \chi_B$, $Pab/LEI \rightarrow \chi_C$

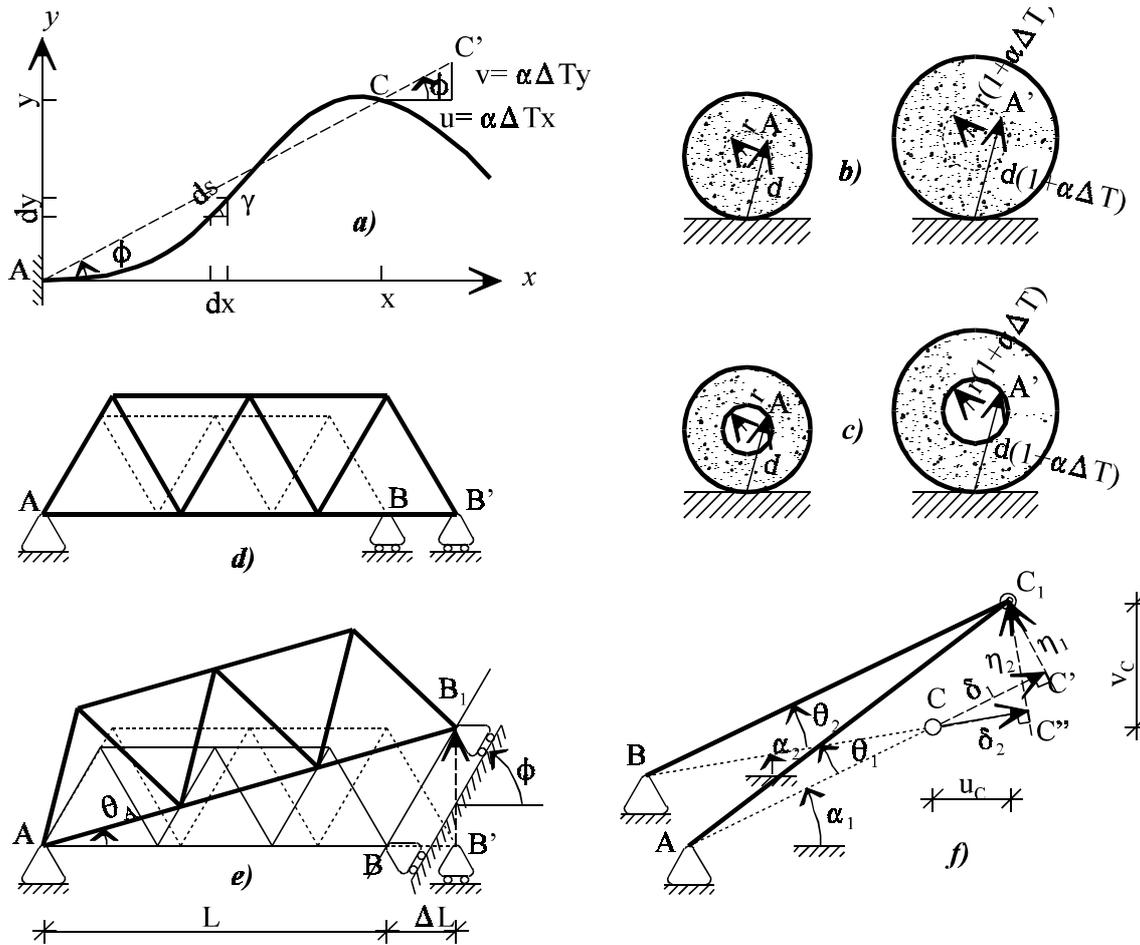


Figura 4.18
Movimientos por dilatación uniforme

4.4 Más sobre movimientos. Bresse

Dilatación uniforme

En la pubertad aprendimos a calcular los movimientos por dilatación uniforme de una barra recta de longitud L . Cuando la barra es curva como la de la figura 4.18a, el cálculo de dilatación uniforme se hace considerando que el elemento ds se alargará $\alpha \Delta T ds$. Al sufrir toda la estructura un mismo incremento de temperatura ΔT , el punto $C(x,y)$ se moverá hasta $C'(x+u,y+v)$. Su movimiento horizontal u será:

$$(4.4-1) \quad u(x,y) = \int_A^C (\alpha \Delta T ds) \cos \gamma = \alpha \Delta T \int_0^x dx = \alpha \Delta T x$$

siendo γ es el ángulo (geométrico) que forma la tangente a la curva con el eje x , por lo que $ds \cdot \cos \gamma = dx$. Operando igual sale la expresión $v(x,y) = \alpha \Delta T y$. La moraleja es que:

La estructura se agranda homotéticamente

Los movimientos resultan ser independientes del camino de la integral y cumplen $v/u = y/x = \tan \phi$. *el movimiento de cada punto C de la estructura curvilínea es el mismo que habría tenido como perteneciente a una barra ficticia AC que lo uniera con el punto fijo A. Por lo tanto: Una dilatación constante transforma una estructura en otra homotética con la original de razón $1 + \alpha \Delta T$.*

Paradoja

No acaban aquí las sorpresas. El punto A de la moneda con agujero de la figura 4.18c se mueve hasta A' lo mismo que el mismo punto de la moneda maciza de la figura 4.18b. En efecto, cada circunferencia de longitud $2\pi r$ se convertirá en otra de longitud $2\pi r(1 + \alpha \Delta T)$. Para alcanzar esta nueva longitud la nueva circunferencia habrá de adquirir un radio $r' = r(1 + \alpha \Delta T)$; todo sucede como si el radio se dilatara igual en la parte que cae sobre material que en la que cae sobre agujero. Por consiguiente: *En una dilatación uniforme, el material "de los agujeros" se dilata igual que el del resto de la estructura (paradoja de Fernández).*

Giros de compatibilidad

Cuando los apoyos no sean benévolos como los de las figuras 4.18a,d sino *aviesos*, impondrán a la estructura giros de sólido rígido, como ya vimos en el ejemplo 4.2.3. Así, la estructura de la figura 4.18e no puede agrandarse homotéticamente porque el apoyo B no puede ir a B' . En cinemática convencional, B , que debe quedar alejado de A la distancia AB' , iría a parar al punto intersección de la circunferencia de centro A y radio AB' con la recta BB_1 , o sea a B'' . El cálculo geométrico sería enrevesado; afortunadamente, con la cinemática de movimientos pequeños, la circunferencia mencionada degenera en un segmento perpendicular a AB' , el cual interseca a la superficie inclinada del apoyo en B_1 . B' va, pues, a parar a B_1 . *El apoyo impone un giro de sólido rígido de toda la estructura*, θ_A , cuyo cálculo resulta inmediato:

$$(4.4-2) \quad \theta_A = \frac{B'B_1}{AB'} = \frac{\Delta L \operatorname{tg} \phi}{L + \Delta L} \approx \frac{\Delta L}{L} \operatorname{tg} \phi$$

No pases por alto el detalle de calcular el giro con la longitud original AB y no con la deformada AB' porque ésta incluye el movimiento BB' . Ahora podemos aplicar la superposición de los dos movimientos: el de la traslación, como si B efectivamente hubiera ido a B' , más el de giro (corrector de la posición imposible), calculados independientemente:

$$(4.4-3) \quad \left. \begin{aligned} u(x,y) &= \alpha \Delta T x - \theta_A y \\ v(x,y) &= \alpha \Delta T y + \theta_A x \end{aligned} \right\}$$

En (4.4-2) hemos razonado físicamente, micro-cinemáticamente, para encontrar los movimientos de todos los puntos de la estructura de la figura 4.18e. En (4.4-3) hemos seguido una formulación matemática más sencilla de construir.

Otros giros de compatibilidad

Además de inducidos por apoyos *aviesos*, los giros de sólido rígido de una parte de la estructura pueden venir impuestos por *compatibilidad* con los movimientos de otras partes de la estructura., como ya vimos en el ejemplo 4.2.4. Así, un calentamiento en el pórtico triarticulado de la figura 4.18f, forzará a la barra AC a alargarse δ_1 y a la BC , δ_2 . Si pretendiéramos que estos alargamientos ocurrieran en las direcciones de las propia barras, el punto C de la barra AC iría a C' y el mismo punto de la barra BC iría a C'' . Afortunadamente, las barras resolverán esta discrepancia de intenciones sin crear tensión (literalmente), realizando pequeños giros θ_1 y θ_2 en torno a A y B para llegar al punto de acuerdo común C_1 como si ejecutaran un paso de baile agarrado en perfecta sintonía.

En geometría convencional C_1 sería el punto de intersección de la circunferencia de centro en A y radio $AC' = AC + \delta_1$ con la de centro en B y radio $BC'' = BC + \delta_2$. En esta nuestra cinemática de movimientos pequeños la primera circunferencia degenera en un segmento perpendicular a AC' y la segunda en otro perpendicular a BC'' . Estos segmentos intersecan en C_1 , y éste será, pues, el destino final del punto C . El problema que nos ocupa es, por consiguiente, el de hallar las componentes horizontal u_C y vertical v_C del desplazamiento CC_1 , y/o determinar los giros θ_1 y θ_2 de las barras. Esto se resuelve mediante la condición de compatibilidad en desplazamientos, que escrita vectorialmente es $\delta_1 + \eta_1 = \delta_2 + \eta_2$. Los vectores η_i son de dirección conocida, la perpendicular a su respectivo δ_i , pero de módulo desconocido (incógnita a determinar). Igualando las componentes de los movimientos sobre cada eje por separado resulta un sistema de ecuaciones que permite obtener las incógnitas η_1, η_2 . Sin embargo, no es este procedimiento *físico* el que te recomiendo para resolver el problema.

Método general

Resulta más fácil resolver el problema mediante el método matemático descrito antes. El movimiento $u_C^{(AC)}$ del punto C como perteneciente a la barra AC primer miembro de la primera ecuación que sigue) es igual al $u_C^{(BC)}$ del mismo punto C como perteneciente a la barra BC (segundo miembro de la primera ecuación), y lo mismo sucede con sus movimientos v (segunda ecuación):

$$(4.4-4) \quad \left. \begin{aligned} u_C &\equiv \alpha \Delta T_1 (x_C - x_A) - \theta_1 (y_C - y_A) = \alpha \Delta T_2 (x_B - x_A) - \theta_2 (y_C - y_B) \\ v_C &\equiv \alpha \Delta T_1 (y_C - y_A) + \theta_1 (x_C - x_A) = \alpha \Delta T_2 (y_C - y_B) + \theta_2 (x_C - x_B) \end{aligned} \right\}$$

Una vez resuelto el sistema anterior, entrando en algún miembro de cada ecuación con los θ_i encontrados se obtienen los movimientos u_C, v_C , respectivamente.

Dilatación no uniforme

En el caso en que la dilatación no sea constante la estructura ya no se agranda homotéticamente y tendremos que escribir las integrales en (4.4-1):

$$(4.4-5) \quad \left. \begin{aligned} u(x,y) &= \int_A^C \alpha \Delta T(s) ds \cos \gamma - \theta_A y \\ v(x,y) &= \int_A^C \alpha \Delta T(s) ds \operatorname{sen} \gamma + \theta_A x \end{aligned} \right\}$$

aunque rara vez buscaremos la primitiva: normalmente bastará con calcular el área encerrada por la función ΔT . Los giros de sólido rígido θ_A son los que la estructura deba de efectuar para compatibilidad sus movimientos con los apoyos o con otra parte de la estructura.

Ejemplo 4.4.1: Viga con dilatación no uniforme

La viga inclinada de la figura 4.19 está sustentada por un apoyo fijo en A y por un apoyo en B que desliza sobre un plano inclinado 45° . La viga sufre un incremento térmico constante en cada sección transversal pero variable linealmente desde 25°C en el extremo A a 50°C en el B. El coeficiente de dilatación lineal del material es $\alpha = 10^{-5}\text{C}^{-1}$. Se pide determinar el campo de movimientos de la estructura.

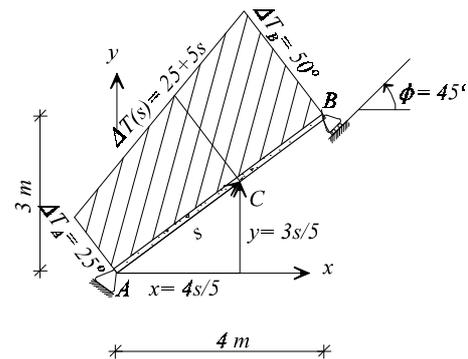


Figura 4.19
Viga inclinada del ejemplo 4.4.1

La expresión analítica del incremento de temperatura es $\Delta T(s) = 25 + 5s$. Cada elemento de viga de longitud ds se alargará $\alpha \Delta T(s) ds$. El movimiento del punto C según la dirección de la viga propia será:

$$w_C(s) = \alpha \int_A^C \Delta T(s) ds = \alpha \int_0^s (25 + 5s) ds = \alpha \left(25s + \frac{5}{2}s^2 \right)$$

cuya integral hemos podido resolver analíticamente o calculando el área del trapecio de la figura. Este movimiento dará dos componentes, horizontal y vertical. Además, como el extremo B no se puede mover en la propia dirección AB, la viga entera realizará un giro de sólido rígido θ_A para permitir el movimiento de B en el sentido debido. Esto ya lo vimos en el ejemplo 4.2.3. Los movimientos de cualquier punto de la viga vienen, pues, dados por:

$$u(s) = 10^{-5} \left(25s + \frac{5}{2}s^2 \right) \frac{4}{5} - \theta_A \frac{3}{5}s$$

$$v(s) = 10^{-5} \left(25s + \frac{5}{2}s^2 \right) \frac{3}{5} + \theta_A \frac{4}{5}s$$

El giro θ_A se calcula con la condición de que $v_B/u_B = v(s=5)/u(s=5) = 1$. Resulta $\theta_A = 5,357 \times 10^{-5} \text{ rad}$.

Enseñanzas:

- Hemos resuelto un problema general de alargamiento térmico con dos dificultades:
 - una calentamiento no uniforme, y
 - un apoyo *avieso* que forzaba un giro de sólido rígido
- La integral de la temperatura la hemos resuelto numéricamente, calculando el área bajo la función $\Delta T(s)$
- El cálculo ha resultado muy sencillo por el método *matemático*:
 - por el método *físico* habríamos tenido que hallar la intersección de dos rectas;
 - sin la simplificación de movimientos pequeños habríamos tenido que hallar la intersección de una circunferencia con una recta.

Añadimos términos

Si aparte de dilataciones tuviéramos deformaciones $\epsilon = N/EA$ por esfuerzo axil como en §4.2, habría que incluirlas en la fórmula (4.4-4) y quedaría:

$$(4.4-6) \quad u_C = u_A - \theta_A (y_C - y_A) + \int_A^C \left(\frac{N(s)}{EA} + \alpha \Delta T(s) \right) \cos \gamma ds$$

$$v_C = v_A + \theta_A (x_C - x_A) + \int_A^C \left(\frac{N(s)}{EA} + \alpha \Delta T(s) \right) \sen \gamma ds$$

Bresse

Si además tenemos deformaciones de curvatura, bien sea curvatura térmica χ_T (3.6-8) o de flexión M/EI y giros θ_i concentrados en rótulas con coordenadas (x_i, y_i) como en §4.3, tendremos:

$$(4.4-7) \quad \theta_C = \theta_A + \sum_i \theta_i + \int_A^C \left(\frac{M(s)}{EI} + \chi_T(s) \right) ds$$

$$u_C = u_A - \theta_A (y_C - y_A) - \sum_i \theta_i (y_C - y_i) + \int_A^C \left(\frac{N(s)}{EA} + \epsilon_T(s) \right) \cos \gamma ds - \int_A^C \left(\frac{M(s)}{EI} + \chi_T(s) \right) (y_C - y) ds$$

$$v_C = v_A + \theta_A (x_C - x_A) + \sum_i \theta_i (x_C - x_i) + \int_A^C \left(\frac{N(s)}{EA} + \epsilon_T(s) \right) \sen \gamma ds + \int_A^C \left(\frac{M(s)}{EI} + \chi_T(s) \right) (x_C - x) ds$$

donde la dilatación lineal viene incluida en el término $\epsilon_T(s)$ para el caso general en que no sea uniforme en el canto, sino dada por la fórmula (3.6-7).

No debes aprender la fórmula de memoria; debes entender la influencia de cada término.

Resumen:

- Bajo un incremento de temperatura uniforme, una estructura isostática sufre:
 - un crecimiento homotético, siempre, en el cual los movimientos de un punto se producen en la dirección del radio vector que lo une al punto fijo; y quizás
 - un giro de sólido rígido, que puede ser causado:
 - por imposición de los apoyos, o
 - para moverse en sintonía con otras partes de la estructura.
- El cálculo del movimiento de un punto se puede referir a un punto *no* inmóvil, a condición de
 - sumar el movimiento de arrastre, y
 - añadir el producto del giro de arrastre por la distancia, con su signo.
- Cuando hay movimientos de sólido rígido y otros por deformaciones, los movimientos totales se pueden obtener por superposición de ambas causas.
- Los movimientos de sólido rígido son:
 - giro único, el mismo para todos los puntos de la viga, y
 - traslaciones que varían linealmente.
- La fórmula de Bresse calcula el movimiento *absoluto* de un punto a partir de otro cuyos movimientos sean conocidos. Incluye:
 - movimientos de arrastre del punto de partida,
 - que incluye todos los movimientos de sólido rígido, lineales
 - desplazamientos u_A, v_A ,
 - giro θ_A , por su brazo;
 - movimientos relativos:
 - alargamientos $\epsilon(s)$,
 - se integran **proyectados** sobre los ejes: $\cos \gamma, \sin \gamma$ son las proyecciones unitarias; γ es el ángulo que la tangente a la curva AB forma en cada punto con el eje $+x$;
 - giros concentrados θ_i , por sus brazos, sumados,
 - curvaturas $\chi(s)$, por sus brazos, integradas.
 - aplica el principio de superposición; por consiguiente:
 - cada componente debe ser calculada ignorando las demás,
 - es decir, sobre la estructura original.
- Los giros concentrados θ_A, θ_i positivos mueven los puntos por encima y a su derecha:
 - hacia la izquierda, produciendo Δu negativo,
 - hacia arriba, produciendo Δv positivo;

4.5 Problemas de cálculo de movimientos

Problema 4.5.1: Viga en flexión

La viga cargada de la figura 4.20a tiene una rigidez a flexión $EI = 200.000 \text{ kN}\times\text{m}^2$. Se pide:

- a) Calcular el giro en el apoyo A.
- b) Obtener la flecha en el punto medio C.

a₁) Calcularemos el giro en A de dos maneras. Ésta primera será aplicando las fórmulas c) y b) de la tabla 4.2:

$$\theta_A = -\frac{100 \times 4 \times 4(8+4) + 60 \times 6 \times 2 \times (8+2)}{6 \times 8 EI} - \frac{100 \times 8}{6 EI} = -\frac{416,667}{EI} = -2,083 \text{ mrad}$$

a₂) En este segundo procedimiento necesitamos dibujar la ley de momentos flectores (imprescindible, de todos modos, para el cálculo de la flecha) y acotar la posición del punto D de corte con el eje x (figura 4.20b). La descomponemos mentalmente en cuatro triángulos y un rectángulo. Aplicamos el procedimiento general de cálculo del giro en un apoyo, que es forzar a que la flecha sea cero en el otro:

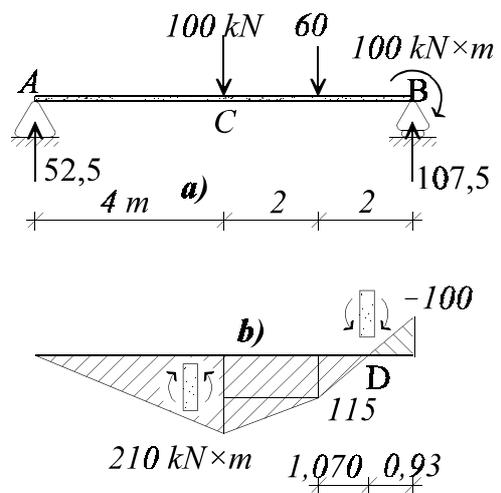


Figura 4.20
Viga y diagramas del problema 4.5.1

$$v_B = \theta_A 8 + \frac{1}{2} \frac{210}{EI} 4 \left(8 - \frac{2}{3} 4 \right) + \frac{115}{EI} 2 \left(2 + \frac{1}{2} 2 \right) + \frac{1}{2} \frac{210 - 115}{EI} 2 \left(2 + \frac{2}{3} 2 \right) + \frac{1}{2} \frac{115}{EI} 1,070 \left(2 - \frac{1}{3} 1,070 \right) - \frac{1}{2} \frac{100}{EI} 0,930 \frac{1}{3} 0,930 = 0 \Rightarrow \theta_A = -\frac{416,667}{EI} = -2,083 \text{ mrad}$$

Parece claro que cuando se pueda es más fácil aplicar las fórmulas.

b) Aunque no nos lo hubieran pedido, el giro en A habríamos tenido que calcularlo porque ahora nos es imprescindible:

$$v_C = \theta_A 4 + \frac{1}{2} \frac{210}{EI} 4 \frac{1}{3} 4 = -\frac{1.107}{EI} = -5,533 \text{ mm}$$

Enseñanzas:

- Para calcular flechas en una viga biapoyada necesitamos obtener antes:
 - la ley de momentos flectores y
 - el giro en un apoyo.
- El giro en un apoyo se puede calcular:
 - mediante fórmulas
 - ▶ recomendable cuando se tienen;
 - o a partir de la ley de momentos flectores,
 - ▶ haciendo nula la flecha en el otro extremo.
- Las flechas se calculan como suma de los productos de *giro* × *distancia perpendicular*:
 - empezando con el giro de un apoyo,
 - ▶ que es absoluto, sube los puntos a su derecha y baja los de su izquierda,
 - y siguiendo con los giros que resultan de concentrar las áreas de curvatura en sus c.d.g.'s,
 - ▶ giros que son relativos, suben los puntos a diestra y siniestra.

Problema 4.5.2: Otra viga en flexión

En la viga de la figura 4.21a, cuya rigidez es $EI = 2 \times 10^5 \text{ kN} \times \text{m}^2$, se pide calcular la flecha en el punto C.

1) Lo haremos de dos maneras; ésta será directa. Necesitamos el giro en B. Una vez obtenida la ley de momentos flectores de la figura 4.21b, el giro se calcula mediante:

$$v_A = -\theta_B 8 + \frac{1}{EI} \int_0^8 M(x) x dx =$$

$$= -\theta_B 8 + \frac{1}{EI} \int_0^4 \left(167,5x - 60 \frac{x^2}{2} \right) x dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{190}{EI} 2,621 \left(4 + \frac{1}{3} 2,621 \right) - \frac{1}{2} \frac{100}{EI} 1,379 \left(8 - \frac{1}{3} 1,379 \right) = 0$$

Resulta $\theta_B = 293,4/EI = 1,467 \text{ mrad}$ y con este valor se obtiene:

$$v_C = -\frac{293,4}{EI} 4 + \frac{1}{2} \frac{190}{EI} 2,621 \frac{1}{3} 2,621 +$$

$$- \frac{1}{2} \frac{100}{EI} 1,379 \left(4 - \frac{1}{3} 1,379 \right) = -\frac{1.200}{EI} = -6,00 \text{ mm}$$

2) Ahora lo haremos evitando la integral anterior (aunque no representa una dificultad excesiva) mediante un truco común (figura 4.21b): consideramos la rama curva FA de la ley de momentos flectores como la suma de la rama recta positiva FG con la curva negativa CH. De ésta última conocemos su área y la posición de su c.d.g.:

$$v_A = -\theta_B 8 + \frac{1}{2} \frac{480}{EI} 6,621 \frac{1}{3} 6,621 - \frac{1}{3} \frac{480}{EI} 4 \frac{1}{4} 4 - \frac{1}{2} \frac{100}{EI} 1,379 \left(8 - \frac{1}{3} 1,379 \right) = 0$$

Comprueba que se obtiene con más facilidad el mismo valor del giro en B.

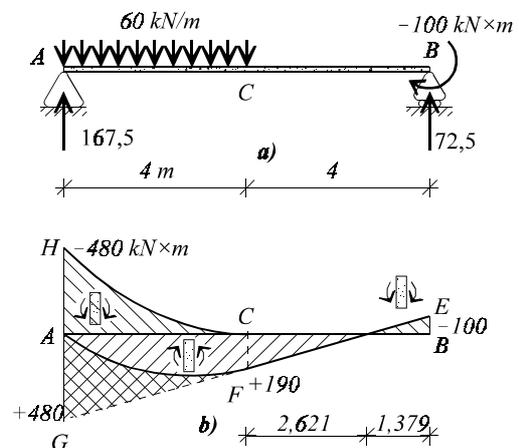


Figura 4.21
Viga y diagramas del problema 4.5.2

Enseñanzas:

- Al aparecer en la ley de momentos flectores una parábola de 2º grado sin tangente horizontal, hemos tenido dificultades para realizar los cálculos. Lo hemos resuelto de dos maneras:
 - integrando analíticamente la parábola de 2º grado, y
 - descomponiéndola en la diferencia entre:
 - ▶ la recta producida por las cargas puntuales y el momento que estaban a la derecha, y
 - ▶ la parábola de la carga uniforme aislada.

Problema 4.5.3: Viga con rótula

La viga de la figura 4.22a está empotrada en A, apoyada en B y tiene una rótula en C. Su rigidez a flexión es $EI = 10^5 \text{ kN}\times\text{m}^2$. Se pide:

- a) Dibujar y acotar la ley de momentos flectores
- b) Calcular el giro relativo en la rótula.
- c) Dibujar la ley de giros y encontrar las secciones con giro máximo y giro nulo.
- d) Calcular la flecha en la sección C de la rótula.

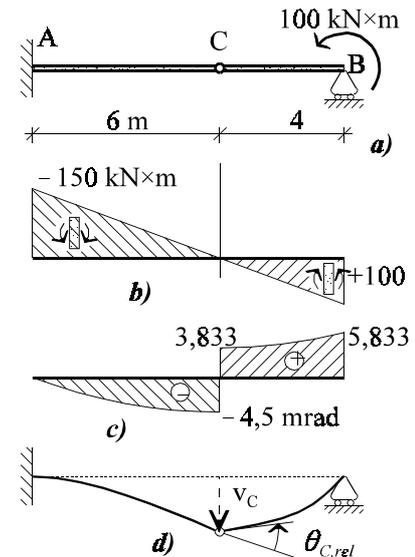


Figura 4.22
Viga con rótula del problema 4.5.3

a) El efecto de la rótula lo hemos visto ya en los ejemplos 2.7.2, 4.2.4 y 4.3.7. En ella el momento *flector* ha de ser cero, lo que te da una ecuación pseudoestática adicional. El momento flector en la rótula es $100 + 4V_B = 0$, lo que da $V_B = -25 \text{ kN}$. La ley de momentos flectores dada por M_B y V_B se dibuja en la figura 4.22b. Podríamos haberla dibujado sin cálculo alguno: por las cargas que la producen ha de ser recta, valer 100 en B y 0 en C.

b) El giro en la rótula se calcula con la condición de flecha nula en B:

$$v_B = -\frac{1}{2} \frac{150}{EI} 6 \left(10 - \frac{1}{3} 6 \right) + \theta_C 4 + \frac{1}{2} \frac{100}{EI} 4 \frac{1}{3} 4 = 0 \rightarrow \theta_C = 8,333 \text{ mrad}$$

c) El giro a partir de A es el área de momentos flectores barrida. Al llegar a C valdrá $\theta_C^{(izq)} = -450/EI = -4,5 \text{ mrad}$. A continuación se produce el salto por el giro calculado antes y al llegar a B añadiremos $200/EI = 2 \text{ mrad}$ más. Así resulta el dibujo de la figura 4.22c. Se observa que no hay ningún punto de giro nulo y que el giro máximo se produce en B y vale 5,833 mrad.

d) Podemos calcular la flecha en C desde A:

$$v_C = -\frac{1}{2} \frac{150}{EI} 6 \frac{2}{3} 6 = -\frac{1.800}{EI} = -18 \text{ mm}$$

o desde B, aprovechando que sabemos su giro:

$$v_C = -5,833 \times 10^{-3} 4 + \frac{1}{2} \frac{100}{EI} 4 \frac{2}{3} 4 = -18 \text{ mm}$$

La figura 4.22d ilustra el aspecto de la deformada de la viga: con curvatura negativa hasta la rótula (concavidad hacia abajo ⊗) y positiva después (concavidad hacia arriba ⊙). Este cambio de curvatura es general en las rótulas, porque al ser el momento cero, pasará de positivo a negativo, salvo excepciones patológicas.

Si hubiéramos querido calcular el giro en B directamente (en lugar de como giro acumulado), lo habríamos hecho igualando la flecha en la rótula desde A y desde B.

Enseñanzas:

- Hemos tenido que realizar un cálculo de giros y flechas en una viga con una rótula. La rótula:
 - simplifica el cálculo de esfuerzos de la estructura
 - ▶ porque quita una incógnita de fuerza hiperestática, pero
 - complica el cálculo de movimientos
 - ▶ porque añade una incógnita: su giro.

- El procedimiento general de calcular el giro en una rótula es el mismo del giro en un apoyo:
 - hacer cero la flecha en un apoyo;
 ello a pesar de que se diferencian bastante:
 - el giro de apoyo es absoluto,
 - mientras que el giro en la rótula es negativo.
 Sin embargo, el cálculo no suele resultar de escribir una única ecuación de flecha cero sino dos.
- El cálculo de giros y flechas se hace a partir de la ley de momentos flectores dividida de EI :
 - el de giros integrando el área encontrada,
 - con el valor inicial del giro calculado para el apoyo, en su caso;
 - el de flechas integrando el producto del área barrida por la distancia al punto,
 - integral que realizamos numéricamente concentrando la curvatura como giro en el c.d.g.
- Observamos que en la rótula se produce un cambio de curvatura, reflejado en la deformada.

Problema 4.5.4: Dilatación de un pórtico

En la estructura de la figura 4.23a el dintel AC se calienta 40°C y el pilar CD se calienta linealmente desde 20°C en C hasta 0°C en D. El coeficiente de dilatación lineal del material es $\alpha=10^{-5}\text{C}^{-1}$. Se pide determinar el campo de movimientos de la estructura.

Calcularemos de forma independiente los movimientos causados por a) el calentamiento del dintel y b) el calentamiento lineal del pilar.

a) El calentamiento del dintel sólo provoca desplazamientos horizontales (figura 4.23b):

$$u_{AB}(x) = 40 \times 10^{-5} x = 0,4x \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

b) El calentamiento lineal del pilar elevará el punto C; ello obligará al dintel a girar $\theta_B = v_C/BC$, y a toda la estructura con él (figura 4.23c). Este giro producirá movimientos horizontales y verticales suplementarios:

$$v_C = 10 \times 6 \times 10^{-5} = 0,6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta_B = \frac{0,6 \times 10^{-3}}{8} = 0,075 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Para calcular el movimiento vertical de C hemos aprovechado la linealidad en la temperatura y hemos tomado el valor medio. Para otros puntos, sin embargo, habremos de ser más ilustrados considerando $\Delta T(y) = 20y/6$. Al movimiento vertical debido al giro anterior habrá que sumarle el causado por el alargamiento:

$$v(y) = \int_0^y \alpha \Delta T(\xi) d\xi = \frac{20}{12} y^2 \cdot 10^{-5}$$

Comprueba que para $y=0$ obtienes el v_C calculado antes.

El total para este caso es:

$$u_{DC}(y) = 0,075(6-y) \text{ mm}$$

$$v_{DC}(y) = 0,075(6-y) + 1,667y^2 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$$

c) Superponiendo los movimientos a) y b) resulta:

$$u_{AC}(x) = 0,4x \text{ mm} \quad v_{AC}(x) = 0,075x \text{ mm} \quad \theta_{AC}(x) = 0,075 \text{ mrad}$$

$$u_{DC}(y) = 3,2 + 0,075(6-y) \text{ mm} \quad v_{DC}(y) = 1,667y^2 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \quad \theta_{DC}(y) = 0,075 \text{ mrad}$$

Comprueba que no nos hemos equivocado verificando que $u_C = u_{AC}(x=8) = u_{DC}(y=6) = v_C = v_{AC}(x=8) = v_{DC}(y=6)$. Los movimientos de A resultan de entrar con $x=-l$ en las expresiones para AC.

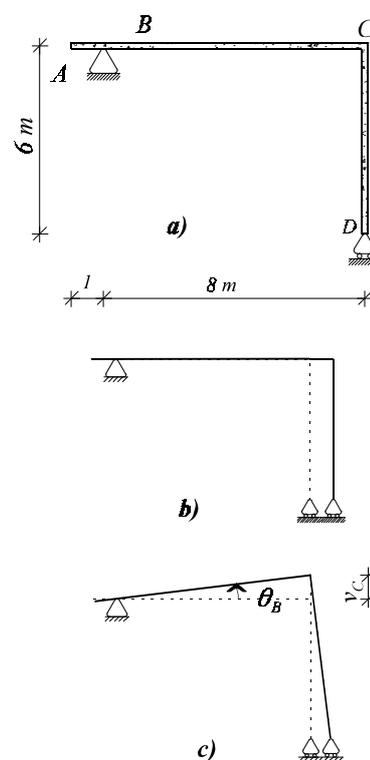


Figura 4.23
Estructura y diagramas del problema 4.5.4

Enseñanzas:

- En este problema hemos hecho uso del principio de superposición obteniendo el movimiento total como suma de los debidos:
 - al alargamiento del dintel y
 - al alargamiento del pilar.
- En el cálculo de los movimientos de cada causa hemos ignorado la otra.
- El alargamiento del dintel producía un movimiento de simple traslación.
- El alargamiento del pilar:
 - era no uniforme;
 - imponía un giro por compatibilidad con el movimiento del dintel;
 - lo hemos resuelto por el método físico.

Problema 4.5.5: Dilatación de un arco

En el anillo de la figura 4.24a el arco BC de 45° sufre un calentamiento de 50°C. El coeficiente de dilatación lineal del material es $\alpha = 10^{-5} \text{C}^{-1}$. Se pide determinar los movimientos que experimentan los puntos de dicho arco.

Lo resolveremos de dos maneras, una *heurística*, que te ayudará a entender cómo se producen los movimientos, y otra puramente matemática.

a) Al dilatarse el "quesito" OBC se convertirá en otro homotético mayor, el cual, si conservara su centro en O sería el OB'C'. Naturalmente, no conserva el centro en O sino que lo traslada para seguir siendo tangente al semianillo en C. Podemos imaginar que para conseguirlo desplazamos C' sobre la recta C'O hasta llevarlo a C. Entonces O se desplazará a O': el nuevo arco C'B' tendrá su centro en O', siendo $OO' = CC' = \alpha \Delta TR = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$. El campo de movimientos será (figura 4.24b):

$$u(\phi) = \alpha \Delta TR \cos \phi - \alpha \Delta TR \cos \frac{\pi}{4} = \left(\cos \phi - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times 10^{-3}$$

$$v(\phi) = \alpha \Delta TR \sin \phi - \alpha \Delta TR \sin \frac{\pi}{4} = \left(\sin \phi - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times 10^{-3}$$

b) El arco CB que se calienta se comporta como empotrado en C. Colocando los ejes x, y en este punto, los movimientos serán:

$$u(\phi) = \alpha \Delta T x = \alpha \Delta TR \left(\cos \phi - \cos \frac{\pi}{4} \right)$$

$$v(\phi) = \alpha \Delta T y = -\alpha \Delta TR \left(\sin \frac{\pi}{4} - \sin \phi \right)$$

Evidentemente, este resultado coincide con el encontrado en a).

Enseñanzas:

- Hemos resuelto el problema de dos maneras:
 - una heurística, que pone en evidencia la física del problema, y
 - otra matemática, que se aprovecha de un método de cálculo automático

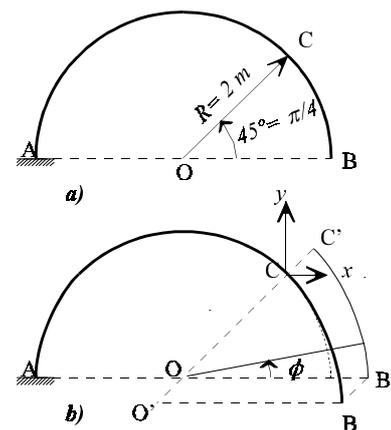


Figura 4.24 Estructura y diagrama del problema 4.5.5

Problema 4.5.6: Dilatación de un arco con rótula

En el arco triarticulado de la figura 4.25 la porción BC sufre un aumento de temperatura constante de 40°C . El coeficiente de dilatación lineal del material es $\alpha = 10^{-5}\text{C}^{-1}$. Se pide determinar los campos de desplazamientos de la estructura.

Se resuelve igual que lo hicimos en el ejemplo de la figura 4.18f; el hecho de que aquí las barras sean curvas no añade complicación alguna puesto que los movimientos allí llamados δ_1 y δ_2 llevan siempre la dirección de los radios vectores AB y CB igual que si estuvieran unidos por barras rectas. Las ecuaciones de compatibilidad (4.4-4) son aquí de plena aplicación:

$$\begin{aligned} u_B^{(AB)} &= -\theta_A R(1 - \cos 60^\circ) = -5\theta_A \\ u_B^{(CB)} &= -\alpha \Delta T R - \theta_C R = -4 \times 10^{-3} - 10\theta_C \\ v_B^{(AB)} &= \theta_A R \sin 60^\circ = 8,660 \theta_A \\ v_B^{(CB)} &= \alpha \Delta T R - \theta_C R = 4 \times 10^{-3} - 10\theta_C \end{aligned}$$

Igualando los valores anteriores dos a dos se llega a un sistema de ecuaciones cuya solución es $\theta_A = 0,586 \text{ mrad}$, $\theta_C = -0,107 \text{ mrad}$. Entrando de vuelta con estos valores en las ecuaciones anteriores, resulta $u_B = -2,930 \text{ mm}$, $v_B = 5,075 \text{ mm}$. Comprueba que proyectando estos movimientos sobre la dirección CB obtienes el alargamiento de ese radio vector.

Si ahora quieres los movimientos de un punto cualquiera, escribirás ecuaciones semejantes a las anteriores:

$$\begin{aligned} u^{(AB)} &= -\theta_A y_1 = -\theta_A R(\sin \phi - 0,5) & v^{(AB)} &= \theta_A x_1 = \theta_A R \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \phi \right) \\ u^{(CB)} &= \alpha \Delta T x_2 - \theta_C y_2 = -\alpha \Delta T R(1 - \cos \phi) - \theta_C R \sin \phi & v^{(CB)} &= \alpha \Delta T y_2 + \theta_C x_2 = \alpha \Delta T R \sin \phi - \theta_C R(1 - \cos \phi) \end{aligned}$$

En las ecuaciones anteriores x_1 , y_1 y x_2 , y_2 son sistemas coordenados auxiliares con orígenes en A y C , respectivamente. El resultado final está escrito en función del ángulo ϕ , que se mide a partir de OC para las dos semiestructuras ($\phi = 150^\circ$ para el punto A). Comprueba que los movimientos son nulos en A y C y que los movimientos de B resultan los ya calculados.

Enseñanzas:

- Se trataba de un problema en el que una parte de la estructura imponía giros de compatibilidad al alargamiento de la otra;
 - lo hemos resuelto igualando los movimientos del punto común a las dos piezas de la estructura, como en (4.4-4).

Problema 4.5.7: Flexión de un arco bajo presión hidrostática

Calcular los movimientos del extremo B del arco empotrado de la figura 2.31 (copiada como figura 4.26) que soporta la presión hidrostática indicada en ella. Se conocen las integrales de la tabla 4.3.

La ley de momentos flectores la obtuvimos en el ejemplo 2.7.3 y resultó ser:

$$M(\varphi) = -\frac{1}{2} \rho R^3 \left[\cos \varphi + \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \sin \varphi \right]$$

Será bueno intuir que bajo el peso del agua el punto B girará negativamente, se moverá hacia la derecha (u positivo) y hacia abajo (v negativo). Veamos si los cálculos lo confirman.

Recuerda las fórmulas (4.1-4) de *movimiento = giro × distancia perpendicular* y fíjate en como salen los signos: $u = -\theta \times \Delta y$, $v = \theta \times \Delta x$ (porque un giro positivo mueve un punto por encima hacia la izquierda y un punto por la derecha, hacia arriba). Recuerda las más elaboradas de Bresse, (4.4-7). Para nuestro arco:

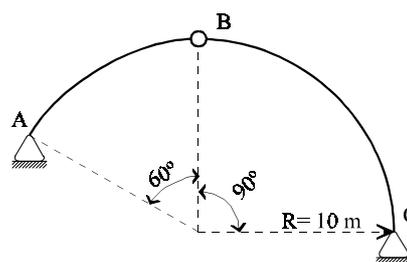


Figura 4.25
Arco circular del problema 4.5.6

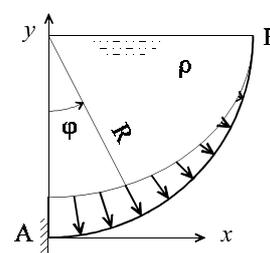


Figura 4.26
Arco sometido a presión hidrostática del problema 4.5.7

Tabla 4.3
Valores numéricos de $\int_0^{\pi/2} f(\varphi) d\varphi$ para varias funciones $f(\varphi)$

sen φ	cos φ	sen ² φ	sen φ cos φ	cos ² φ
1	1	0,785398	0,5	0,785398
φ sen φ	φ cos φ	φ sen ² φ	φ sen φ cos φ	φ cos ² φ
1	0,570796	0,866850	0,392699	0,366850

$$\theta_B = \int_A^B d\theta = \int_A^B \frac{M(s)}{EI} ds = \frac{R}{EI} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} M(\varphi) d\varphi$$

$$u_B = - \int_A^B d\theta (y_B - y_\varphi) = - \int_A^B \frac{M(\varphi)}{EI} ds R \cos\varphi = - \frac{R^2}{EI} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} M(\varphi) \cos\varphi d\varphi$$

$$v_B = \frac{R^2}{EI} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} M(\varphi) (1 - \text{sen}\varphi) d\varphi$$

Para el cálculo de las integrales hacemos uso de los valores de la tabla 4.3. Resulta:

$$\theta_B = - \frac{1}{2} \frac{\rho R^4}{EI} \left[1 + 1 - \frac{\pi}{2} \right] = -0,2146 \frac{\rho R^4}{EI}$$

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{\rho R^5}{EI} \left[0,785398 + 0,392699 - \frac{\pi}{2} 0,5 \right] = 0,1963 \frac{\rho R^5}{EI}$$

$$v_B = - \frac{1}{2} \frac{\rho R^5}{EI} \left[\left(1 + 1 - \frac{\pi}{2} \right) - 0,5 - 0,866850 + \frac{\pi}{2} 0,785398 \right] = -0,1480 \frac{\rho R^5}{EI}$$

Enseñanzas:

- Para calcular los movimientos de flexión en un arco es prácticamente inevitable resolver integrales:
 - de la curvatura, M/EI ,
 - ▶ para obtener el giro;
 - de la curvatura por la distancia horizontal,
 - ▶ para calcular el movimiento vertical,
 - de la curvatura por la distancia vertical,
 - ▶ para encontrar el movimiento horizontal.

Es frecuente el error de olvidar R al substituir ds por $Rd\varphi$.

5 Ecuaciones

5.0 Objetivos y contenido

Objetivos	Contenido
Generales: — Conocer las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento: <ul style="list-style-type: none"> • de la barra (que resiste sólo por esfuerzo axial), y • de la viga (que resiste por flexión) y saber integrarlas. — Saber qué entendemos por viga flotante, conocer las hipótesis simplificativas de su comportamiento y aprender a formular e integrar su ecuación diferencial.	
Específicos: — Para la barra sometida a cargas axiales: <ul style="list-style-type: none"> • saber obtener la ecuación diferencial, • conocer la relación entre esfuerzo y movimiento; • conocer las condiciones de contorno aplicables: <ul style="list-style-type: none"> ▶ de extremo libre, ▶ de extremo fijo; • saber integrar la ecuación para obtener: <ul style="list-style-type: none"> ▶ los movimientos de todos los puntos y ▶ los esfuerzos en todas sus secciones. — <i>Ídem</i> para la viga sometida a cargas de flexión	§5.1
— <i>Ídem</i> para la viga flotante (sumergida en un medio elástico)	§5.2
— <i>Ídem</i> para la viga flotante (sumergida en un medio elástico)	§5.3
Adicional: — Adquirir soltura en la resolución de problemas de viga flotante	§5.4

5.1 Ecuación de la barra

Qué es

Habitualmente llamamos *barra* a la viga o pieza prismática que sólo soporta esfuerzo axial, tanto si es porque no es capaz de resistir otro como porque no le llega otro.

Qué queremos

Buscamos obtener su *ecuación de equilibrio en función del movimiento u* de sus puntos (figura 5.1a,b). Partimos de su ecuación de equilibrio en fuerzas ya obtenida de (2.5-1) (figura 5.1c):

$$(5.1-1) \quad \frac{dN}{dx} = -p(x)$$

Reemplazamos el esfuerzo N por su expresión (3.5-1a) en función de la deformación $N = Ea\epsilon$:

$$\frac{d}{dx}[EA(x)\epsilon(x)] = -p(x)$$

Relación movimiento-deformación

Sólo nos queda relacionar la deformación ϵ con el movimiento u . Esta relación se obtiene como sigue (figura 5.1d): el elemento de barra que antes de deformarse medía dx ; después de deformarse medirá $dx(1 + \epsilon)$. Si (por efecto de la deformación causada por las cargas) el punto de coordenada x se movió u , el de coordenada $x + dx$ se habrá movido $u + du = u + (1 + \epsilon)dx$. La relación movimiento-deformación que buscábamos es:

$$(5.1-2) \quad \frac{du}{dx} = \epsilon(x)$$

la cual introducida en la ecuación precedente nos proporciona la *ecuación de equilibrio en movimientos* buscada:

$$(5.1-3a) \quad \frac{d}{dx}\left[EA(x)\frac{du}{dx}\right] = -p(x)$$

que para sección constante es:

$$(5.1-3b) \quad EA\frac{d^2u}{dx^2} = -p(x)$$

Condiciones de contorno

Cuando integres esta ecuación diferencial de segundo grado te aparecerán dos constantes arbitrarias que determinarás con las condiciones de contorno. Las habrá de dos tipos:

- extremo con movimiento conocido $u = \text{valor conocido}$, generalmente apoyo con $u = 0$, ó
- extremo con carga puntual (esfuerzo axial) conocida. En este caso tienes que usar¹:

$$(5.1-4) \quad N(x) = EA(x)\frac{du}{dx}$$

o sea, $u' = \text{valor conocido de } N/EA$; a menudo será extremo libre (figuras 5.1a,b), $u' = 0$.

Así pues, las condiciones de contorno serán de movimiento conocido o de derivada conocida, y tendrá que haber dos, una por cada extremo.

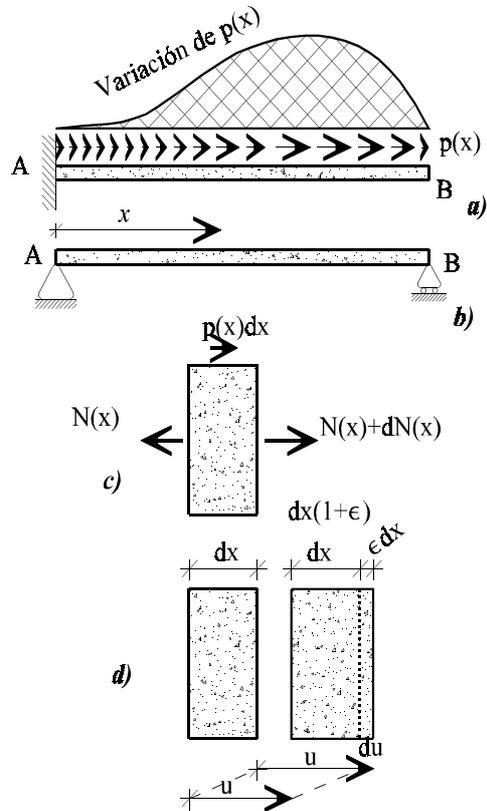


Figura 5.1
Elementos de barra, equilibrio y movimiento

¹Relación que se obtiene comparando (5.1-5a) con (5.1-1); es válida incluso para rigidez EA variable.

Resultados

La integración de (5.1-4) proporciona:

- los movimientos $u(x)$ de todos los puntos de la barra, así como,
- la ley de esfuerzos axiales $N(x) = EAu'(x)$, y
- las reacciones en los apoyos si los hubiera, $H_A = -N(x=0)$, $H_B = N(x=L)$. Nota la diferencia en el signo: los esfuerzos tienen en el mismo signo que la carga exterior en la cara x^+ y el contrario en la x^-

Ejemplo 5.1.1: Barra con carga en su extremo

Calcular los movimientos de una barra de sección constante con una carga H en su extremo $x=L$ (figura 5.2a,b).

La carga exterior $p(x)$ (repartida) es nula. Veremos en seguida cómo introducimos la carga concentrada H . La ecuación (5.1-3b) nos dice $u'' = 0$. Así pues, $u' = C_1$, $u = C_1x + C_2$. Tenemos dos extremos; en el $x = 0$, conocemos el movimiento, $u(0) = 0$ que nos da $C_2 = 0$. En el extremo $x = L$ conocemos el axil H ; su condición de contorno es $u'(L) = H/EA$. Esto es, $C_1 = H/EA$. Llegamos a la expresión:

$$u(x) = \frac{H}{EA}x$$

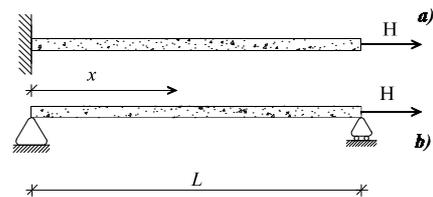


Figura 5.2
Barras con carga en el extremo del ejemplo 5.1.1

Para $x = L$ tenemos el conocido alargamiento $\delta = HL/EA$.

Enseñanzas

- Hemos calculado los movimientos en una barra:
 - integrando su ecuación diferencial que relaciona movimientos con cargas exteriores,
 - sin necesidad de hallar antes su ley de esfuerzos axiales.
- Observamos que las cargas puntuales:
 - no entran en la ecuación diferencial, sino que
 - entran en las condiciones de contorno.
- Encontramos condiciones de contorno de las dos clases:
 - de movimiento conocido, en el extremo fijo
 - de derivada $u' = N/EA$ conocida en el extremo libre

Ejemplo 5.1.2: Barra con carga uniforme

Reobtener los movimientos del ejemplo 4.2.2 (figura 5.3) integrando la ecuación de la barra.

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} = 30$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{30}{EA}x + C_1$$

$$u = \frac{30}{2EA}x^2 + C_1x + C_2$$

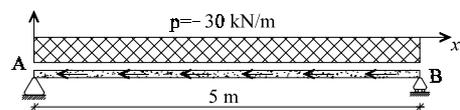


Figura 5.3
Barra con carga repartida del ejemplo 5.1.2

En el extremo A conocemos $u(0) = 0$, y en el B, $N(L) = EAu'(L) = 0$. Por consiguiente $C_2 = 0$, $C_1 = -30L/EA$:

$$u = \frac{15x}{EA}(x-2L) = (0,1x^2 - x) \times 10^{-3} \text{ m}$$

La reacción en A será $-N(0) = -EAu'(0) = 30L = 150 \text{ kN}$.

Enseñanzas:

- El método de la ecuación diferencial exhibe, respecto del método de Bresse del ejemplo 4.2.2:
 - ventaja: no necesitamos saber hallar la ley de esfuerzos axiales;
 - inconvenientes:
 - ▶ tenemos que conocer la ecuación diferencial,
 - ▶ tenemos que saber integrarla,
 - ▶ y saber aplicar las condiciones de contorno:
 - en movimientos, en el extremo A,
 - en esfuerzos, en el B, (así que «algo» de la ley de esfuerzos tenemos que saber).

El método tiene una ventaja más, que ponemos de manifiesto en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 5.1.3: Carga uniforme en barra hiperestática

Determinar los movimientos y las reacciones de la barra de la figura 5.4.

Este caso es tan distinto del anterior que *no* lo podríamos resolver por el método de Bresse del capítulo 4 porque la estructura es hiperestática: tiene una coacción de apoyo en exceso que no nos permite saber *a priori* cuántos de los 150 kN aplicados irán al apoyo A y cuántos al B. El método de la ecuación diferencial no tiene problemas con eso: todo es igual que en el ejemplo anterior:

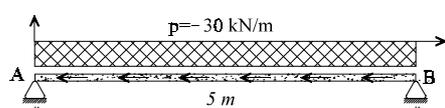


Figura 5.4
Barra hiperestática del ejemplo 5.1.3

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} = 30$$

$$u = \frac{30}{2EA} x^2 + C_1 x + C_2$$

excepto las condiciones de contorno, que incluso son más sencillas: $u(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$, $u(L) = 0 \Rightarrow C_1 = -15L/EA$.

$$u = (x^2 - 5x) \times 10^{-4} \text{ m}$$

Las reacciones serán $H_A = -N(0) = -EAu'(0)$, $H_B = N(L) = EAu'(L)$. Resulta $H_A = H_B = 75 \text{ kN}$ como era de esperar por la antisimetría del problema.

Enseñanzas:

- El método de la ecuación diferencial tiene la gran ventaja de que puede aplicarse indistintamente a estructuras isostáticas o hiperestáticas, sin necesidad de distinguirlas.

Ejemplo 5.1.4: Carga puntual en barra hiperestática

Encontrar los movimientos y los esfuerzos de la barra hiperestática de la figura 5.5a sometida a una fuerza puntual H en $x = a$.

Este problema *no* lo sabríamos resolver por el método de Bresse del capítulo 4. Sin embargo, hemos visto en el ejemplo anterior que el método de la ecuación diferencial sirve igual para estructuras hiperestáticas que para isostáticas: ni siquiera se necesita distinguirlas. Lo que resulta más difícil de anticipar es que este problema es bastante más complicado que el del ejemplo anterior porque no tenemos una expresión algebraica de $p(x)$. La carga aplicada es nula, y la puntual H la tenemos que introducir mediante condiciones de contorno.

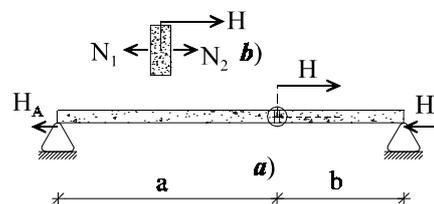


Figura 5.5
Barra hiperestática del ejemplo 5.1.4

La solución de $u(x)'' = 0$ con condiciones de contorno $u(0) = 0$ y $u(L) = 0$, parecería ser $u = 0$ en todo el intervalo; sin embargo, la carga tiene que producir movimientos. Estos serán lineales de la forma:

$$u(0 \leq x \leq a) \equiv u_1(x) = Ax$$

$$u(a \leq x \leq L) \equiv u_2(x) = B(L-x)$$

En estas soluciones ya hemos tenido en cuenta que satisfagan $u''(x) = 0$ y las condiciones de $u = 0$ en cada extremo. Ahora tenemos que determinar las constantes arbitrarias A y B «empalmando» ambas soluciones, de manera que en $x = a$ el movimiento sea igual por la izquierda y por la derecha, y que se cumpla la condición de equilibrio $N_1 - N_2 = H$ en la rebanada (figura 5.5b)

$$\left. \begin{aligned} u_1(x=a) &= u_2(x=a) \\ u'_1(x=a) - u'_2(x=a) &= \frac{H}{EA} \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} a & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{H}{EA} \Rightarrow \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b \\ a \end{Bmatrix} \frac{H}{LEA}$$

Resulta, pues:

$$u_1(x) = \frac{H}{EA} \frac{b}{L} x \quad u_2(x) = \frac{H}{EA} \frac{a}{L} (L-x)$$

y las reacciones:

$$H_A = H \frac{b}{L} \quad H_B = H \frac{a}{L}$$

Conviene notar que **en vigas de sección constante las cargas axiales se reparten entre los apoyos igual que las transversales** (ver figura 2.20b).

Enseñanzas

- Integrando la ecuación diferencial hemos tenido
 - la ventaja de poder resolver un problema hiperestático sin darnos cuenta de que lo era;
 - el inconveniente de que la carga fuera puntual ha complicado mucho el problema por la discontinuidad que entraña:
 - ▶ hemos tenido que separar la viga en dos tramos con expresiones de $u(x)$ distintas,
 - ▶ y empalmarlos con las condiciones de:
 - continuidad en $u(x)$,
 - discontinuidad conocida en $u'(x) = N/EA$ derivada de la presencia de la carga puntual.

Resumen:

- Llamamos barra a la pieza prismática que sólo resiste o soporta esfuerzo axial.
- La ecuación de equilibrio de la barra es $\frac{d}{dx} \left[EA(x) \frac{du}{dx} \right] = -p(x)$
 - en función del movimiento longitudinal $u(x)$ de sus puntos
 - y de su carga axial aplicada, $p(x)$
 - con condiciones de contorno de dos clases:
 - ▶ de movimiento conocido en extremos apoyados $u(x_o) = u_o$
 - ▶ o de axil conocido $u'(x_o) = N(x_o)/EA$ en extremos libres.
- Encontrando la solución de la ecuación anterior se pueden resolver problemas isostáticos e hiperestáticos indiferentemente, sin necesidad de identificar el hiperestatismo.
- De la solución resulta:
 - el movimiento $u(x)$ de cada punto,
 - la ley de esfuerzos axiales $N(x) = u'(x)EA$, y
 - las reacciones de apoyo $H_A = -N_A$, $H_B = N_B$.
- Respecto del método de Bresse, se observan:
 - ventajas: cuando:
 - ▶ cuando la expresión de $p(x)$ es sencilla de integrar,
 - ▶ cuando hay hiperestatismo;
 - desventajas:
 - ▶ cuando hay cargas puntuales aplicadas, porque:
 - hay que introducirlas como condiciones de contorno,
 - subdividiendo en intervalos si están aplicadas en puntos intermedios;
 - ▶ es un método puramente matemático que no instruye sobre el comportamiento físico de la barra.
- Hemos aprendido que las cargas axiales se transmiten a los apoyos igual que las transversales si se cumple:
 - que la rigidez EA es constante, y
 - los dos extremos tienen el movimiento u impedido.

5.2 Ecuación de la viga

Objetivo

Queremos encontrar la ecuación de equilibrio en movimientos de la viga; será una ecuación diferencial que relacione los movimientos $v(x)$ de la pieza prismática con la carga exterior transversal $q(x)$ que aquélla resiste exclusivamente por flexión (figura 5.6).

Pasos

Partiremos de la ecuación de equilibrio en fuerzas, que ya obtuvimos en (2.5-1) y reemplazaremos el esfuerzo M por su deformación (3.5-1b) $\chi = M/EI$:

$$(5.2-1) \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = q(x)$$

$$(5.2-2) \quad \frac{d^2}{dx^2} [EI(x)\chi] = q(x)$$

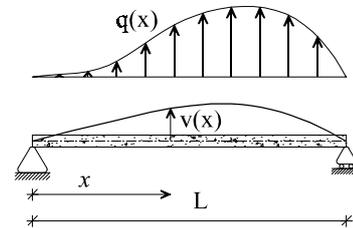


Figura 5.6
Viga resistiendo por flexión
una carga transversal

Después reemplazaremos la deformación χ por su expresión en función del movimiento $v(x)$ y... ¡voilà! Lo malo es que esta relación aún tenemos que encontrarla.

Relación movimiento-deformación

En alguna asignatura de Matemáticas estudiarías un día que la curvatura χ (inversa del radio de curvatura) de una curva $y = y(x)$ viene dada por la expresión:

$$\chi = \frac{y'''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

En R.M. tenemos que retocarla un poco para limitarla a movimientos pequeños —y hacerla lineal—. Si los movimientos son pequeños, también lo serán los giros, sus derivadas. Si y' es pequeña, su cuadrado será mucho más pequeño, despreciable frente a la unidad que aparece en el denominador; por tanto $\chi \approx y'''$. Como la ordenada y es aquí el movimiento v :

$$(5.2-3) \quad \chi = \frac{d^2 v}{dx^2}$$

Introduciendo esta relación movimiento-deformación en (5.2-2) resulta finalmente:

$$(5.2-4a) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = q(x)$$

Para la viga de rigidez constante, la ecuación anterior es:

$$(5.2-4b) \quad EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x)$$

Recuerda que tanto $v(x)$ como $q(x)$ serán positivas hacia arriba (figura 5.6).

Condiciones de contorno

Cuando integres esta ecuación diferencial de cuarto grado te aparecerán cuatro constantes arbitrarias que determinarás con las condiciones de contorno. Las habrá de dos tipos, cada una con dos subtipos:

- de extremo con movimientos conocidos:
 - flecha conocida $v = \text{valor conocido}$, generalmente apoyo con $v = 0$;
 - giro conocido $v' = \theta \text{ conocido}$, generalmente un empotramiento $v' = 0$;
- de extremo con fuerzas/esfuerzos conocidos:
 - momento exterior/flector conocido, $v'' = M/EI \text{ conocido}$;
 - esfuerzo cortante conocido, $v''' = -Q/EI \text{ conocido}$.

Ecuaciones reducidas

Estas dos últimas expresiones sugieren otras tantas ecuaciones diferenciales *reducidas*²:

$$(5.2-5a,b) \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad \frac{d^3v}{dx^3} = -\frac{Q(x)}{EI}$$

que nos serán más fáciles de integrar que la (5.2-4) porque son de orden menor. Pero no nos valdrán siempre: para usar la *a* necesitamos conocer la ley de momentos flectores; para la *b*, la de cortantes. Está claro que sólo nos van a valer para vigas isostáticas. La (5.2-4), en cambio, valdrá para todas, todas.

Resultados

De la integración de la(s) ecuación(es) diferencial(es) anterior(es), como de la matanza del cerdo, obtenemos *de todo*:

- la *elástica* o *deformada* de la viga, $v(x)$;
- los giros en cualquier punto, $\theta(x) = v'(x)$;
- la ley de momentos flectores $M(x) = EIv''(x)$;
- la ley de esfuerzos cortantes $Q(x) = -EIv'''(x)$;
- las reacciones, $M_A = -EIv''(A)$, $M_B = EIv''(B)$, $V_A = EIv'''(A)$, $V_B = -EIv'''(B)$.

Ejemplo 5.2.1: Viga con carga parabólica

Calcular la flecha y el giro máximos de la viga biapoyada cargada con una sobrecarga en parábola de segundo grado con máximo q_0 en el centro y nula en los extremos (como en el problema 2.6.4).

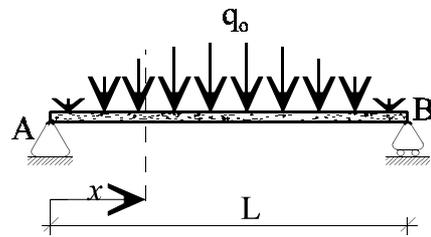


Figura 5.7
Viga con carga parabólica del ejemplo 5.2-1

Lo razonable sería calcular la ley de momentos flectores como en el problema 2.6.4 e integrar $v'' = M(x)/EI$. Pero hallar $M(x)$ da mucha pereza. Atrévamonos con $v'''' = q(x)/EI$:

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI} = -\frac{4q_0}{EI} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{4q_0L^2}{EI} \left[\frac{1}{2 \times 3} \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \frac{1}{3 \times 4} \left(\frac{x}{L} \right)^4 + C_1 \frac{x}{L} + C_2 \right]$$

Aquí paramos un momento porque ya podemos aplicar las condiciones de contorno $M(0) = M(L) = 0$, que dan $C_2 = 0$, $C_1 = -1/12$. Con esto ya tenemos la ley de momentos flectores (quizás con menos esfuerzo que en el problema 2.6.4). Seguimos integrando:

$$\frac{M}{EI} \equiv \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{4q_0L^2}{EI} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \frac{1}{12} \left(\frac{x}{L} \right)^4 - \frac{1}{12} \frac{x}{L} \right]$$

$$v = -\frac{4q_0L^4}{EI} \left[\frac{1}{6 \times 4 \times 5} \left(\frac{x}{L} \right)^5 - \frac{1}{12 \times 5 \times 6} \left(\frac{x}{L} \right)^6 - \frac{1}{12 \times 2 \times 3} \left(\frac{x}{L} \right)^3 + C_3 \frac{x}{L} + C_4 \right]$$

Ahora aplicamos las otras dos condiciones de contorno, $v(0) = v(L) = 0$ que dan $C_4 = 0$, $C_3 = 1/120$. Por consiguiente:

$$v = -\frac{q_0L^4}{90EI} \left[3 \left(\frac{x}{L} \right)^5 - \left(\frac{x}{L} \right)^6 - 5 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 3 \frac{x}{L} \right]$$

Sería prudente comprobar la simetría, $v(x) = v(L-x)$. Algo nos dirán los giros en los extremos:

$$\theta(x) = -\frac{q_0L^3}{90EI} \left[15 \left(\frac{x}{L} \right)^4 - 6 \left(\frac{x}{L} \right)^5 - 15 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 3 \right]$$

$$\theta_A = \theta(x=0) = -\frac{q_0L^3}{30EI} \quad \theta_B = \theta(x=L) = \frac{q_0L^3}{30EI}$$

También se comprueba la simetría en $\theta(x/L=0,5) = 0$.

² Estas ecuaciones resultan de reemplazar (5.2-3) en $\chi = M/EI$, $Q = -dM/dx$

La flecha máxima resulta $v(x/L=0,5) = -61q_0L^4/5760EI$. Si sabes que para la viga con carga uniforme q_0 es $-5q_0L^4/384EI$ (1,23 veces mayor para 1,50 veces más de carga) puedes estimar que el cálculo es correcto.

Si la sustentación hubiera sido hiperestática (uno o dos empotramientos) lo único que habría cambiado sería la obtención de las constantes de integración. Por el método de Bresse, el cálculo con esta carga en una viga empotrada-apoyada sería de espanto.

Enseñanzas:

- Integrando la ecuación diferencial de la viga se van obteniendo sucesivamente:
 - la ley de cortantes,
 - la de momentos (en este caso resultó más sencilla que por el procedimiento estático)
 - los giros y
 - la elástica o deformada.
- Para flechas y giros el procedimiento puede ser más rápido que el de Bresse cuando:
 - $q(x)$ es complicada pero fácil de integrar, sin discontinuidades ni cargas o momentos puntuales;
 - se piden resultados en muchos puntos, o la elástica completa;
 - la viga es hiperestática (porque el método no distingue).

Resumen:

- Hemos obtenido la ecuación diferencial que gobierna la flexión de una viga. Como es una ecuación en movimientos, resulta válida tanto para problemas isostáticos como hiperestáticos:

$$(EIv'')' = q(x)$$
- Hemos aprendido las relaciones entre movimientos y esfuerzos:

$$M(x) = EIv''', \quad Q(x) = -EIv''''.$$
- Hemos encontrado dos clases de condiciones de contorno:
 - en movimientos, v o v' prescritos; o
 - en esfuerzos, $v'' = M/EI$, $v''' = -Q/EI$ conocidos,
 si bien pueden aparecer de tipo mixto.
- Hemos encontrado que el método de integrar la ecuación diferencial es:
 - ventajoso:
 - cuanto más en hiperestática sea la viga,
 - cuando la expresión analítica de la carga es *friendly*.
 - desventajoso cuando actúan cargas y momentos puntuales.

5.3 La viga flotante

Qué es

Se trata de una viga embebida en un terreno o medio elástico (figura 5.8a). En este caso no nos queda más arma para su cálculo que la de integrar la ecuación diferencial que en seguida encontraremos.

Hipótesis

Empezamos haciendo la hipótesis de que el medio elástico que envuelve a nuestra viga dificulta el movimiento v de cada punto de ella oponiéndole una fuerza de valor $-k.v$ (figura 4.8a). Esta simplificación equivale a admitir que el medio elástico se comporta como una serie de muelles independientes, cada uno de ellos reaccionando contra el empujón que recibe (figura 5.8b) pero sin hacer nada por ayudar a su vecino. En realidad, una carga aplicada sobre un suelo deforma un cierto entorno del punto de aplicación (figura 4.8c). Esta inexactitud es admisible y puede quedar parcialmente corregida por la obtención experimental del valor de k .

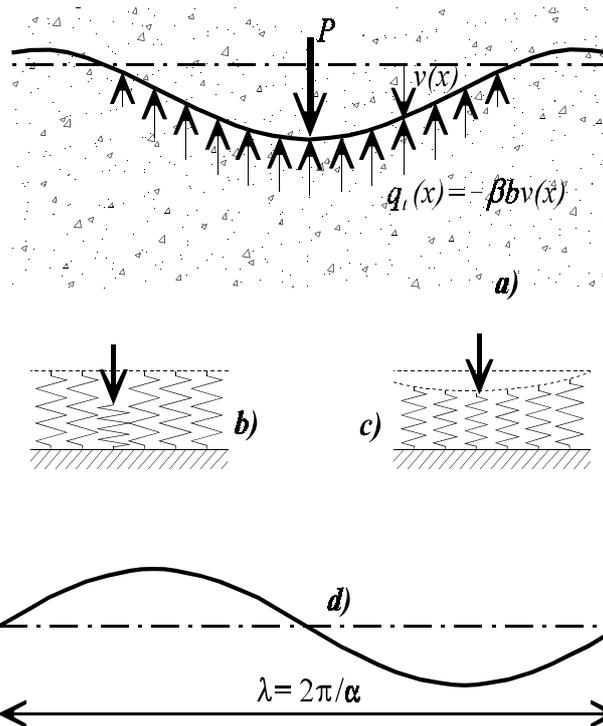


Figura 5.8
Viga flotante: reacciones del terreno, deformada

Coefficiente de balasto

Experimentalmente obtendremos el mayor o menor hundimiento v que una cierta carga F repartida sobre una superficie A produce sobre un terreno: $\sigma = \beta.v$. A la constante β le llamaremos *coeficiente de balasto* y la mediremos en unidades de peso específico σ/v $\text{kN/m}^2/\text{m} = \text{kN/m}^3$. La semejanza con el muelle es la siguiente: un muelle de constante k sometido a una fuerza f sufre un movimiento $u = f/k$. Un suelo de coeficiente de balasto β sometido a una presión σ se hunde $v = \sigma/\beta$.

Ancho x balasto

Si la viga es de ancho b , al hundirse v en el terreno, éste la empujará en sentido opuesto con $q_i(x) = -v\beta b$, que tiene unidades de carga repartida por unidad de longitud de viga, kN/m .

Zapata; muelles equivalentes

Si las tensiones bajo una zapata se pueden calcular mediante la fórmula de Navier (3.3-5), los movimientos bajo la misma serán (tomamos N y σ positivos de compresión):

$$v(y) = \frac{\sigma(y)}{\beta} = \frac{N}{\beta A} + \frac{M}{\beta I}y = v_G + \theta y$$

Todo sucede como si bajo la zapata hubiera dos muelles: uno vertical de rigidez $k_v = \beta A$ y otro rotativo de rigidez $k_\theta = \beta I$. Pero para esto es necesario que las tensiones bajo la zapata sean todas de compresión, lo que no sucede en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 5.3.1: Hundimientos de zapata excéntrica

Si bajo la zapata del ejemplo 3.3.4 se tiene un suelo de coeficiente de balasto $\beta = 100.000 \text{ kN/m}^3$, el borde izquierdo se hundirá 4,167 mm. El punto medio, que transmite al terreno una $\sigma = 416,667 \times 0,2/1,2 = 69,444 \text{ kN/m}^2$ se hundirá $v_G = 0,694 \text{ mm}$. El giro será $\theta = (4,167 - 0,694)/1 = 3,472 \text{ mrad}$.

Ecuación diferencial

Lo único que tenemos que hacerle a la ecuación en (5.2-4) es añadirle esta nueva carga repartida que le opone el terreno circundante:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = q(x) - \beta b v$$

que para sección constante es:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x) - \beta b v$$

La escribiremos reagrupando los términos en v y llamando $\alpha^4 = \beta b/4EI$:

$$(5.3-1) \quad EI \left(\frac{d^4 v}{dx^4} + 4\alpha^4 v \right) = q(x) \quad \left(\alpha = \sqrt[4]{\frac{\beta b}{4EI}} \right)$$

Solución

Se trata de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. Su solución será suma de la general de la homogénea más la particular de la completa. La solución general de la homogénea será suma de términos de la forma e^{rx} , satisfaciendo $r^4 + 4\alpha^4 = 0$. Sus raíces son las $r = (\pm 1 \pm i)\alpha$ por lo que la solución es de la forma:

$$(5.3-2) \quad v(x) = e^{-\alpha x}(A \operatorname{sen} \alpha x + B \operatorname{cos} \alpha x) + e^{\alpha x}(C \operatorname{sen} \alpha x + D \operatorname{cos} \alpha x)$$

Esta solución tiene el aspecto de una función armónica (figura 5.8d) de longitud de onda (periodo) $\lambda = 2\pi/\alpha$, de amplitud amortiguada por el término $e^{-\alpha x}$, que decrece rápidamente, o ampliada por el $e^{\alpha x}$, que crece vertiginosamente.

Condiciones de contorno

Si la viga tiene dos extremos, habrá dos condiciones de contorno en cada extremo, que podrán ser: en movimiento v , giro v' , momento flector Elv'' o cortante $-Elv'''$. Si la viga es de longitud semi-infinita sólo tendrá un extremo, y el segundo término de (5.3-2) se tendrá que anular para que $v(x)$ y todas sus derivadas sean finitas a distancia infinita. Así pues, en caso de viga semi-infinita trabajaremos con la solución:

$$(5.3-3) \quad v(x) = e^{-\alpha x}(A \operatorname{sen} \alpha x + B \operatorname{cos} \alpha x)$$

Fórmula recurrente

Para obtener las derivadas usamos la relación recurrente que sigue:

$$(5.3-4) \quad v'(x) = \alpha e^{-\alpha x} [(-A-B) \operatorname{sen} \alpha x + (A-B) \operatorname{cos} \alpha x] \equiv \alpha e^{-\alpha x} (A' \operatorname{sen} \alpha x + B' \operatorname{cos} \alpha x)$$

como si para derivar multiplicáramos por α y derivásemos las constantes con la siguiente regla: $A' = -(A+B)$, $B' = A-B$. Reiterando esta regla se obtienen las constantes de cada derivada de la tabla 5.1.

Ejemplo 5.3.2: Viga flotante infinita con carga puntual

Supongamos una carga P hacia abajo en $x=0$ (figura 5.8a). La solución es la (5.3-3) con las siguientes condiciones de contorno en $x=0$: cortante $P/2$ y giro cero (por simetría). Esto se traduce en:

$$\left. \begin{aligned} v'''(0) &= -\frac{P}{2EI} = 2\alpha^3(A+B) \\ v''(0) &= 0 = \alpha(A-B) \end{aligned} \right\}$$

que resulta en $A = B = -P/8\alpha^3 EI$:

$$(5.3-5) \quad v(x) = -\frac{P}{8\alpha^3 EI} e^{-\alpha x} (\operatorname{sen} \alpha x + \operatorname{cos} \alpha x)$$

Tabla 5.1
Constantes en las distintas derivadas de la elástica flotante

v	A	B	C	D
v'/α	$-(A+B)$	$A-B$	$C-D$	$C+D$
v''/α^2	$2B$	$-2A$	$-2D$	$2C$
v'''/α^3	$2(A-B)$	$2(A+B)$	$-2(C+D)$	$2(C-D)$

Enseñanzas

- Hemos obtenido la solución de una viga flotante infinita sometida a una carga puntual. Para ello:
 - hemos usado la solución general y eliminado de ella los términos que crecen desafortadamente al alejarnos; y
 - aplicado condiciones de contorno *mixtas* de simetría:
 - ▶ una condición de extremo fijo, giro nulo;
 - ▶ otra de extremo libre, cortante dado.

Ejemplo 5.3.3: Viga flotante semiinfinita con cargas en el extremo

Buscamos la flexibilidad (flechas y giros) en el extremo de la viga semiinfinita de la figura 5.9 sometida en dicho extremo a una carga puntual positiva (hacia arriba) P y a un momento positivo (horario) M .

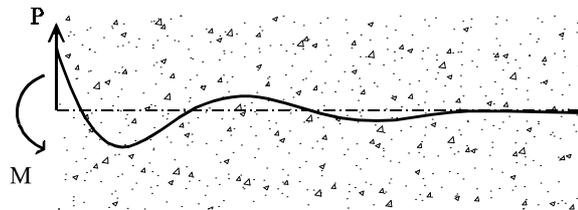


Figura 5.9

Viga flotante semiinfinita con carga puntual y momento en el extremo

De nuevo la solución es la (5.3-3) con condiciones de contorno de momento flector $-M$ y cortante $-P$ en el origen:

$$(5.3-6) \quad \left. \begin{aligned} v''(0) &= \alpha^2 B'' = -2A\alpha^2 = -\frac{M}{EI} \\ v'''(0) &= \alpha^3 B''' = 2(A+B)\alpha^3 = \frac{P}{EI} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A &= \frac{M}{2\alpha^2 EI} \\ B &= \frac{P - \alpha M}{2\alpha^3 EI} \end{aligned}$$

Los movimientos buscados son:

$$\begin{aligned} v(0) &= B = \frac{P - \alpha M}{2\alpha^3 EI} \\ \theta = v'(0) &= \alpha B' = \alpha(A - B) = \frac{2\alpha M - P}{2\alpha^2 EI} \end{aligned}$$

Escribiendo estos resultados de forma matricial:

$$(5.3-7) \quad \begin{pmatrix} v_o \\ \theta_o \end{pmatrix} = \frac{1}{2\alpha^3 EI} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_o \\ M_o \end{pmatrix}$$

se comprueba que la matriz de flexibilidad es simétrica.

Enseñanzas

- Hemos obtenido la importante solución de una viga flotante semiinfinita sometida en su extremo a una carga puntual y a un momento exterior. Para ello:
 - hemos usado la solución general de la ecuación y
 - hemos aplicado las condiciones de contorno de extremo solicitado por esfuerzos cortante y flector:
 - ▶ como las cargas actuaban en el lado dorsal (cara $-x$), los signos de los esfuerzos eran opuestos a los de las cargas.
- Hemos escrito la matriz de flexibilidad (movimientos/fuerzas) del extremo de la viga flotante semiinfinita.

Resumen:

- La ecuación diferencial de la viga flotante se obtiene añadiéndole un término de carga $q(x)$ a la ecuación de la viga sometida a flexión.
- El nuevo término resulta de suponer que el terreno circundante se opone al movimiento como lo haría un campo de muelles elásticos en cada punto:
 - dificultando el movimiento del propio punto,
 - sin conexión ni solidaridad con el muelle del punto vecino.
- La solución general consta de cuatro términos armónicos, con otras tantas constantes de integración; de ellos:
 - dos términos se amortiguan con la distancia y siempre actúan en la solución;
 - otros dos términos se amplifican con la distancia y es preciso prescindir de ellos en vigas de longitud infinita o asimilables.
- Las constantes de integración (4 en vigas finitas, 2 en infinitas) se determinan con las condiciones de contorno, igual que en las vigas en flexión.

5.4 Problemas**Problema 5.4.1: Viga empotrada en un terreno**

La viga de la figura 5.10a consiste en un voladizo empotrado en un terreno elástico. La longitud empotrada puede considerarse infinita. La sección es rectangular de 0,60 m de ancho por 1,00 m de canto. módulo de elasticidad del hormigón es $E=2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ y el coeficiente de balasto del terreno, $\beta=210.000 \text{ kN/m}^3$. Se desea conocer la flecha y el giro en el extremo libre del voladizo sometido a la carga uniforme que se muestra en la figura 5.10a.

Las leyes de esfuerzos en la parte libre se muestran en las figura 5.10b,c. Los movimientos de su extremo A son:

$$\theta_A = \theta_B + \frac{1}{3} \frac{500}{EI} 10$$

$$v_A = v_B - \theta_B 10 - \frac{1}{3} \frac{500}{EI} 10 \frac{3}{4} 10$$

Necesitamos, pues, conocer los movimientos de arrastre de la viga flotante semiinfinita del apartado anterior sometida en el extremo a las cargas $P=-100 \text{ kN}$, $M=500 \text{ kN}\times\text{m}$. Éstos los hallamos en el apartado anterior:

$$\begin{pmatrix} v_B \\ \theta_B \end{pmatrix} = \frac{1}{2\alpha^3 EI} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -100 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Comprueba el resultado intuitivo de que tanto la carga como el momento tienden a darnos flecha hacia abajo y giro antihorario. Los parámetros son $I=0,05 \text{ m}^4$, $EI=10^6 \text{ kN}\times\text{m}^2$, $\alpha^4 = \beta b/4EI = 0,0315 \text{ m}^{-4}$, $\alpha = 0,4213 \text{ m}^{-1}$. Resulta

$$\begin{pmatrix} v_B \\ \theta_B \end{pmatrix} = \frac{6,687}{EI} \begin{pmatrix} 1 & -0,4213 \\ -0,4213 & 0,3550 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -100 \\ 500 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} -2,077 \\ 1,469 \end{pmatrix}$$

Con estos valores se llega a los siguientes movimientos de A: $\theta_A = 3,136/EI = 3,136 \text{ mrad}$, $v_A = -29,267/EI = -29,3 \text{ mm}$.

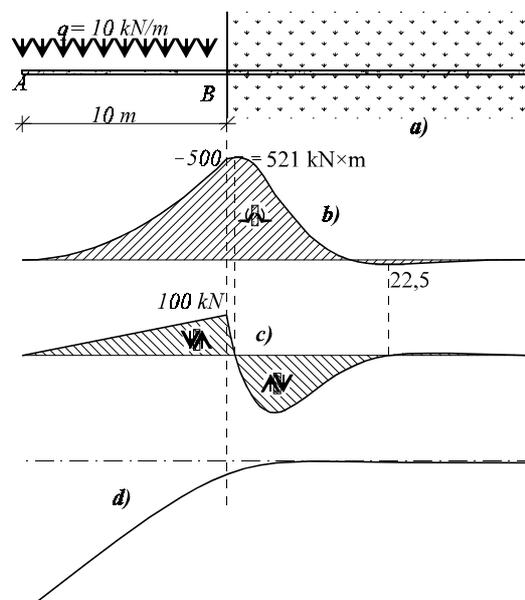


Figura 5.10
Voladizo empotrado en un terreno del problema 5.4-1

Las leyes de esfuerzos en la zona enterrada vienen dadas por:

$$\frac{M}{EI} = v'' = \alpha^2 e^{-\alpha x} (A'' \operatorname{sen} \alpha x + B'' \operatorname{cos} \alpha x)$$

$$-\frac{Q}{EI} = v''' = \alpha^3 e^{-\alpha x} (A''' \operatorname{sen} \alpha x + B''' \operatorname{cos} \alpha x)$$

Las constantes de integración salen de las condiciones de contorno y de sus relaciones entre ellas de la tabla 5.3: $B'' = M(0)/\alpha^2 EI = -2,817 \times 10^{-3} = -2A$, $A = 1,409 \times 10^{-3}$, $B''' = -Q(0)/\alpha^2 EI = -1,337 \times 10^{-3} = 2(A+B)$, $B = -2,077 \times 10^{-3}$. Por consiguiente, $A'' = 2B = -4,155 \times 10^{-3}$, $A''' = 2(A-B) = 6,972 \times 10^{-3}$. Con esto se tiene:

$$(a) \quad \begin{aligned} M(x) &= \alpha^2 e^{-\alpha x} (-4,155 \operatorname{sen} \alpha x - 2,817 \operatorname{cos} \alpha x) \\ Q(x) &= -\alpha^3 e^{-\alpha x} (6,972 \operatorname{sen} \alpha x - 1,337 \operatorname{cos} \alpha x) \end{aligned}$$

Los gráficos de estas funciones se muestran en las figuras 5.10b,c. La deformada viene dada por la ecuación:

$$v(x) = e^{-\alpha x} (1,409 \operatorname{sen} \alpha x - 2,077 \operatorname{cos} \alpha x) \times 10^{-3}$$

y su gráfico se muestra también en la figura 5.10d. Es interesante entender que la reacción que proporciona el equilibrio de cargas verticales la tiene que dar el terreno, por lo que:

$$\int_0^{\infty} \beta b v(x) dx = qL = -100 \text{ kN}$$

(Como la carga es hacia abajo, la reacción tiene que ser hacia arriba, y para esto la deformada tiene que ser predominantemente hacia abajo.) Hagamos la comprobación. La primitiva de $v(x)$ será una función de la forma:

$$\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} [A_o \operatorname{sen} \alpha x + B_o \operatorname{cos} \alpha x]$$

tal que al derivarla nos dé:

$$v(x) = e^{-\alpha x} [(-A_o - B_o) \operatorname{sen} \alpha x + (A_o - B_o) \operatorname{cos} \alpha x]$$

por lo que:

$$\left. \begin{aligned} -A_o - B_o &= 1,409 \times 10^{-3} \\ A_o - B_o &= -2,077 \times 10^{-3} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A_o &= -1,743 \times 10^{-3} \\ B_o &= 0,334 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Calculamos:

$$\begin{aligned} &\beta b \int_0^{\infty} v(x) dx = \\ &= \frac{\beta b}{\alpha} \left[e^{-\alpha x} (A_o \operatorname{sen} \alpha x + B_o \operatorname{cos} \alpha x) \right]_0^{\infty} = -\frac{\beta b B_o}{\alpha} = -99,894 \end{aligned}$$

La ecuación de la deformada en la parte exterior es:

$$v(z) = v_A + \theta_A z - \frac{1}{3} \frac{qz^2}{2EI} z \frac{z}{4} = (-29,267 + 3,136z - 0,4167 \times 10^{-3} z^4) \times 10^{-3}$$

que efectivamente en $z=10$ da $v_B = -2,077 \text{ mm}$, el descenso calculado para ese punto en la viga flotante.

El máximo momento flector se obtiene de las ecuaciones (a) viendo donde se anula $Q(x)$:

$$Q(x) = 0 \Rightarrow \alpha x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1,337}{6,972} = 0,1895 \Rightarrow M = -521,18 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

localizado en $x = 0,45 \text{ m}$. El siguiente máximo se encuentra en $\alpha x = 0,1895 + \pi = 3,311$ en cuyo $x = 7,907 \text{ m}$ se tiene $M = 22,52 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

Enseñanzas:

- Hemos empalmado las distintas soluciones de una viga empotrada elásticamente en un medio flotante:
 - los esfuerzos en la parte exterior, isostática, eran los mismos de una ménsula,
 - los esfuerzos de la parte «sumergida» eran los correspondientes a una viga flotante semiinfinita, hiperestática, con esfuerzos prescritos en el extremo los que le llegan de la ménsula;
 - los movimientos de la parte sumergida eran los resultantes de integrar su ecuación diferencial;
 - los movimientos de la parte exterior tenían dos componentes:
 - ▶ la relativa, de cualquier ménsula, más
 - ▶ la de arrastre, con dos términos:
 - flecha de arrastre y
 - giro, que produce una flecha de arrastre adicional de $giro \times distancia$.

- Encontramos los valores extremos de los momentos flectores en los puntos donde el cortante es nulo. Estos puntos distan entre sí $\lambda/2 = \pi/\alpha$. Observamos cómo se amortiguan los esfuerzos: el momento flector se reduce a menos del 5% ($e^{-\pi}$) en $\lambda/2 = 7,457 m$.

6 Hiperestáticas

6.0 Objetivos y contenido

Objetivos	Contenido
<p>Generales:</p> <ul style="list-style-type: none"> — Entender qué es el hiperestatismo, cómo evaluar su grado, cuáles son sus manifestaciones o consecuencias, sus ventajas y sus inconvenientes. — Aprender a formular los sistemas de ecuaciones algebraicas que conducen a resolver un problema hiperestático 	
<p>Específicos:</p> <ul style="list-style-type: none"> — Aprender a detectar el hiperestatismo, distinguir sus tipos, evaluar su grado, conocer sus ventajas y sus inconvenientes, y saber cómo se resuelven en general las estructuras que lo exhiben §6.1 — Aprender a resolver de manera intuitiva estructuras hiperestáticas muy simples, <ul style="list-style-type: none"> • en estructuras de barras, y • en vigas simples. §6.2 — Aprender el método de cálculo de vigas continuas <ul style="list-style-type: none"> • y extenderlo a otras estructuras en las que se pueda emplear §6.4 — Aprender el método general de cálculo de estructuras hiperestáticas, <ul style="list-style-type: none"> • escribiendo automáticamente el sistema de ecuaciones <ul style="list-style-type: none"> ▶ con hiperestáticas de apoyo rígido, ▶ con hiperestáticas de apoyo flexible, ▶ con hiperestáticas internas. §6.6 	
<p>Adicional:</p> <ul style="list-style-type: none"> — Adquirir soltura en la resolución de estructuras hiperestáticas, <ul style="list-style-type: none"> • sencillas, §6.3 • de viga continua y asimilables, §6.5 • generales. §6.6 	

6.1 Hiperestatismo

Qué es

Una estructura es hiperestática si no es isostática porque contiene *redundancias* de alguno de los dos tipos:

- Le sobran apoyos o coacciones exteriores: tiene más de los estrictamente necesarios para asegurar el equilibrio estático, o
- Le sobran caminos internos para conducir las cargas a los apoyos: tiene más elementos resistentes que los estrictamente indispensables.

Tipos

A tenor de lo dicho, se pueden dar dos tipos de hiperestatismo:

- hiperestatismo *externo*, cuando las coacciones exteriores son excesivas, o
- hiperestatismo *interno*, cuando hay redundancia de caminos para conducir las cargas.

Recuento de hiperestáticas

El procedimiento para determinar el grado de hiperestatismo de una estructura consiste en:

- compararla con una *isostática patrón*, y
- sumar las redundancias que se observen respecto de aquélla, de la siguiente manera:
 - +1 por cada coacción exterior adicional, sea ésta de apoyo rígido o flexible (muelle);
 - +1 por cada esfuerzo que pueda transmitir un elemento resistente redundante:
 - +3 si es una viga (que trasmite axil, cortante y flector),
 - +1 si es un cable (que sólo transmitirá esfuerzo axil);
 - -1 por cada rótula instalada¹.

Ya se dijo en §2.2 que estructuras isostáticas patrón sólo hay dos: la ménsula *generalizada* y con apéndices de la figura 6.1a, y la viga biapoyada *generalizada* y con apéndices de la figura 6.1b. Comparando con la segunda de ellas se determina que:

- El pórtico de la figura 6.1c es de grado de hiperestatismo 1, por su coacción horizontal en *B*.
- El pórtico de la figura 6.1d es de grado de hiperestatismo 1, por el cable añadido entre *C* y *D*.
- El marco de la figura 6.1e es de grado de hiperestatismo 3, por la viga añadida entre *C* y *D*.
- El pórtico triarticulado de la figura 6.1f es *isostático* porque el recuento arroja *cero* hiperestáticas: +1 por la coacción horizontal en *B* y -1 por la rótula intermedia. El pórtico triarticulado es una estructura bastante frecuente y quizás debiéramos considerarla como estructura isostática básica.

Comparando con la ménsula generalizada de la figura 6.1a, se determina que:

- La ménsula con pescante atirantado de la figura 6.1g es hiperestática de grado 1, por el cable que conecta sus apéndices.
- El arco de la figura 6.1h es de grado de hiperestatismo 2, por los dos apoyos flexibles en *B* y *C*.

El recuento de hiperestáticas debe arrojar el mismo valor si se parte de una u otra isostática básica.

¹ Además de las rótulas, que se disponen para eliminar el momento flector en una sección, pueden darse otros ingenios mecánicos para anular el cortante o el axil. En tales casos habrá que añadir un -1 por cada esfuerzo *liberado* en una sección.

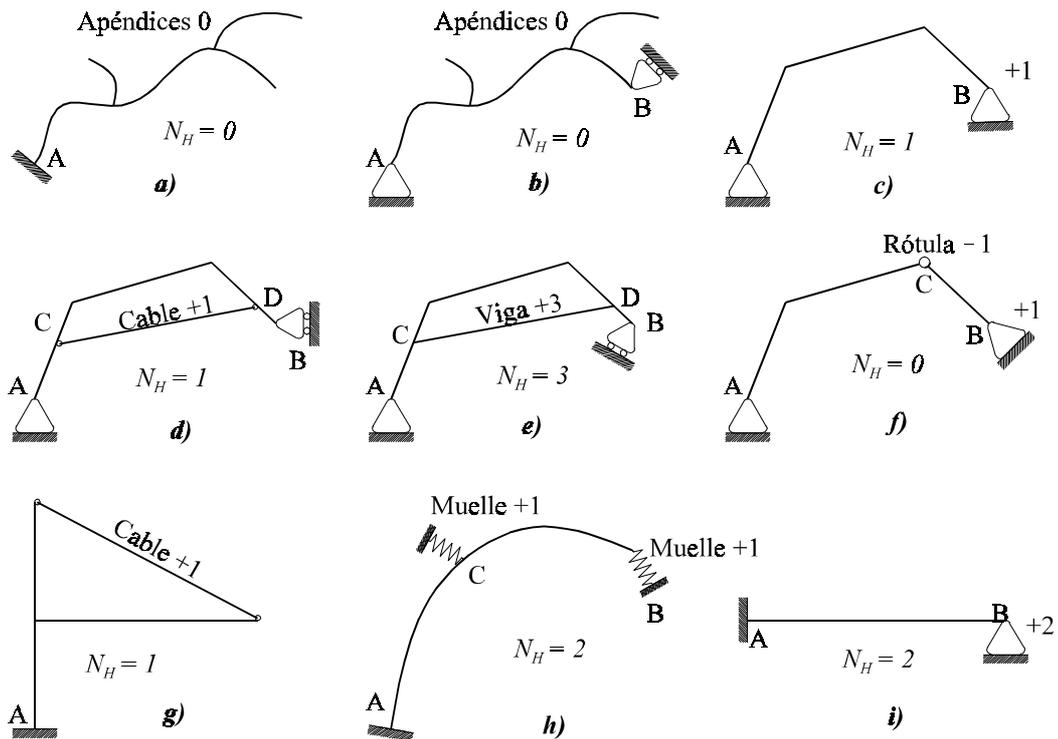


Figura 6.1
Recuento de hiperestáticas

Hiperestáticas efectivas

El recuento anterior da un resultado total que a veces no se manifiesta en el cálculo para algunas cargas particulares. Así, la viga empotrada-apoyada de la figura 6.1*i* es de grado de hiperestatismo 2; sin embargo, para cargas perpendiculares a la directriz y momentos, en flexión (que no intenta modificar su longitud), sólo se manifiesta un grado de hiperestatismo; para cargas horizontales sólo se manifiesta el otro. En el apartado de vigas continuas nos fijaremos más en este fenómeno.

Ventaja e inconveniente

Veremos que las estructuras hiperestáticas exhiben:

- la ventaja de que *reparten mejor los esfuerzos*:
 - entre los elementos resistentes que la componen,
 - entre las secciones de un mismo elemento resistente.
- el inconveniente de que *sufren esfuerzos por movimientos impuestos*, tales como:
 - dilatación térmica, o
 - imperfecciones geométricas, o
 - movimientos de los apoyos...

los cuales no afectan, en cambio, a las estructuras isostáticas, libres para acomodar cualquier tipo de deformación y para moverse a su antojo².

Cálculo

El método general de cálculo de estructuras hiperestáticas se describe con detalle en el apartado 6.6. Adelantaremos, no obstante, los pasos a seguir:

² Ésta puede ser una definición de estructura isostática: la que permite deformaciones impuestas sin generar esfuerzos en ella.

- Se reduce la estructura hiperestática a otra *isostática asociada* de la siguiente manera:
 - reemplazando las coacciones externas redundantes por sus reacciones exteriores, desconocidas, y
 - reemplazando cada elemento resistente considerado redundante por los esfuerzos (desconocidos) que transmite.
- Se escribe (y resuelve) el sistema de ecuaciones hiperestáticas que expresan que bajo las cargas exteriores (conocidas) y las hiperestáticas (desconocidas) se obtiene:
 - movimientos nulos en las direcciones de las coacciones liberadas, y
 - movimientos relativos nulos entre los extremos de los elementos resistentes redundantes y la estructura.

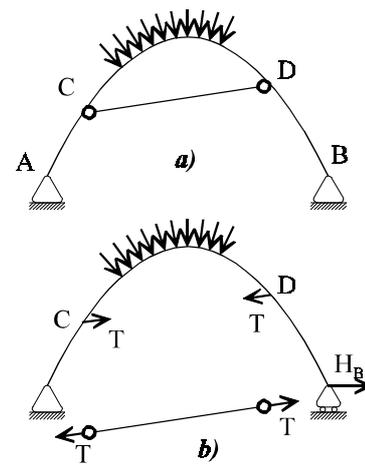


Figura 6.2
Reducción de estructura hiperestática a isostática asociada

Así, por ejemplo, el cálculo de la estructura hiperestática de grado 2 de la figura 6.2a se puede realizar de la siguiente manera. Escogemos como incógnitas hiperestáticas la reacción horizontal del apoyo B y la tensión T en el tirante. Asimilamos su comportamiento al de la estructura *isostática asociada* de la figura 6.2b sobre la que actúan: la carga exterior, conocida, y las fuerzas desconocidas H_B y $\pm T$. Se escriben las ecuaciones hiperestáticas, que expresan que, bajo ambos grupos de cargas, se dan los siguientes movimientos: $u_B = 0$, $\delta_{CD}^{(arco)} = \delta_{CD}^{(cable)}$. Resolviéndolas se determinan H_B y T .

En el apartado 6.6 se dan reglas para escribir el sistema de ecuaciones hiperestáticas de forma automática.

Resumen

- Estructuras hiperestáticas son las que poseen *redundancias*
 - externas, por exceso de coacciones de apoyo, o
 - internas, por disponer de más elementos resistentes que los indispensables.
- El grado de hiperestatismo se determina comparando con una estructura isostática tipo y sumando:
 - el número de reacciones externas en exceso de 3,
 - los apoyos flexibles cuentan igual que los rígidos;
 - el número de esfuerzos que pueden transmitir los elementos resistentes redundantes;
 - - 1 por cada rótula añadida.
- Algunas cargas exteriores no activan todas las coacciones hiperestáticas.
- El hiperestatismo:
 - es favorable para cargas gravitatorias: reparte mejor los esfuerzos
 - es desfavorable para movimientos y deformaciones impuestos (asientos, dilataciones)
- El cálculo de estructuras hiperestáticas se realiza:
 - convirtiendo la estructura en otra isostática *asociada*, reemplazando las coacciones redundantes por cargas exteriores desconocidas, y
 - determinando dichas incógnitas de modo que los movimientos de la estructura isostática asociada cumplan las mismas restricciones que los de la hiperestática original.

6.2 Estructuras hiperestáticas simples

Ejemplo 6.2.1: Reparto de una fuerza horizontal

En una viga biarticulada (figura 6.3a) de rigidez axial EA constante queremos encontrar cómo se reparte entre los apoyos una carga horizontal H que actúa en un punto intermedio $x = a$ del vano de luz L .

Isostática asociada

Se trata de una estructura hiperestática de grado 1; sin embargo, este hiperestatismo sólo lo activan las cargas horizontales: para cargas verticales o momentos esta viga se comporta como isostática. Podemos elegir como incógnita hiperestática la reacción horizontal en A o la reacción horizontal en B . Eligiendo esta última resulta como estructura isostática asociada la de figura 6.3b, sometida a la carga exterior H , conocida, y a la reacción H_B desconocida. La misión de esta última es mantener el punto B inmóvil; la ecuación hiperestática o de compatibilidad es, pues, $u_B = 0$.

Superposición

Sobre la estructura isostática asociada actúan dos clases de cargas: las exteriores, conocidas, y la reacción hiperestática, desconocida. Invocando el principio de superposición, calcularemos separadamente las contribuciones de cada una al movimiento u_B .

Esfuerzos, movimientos

Para calcular dichos movimientos es preciso determinar antes los esfuerzos que los producen. Es conveniente separar los casos de carga exterior y reacción hiperestática. Sobre la estructura isostática asociada de la figura 6.3b la carga exterior produce la ley de esfuerzos axiles de la figura 6.3c, y la hiperestática H_B , la de la figura 6.3d. Con ellas se determinan los movimientos siguientes:

$$u_B^{(ext)} = \frac{Ha}{EA} ; \quad u_B^{(H_B)} = \frac{H_B L}{EA}$$

¿Deformación por axil?

La deformación por esfuerzo axil se desprecia casi siempre frente a la de flexión. Como aquí no hay deformación de flexión, no podremos despreciar frente a ella la deformación por axil: ¡nos quedaríamos sin deformaciones con las que calcular los movimientos de nuestra ecuación de compatibilidad!

Ecuación hiperestática

La ecuación hiperestática es, pues:

$$\frac{Ha}{EA} + H_B \frac{L}{EA} = 0$$

El valor de las reacciones es:

$$(6.2-1) \quad H_A = -H \frac{b}{L} ; \quad H_B = -H \frac{a}{L}$$

y la ley de esfuerzos axiles finales la de la figura 6.3e.

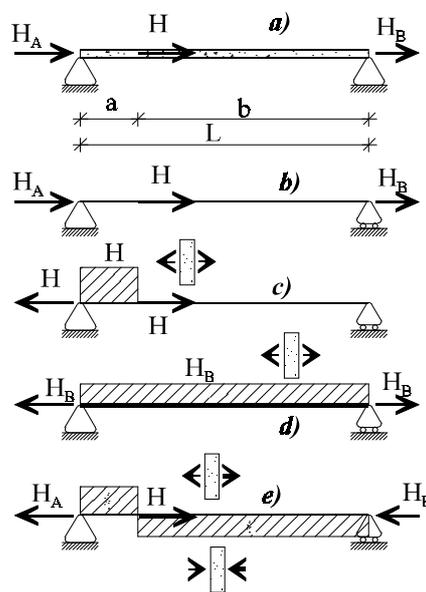


Figura 6.3 Estructura y diagramas del ejemplo 6.2.1

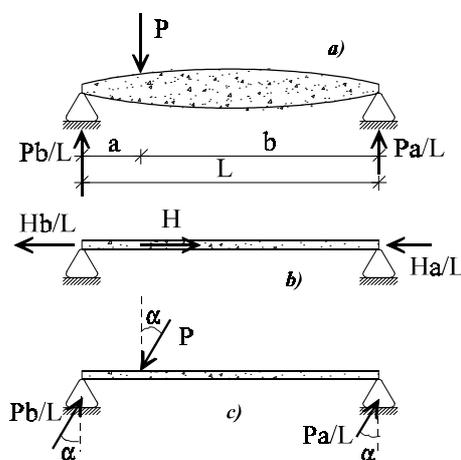


Figura 6.4 Reparto de cargas verticales, horizontales e inclinadas

Enseñanzas:

- Hemos resuelto una estructura hiperestática *externa* de grado 1 por el método general. Hemos dado los siguientes pasos:
 - considerar una estructura isostática asociada con:
 - cargas exteriores, conocidas,
 - y reacción hiperestática, desconocida;
 - escribir *su* ecuación de *compatibilidad en movimientos*;
 - determinar *separadamente* los esfuerzos de cada sistema de cargas y, a partir de ellos,
 - calcular los movimientos que cada carga aporta a la ecuación de compatibilidad;
 - resolver la ecuación hiperestática y recomponer las leyes de esfuerzos.
- Hemos tenido que incluir las deformaciones por esfuerzo axil porque no había otras más importantes frente a las cuales despreciarlas.
- El resultado es sorprendente: en la viga de sección constante las cargas horizontales se reparten entre los apoyos igual que lo hacen las cargas verticales (en una viga de sección cualquiera) (figura 6.4a,b). El corolario es que en las vigas de sección constante las cargas inclinadas producen reacciones paralelas a ellas (figura 6.4c).
- Observamos que mientras en la viga isostática toda la carga H se la lleva un tramo (figura 6.3c), en la hiperestática se reparte entre los dos (figura 6.3e).

Ejemplo 6.2.2: Cargas mecánica y térmica sobre estructura de tres barras

Se trata de encontrar qué esfuerzos axiles produce en la estructura de la figura 6.5a (de igual sección EA y articuladas entre sí en su extremo común D) las siguientes cargas consideradas separadamente: (i) una carga vertical P , (ii) una carga horizontal H , y (iii) un incremento de temperatura ΔT° sobre la barra AD .

Isostática asociada, compatibilidad

Para sujetar las carga serían suficientes dos barras, que se las repartirían entre ellas de acuerdo con la regla del paralelogramo de fuerzas (figura 6.5c). Considerando la barra vertical como elemento redundante que sólo conduce esfuerzo axil, encontramos que la estructura es hiperestática interna de grado 1; su estructura isostática asociada puede ser la de la figura 6.5b. La ecuación de compatibilidad debe expresar que los movimientos verticales (i) de la estructura isostática asociada bajo la carga exterior y el axil N_2 , y (ii) de la barra central bajo su esfuerzo N_2 han de ser iguales. Empezamos con la hipótesis de carga vertical P .

Esfuerzos, movimientos; contragradiencia

La regla del paralelogramo dada para la estructura isostática sometida a una carga vertical $P-N_2$ los esfuerzos (figura 6.5c):

$$(a) \quad 2N_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = P - N_2$$

El alargamiento de cada barra (de longitud $L/\text{sen } \phi$) debido a su esfuerzo es:

$$(b) \quad \delta_{AD} = \delta_{CD} = \frac{\frac{P - N_2}{2} \frac{L}{\text{sen } \phi}}{EA}$$

lo que lleva a los extremos de cada barra a las posiciones D' y D'' (figura 6.5d). Para acabar en posición aceptable para ambas, girarán en torno a sus puntos fijos A y C describiendo unos arcos de circunferencia degenerados en segmentos perpendiculares $D'D_1$, $D''D_1$; acabando, pues, en la posición D_1 . El desplazamiento vertical hacia abajo $v = DD_1$ en la estructura isostática asociada vale:

$$(c) \quad v = \frac{\delta_{AD}}{\cos(\pi/2 - \phi)} = \frac{P - N_2}{EA} \frac{L}{2\text{sen}^3 \phi}$$

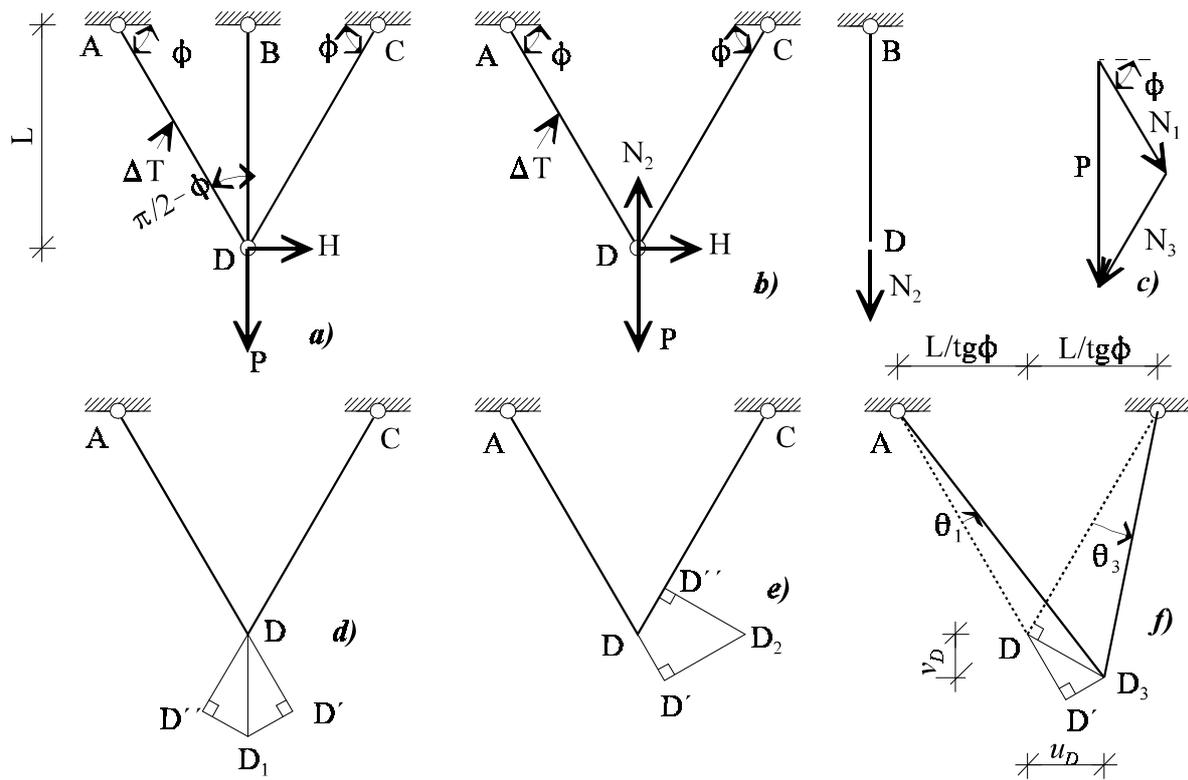


Figura 6.5
Estructura y diagramas del ejemplo 6.2.2

Observa el diferente tratamiento de las fuerzas en (a) y los movimientos en (c) que proclama el principio de **contraradiencia**:

- las fuerzas en las barras se proyectan para resistir la fuerza del nudo, mientras que
- *el movimiento del nudo se proyecta para dar los movimientos de las barras.*

En la barra aislada BD su esfuerzo axial provoca un desplazamiento vertical hacia abajo de valor $N_2 L / EA$. La compatibilidad exige que ambos desplazamientos verticales sean iguales:

$$(d) \quad \frac{P - N_2}{EA} \frac{L}{2 \operatorname{sen}^3 \phi} = \frac{N_2 L}{EA} \Rightarrow N_2 = \frac{P}{2 \operatorname{sen}^3 \phi + 1}$$

El resultado tiene buen aspecto: si $\phi = \pi/2$, $N_2 = P/3$ como dicta la razón. Los demás esfuerzos axiales salen de la ecuación (a):

$$(N_3 =) N_1 = \frac{P \operatorname{sen}^2 \phi}{2 \operatorname{sen}^3 \phi + 1}$$

Carga horizontal

La carga horizontal H provocará esfuerzos axiales iguales y de signo contrario sobre las barras de la estructura isostática:

$$N_1 = -N_3 = \frac{H}{2 \operatorname{cos} \phi}$$

El alargamiento y acortamiento consiguientes encontrarán su punto de encuentro en el punto D_2 de la figura 6.5e, situado en la horizontal DD_2 . Por tanto, la barra BD se moverá a BD_2 sin necesidad de alargarse, sin provocar esfuerzo axial: $N_2 = 0$. Este resultado concuerda con lo esperado por la antisimetría de la carga.

Carga térmica

Esta carga funciona como cualquiera otra. Los movimientos u_D , v_D del punto D (figura 6.5f) en la estructura isostática asociada se calculan con la fórmula (4.4-3); el encuentro se logra como en (4.4-4):

$$\left. \begin{aligned} u_D &\equiv \frac{L}{\operatorname{tg}\phi} \alpha \Delta T + \theta_1 L = \theta_3 L \\ v_D &\equiv L \alpha \Delta T - \theta_1 \frac{L}{\operatorname{tg}\phi} = \theta_3 \frac{L}{\operatorname{tg}\phi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\operatorname{tg}^2\phi - 1}{2 \operatorname{tg}\phi} \alpha \Delta T \\ \theta_3 &= \frac{\operatorname{tg}^2\phi + 1}{2 \operatorname{tg}\phi} \alpha \Delta T \end{aligned} \right\}$$

$$v_D = \frac{L}{2 \operatorname{sen}^2\phi} \alpha \Delta T$$

(El desplazamiento u_D no interesa: no tensiona la barra central.) Corregimos este movimiento v_D introduciendo fuerzas $\pm N_2$ en la barra 2 y en la estructura isostática considerada. En esta última N_2 produce el movimiento dado en (c) con $P=0$. La ecuación hiperestática equivalente a la (d) anterior es ahora:

$$\frac{L}{2 \operatorname{sen}^2\phi} \alpha \Delta T - \frac{L}{2 \operatorname{sen}^3\phi EA} N_2 = N_2 \frac{L}{EA}$$

$$N_2 = \frac{\operatorname{sen}\phi}{2 \operatorname{sen}^3\phi + 1} EA \alpha \Delta T$$

Y recordando (a) encontramos los demás axiles:

$$N_1 = N_3 = -\frac{N_2}{2 \operatorname{sen}\phi} = -\frac{1}{2(2 \operatorname{sen}^3\phi + 1)} EA \alpha \Delta T$$

Enseñanzas

- Hemos aplicado el método general de resolución de una estructura hiperestática *interna* para hipótesis de carga heterogéneas:
 - fuerzas exteriores, y
 - movimientos impuestos (por calentamiento)
- Vemos que la ecuación hiperestática es semejante para todos los casos de carga:
 - El coeficiente de la incógnita hiperestática es siempre el mismo, y
 - ▶ sólo depende de la estructura isostática asociada;
 - ▶ representa el movimiento (o la suma de movimientos) causado por una fuerza hiperestática unidad;
 - ▶ es siempre positivo (o suma de términos positivos) si la fuerza hiperestática y su desplazamiento se toman positivos con el mismo sentido.
 - El término independiente es el movimiento causado por la carga exterior al actuar sobre la estructura isostática asociada.
- Se ha puesto de manifiesto el principio de contragradencia:
 - las fuerzas en las barras se proyectan para resistir la fuerza del nudo, mientras que
 - el movimiento del nudo se proyecta para dar los movimientos de las barras.
- Hemos comprobado que las estructuras hiperestáticas sufren esfuerzos cuando se las somete a movimientos impuestos (no así las isostáticas).

Ejemplo 6.2.3: Viga biempotrada

Queremos encontrar cómo se reparten sobre una viga biempotrada los momentos flectores producidos por una sobrecarga uniforme q (figura 6.6a).

Grado de hiperestatismo

Se trata de una estructura hiperestática de grado 3. Sin embargo, uno de ellos (el de reparto de reacciones horizontales) sólo se activa mediante cargas axiales: para cargas de flexión (perpendiculares a la directriz o momentos) el grado de hiperestatismo efectivo es 2. En este caso, además, podemos aprovechar la simetría para reducirlo a uno.

Método 1: una incógnita

En efecto: si tomamos como estructura isostática asociada la viga biapoyada con momentos en los extremos de igual magnitud y sentidos opuestos (figura 6.6b), la misión de éstos será anular los giros θ_A y θ_B de los extremos. La ecuación de compatibilidad es:

$$\theta_A^{(ext)} + \theta_A^{(M)} = 0$$

$$-\frac{qL^3}{24EI} + \frac{ML}{3EI} + \frac{ML}{6EI} = 0$$

$$M = \frac{qL^2}{12EI}$$

¡La ley de M_f se mueve!

La ley de momentos flectores resultante es la suma de las correspondientes a la carga uniforme (figura 6.6c) y a los momentos de empotramiento (figura 6.6d); esta suma se dibuja en la figura 6.6e. **El hiperestatismo empuja hacia arriba la ley de momentos flectores de la estructura isostática.**

Método 2: dos incógnitas

La elección de incógnitas hiperestáticas no afecta al resultado pero sí, al trabajo necesario para hallarlo. Así, si elegimos como estructura isostática asociada la ménsula de la figura 6.6f, las incógnitas hiperestáticas serán dos, M_B y V_B , en vez de una, porque hemos roto la simetría del problema (a menos que tengamos la astucia de decidir $V_B = qL/2$). Las ecuaciones de compatibilidad serán $\theta_B = 0$, $v_B = 0$ (escritas en el mismo orden que sus incógnitas "novias"), movimientos que se obtienen a partir de las leyes de momentos flectores de las figuras 6.6g-i:

$$\left. \begin{aligned} \theta_B &= \frac{M_B}{EI}L + \frac{1}{2} \frac{V_B L}{EI}L - \frac{1}{3} \frac{qL^2}{2EI}L = 0 \\ v_B &= \frac{M_B L}{EI} \frac{L}{2} + \frac{1}{2} \frac{V_B L}{EI}L \frac{2}{3}L - \frac{1}{3} \frac{qL^2}{2EI}L \frac{3}{4}L = 0 \end{aligned} \right\}$$

Este sistema queda límpido escrito en forma matricial:

$$(d) \quad \begin{pmatrix} L & \frac{L^2}{2} \\ \frac{L^2}{2} & \frac{L^3}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_B \\ V_B \end{pmatrix} = \frac{qL^3}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3L}{4} \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{aligned} M_B &= -\frac{qL^2}{12} \\ V_B &= \frac{qL}{2} \end{aligned} \right\}$$

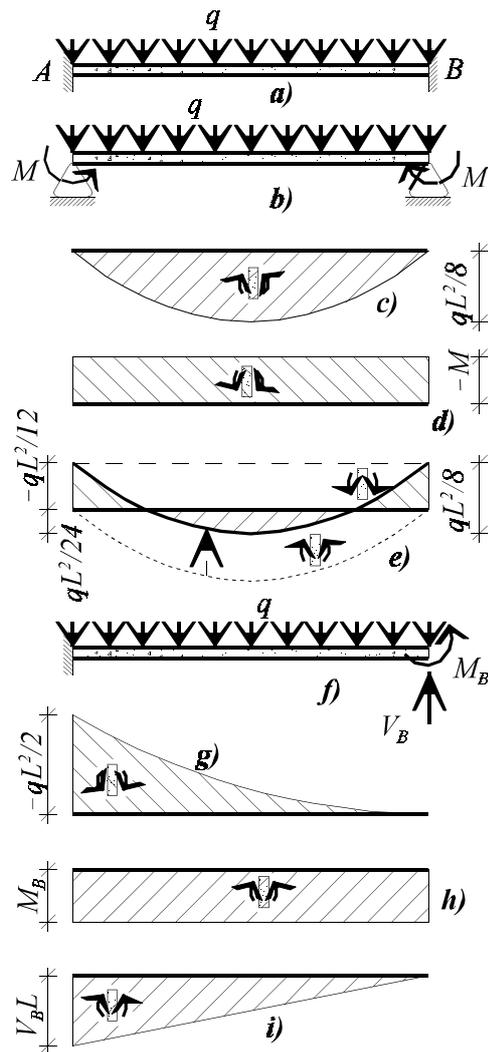


Figura 6.6
Viga biempotrada y diagramas del ejemplo 6.2.3

Método 3: truco de profe repelente

Si hemos entendido que los momentos hiperestáticos en los extremos “suben” la ley de momentos flectores, podemos calcular cuánto ha de ser esta “subida” para que el giro relativo entre los dos extremos de la viga sea cero. Las áreas de momentos flectores negativa M' y positiva deben ser iguales. Por tanto:

$$M' L = \frac{2 q L^2}{3 \cdot 8} L \Rightarrow M' = \frac{q L^2}{12}$$

Enseñanzas:

- El resultado final no depende de las incógnitas hiperestáticas escogidas; el esfuerzo de cálculo, sí.
- La ley de momentos flectores en la viga hiperestática es la de la viga isostática pero
 - desplazada hacia "arriba" (cuando el efecto hiperestático es beneficioso),
 - lo cual reduce el esfuerzo máximo.
- El sistema (d) de ecuaciones hiperestáticas (si se escriben las ecuaciones en el mismo orden que las incógnitas y con el mismo criterio de signos):
 - es simétrico,
 - los coeficientes de la diagonal principal son positivos,
 - la matriz sólo depende de la estructura,
 - el término independiente contiene los movimientos por cargas exteriores, con signo negativo.
 - Si nos cambian la carga exterior sólo tenemos que cambiar el término independiente.

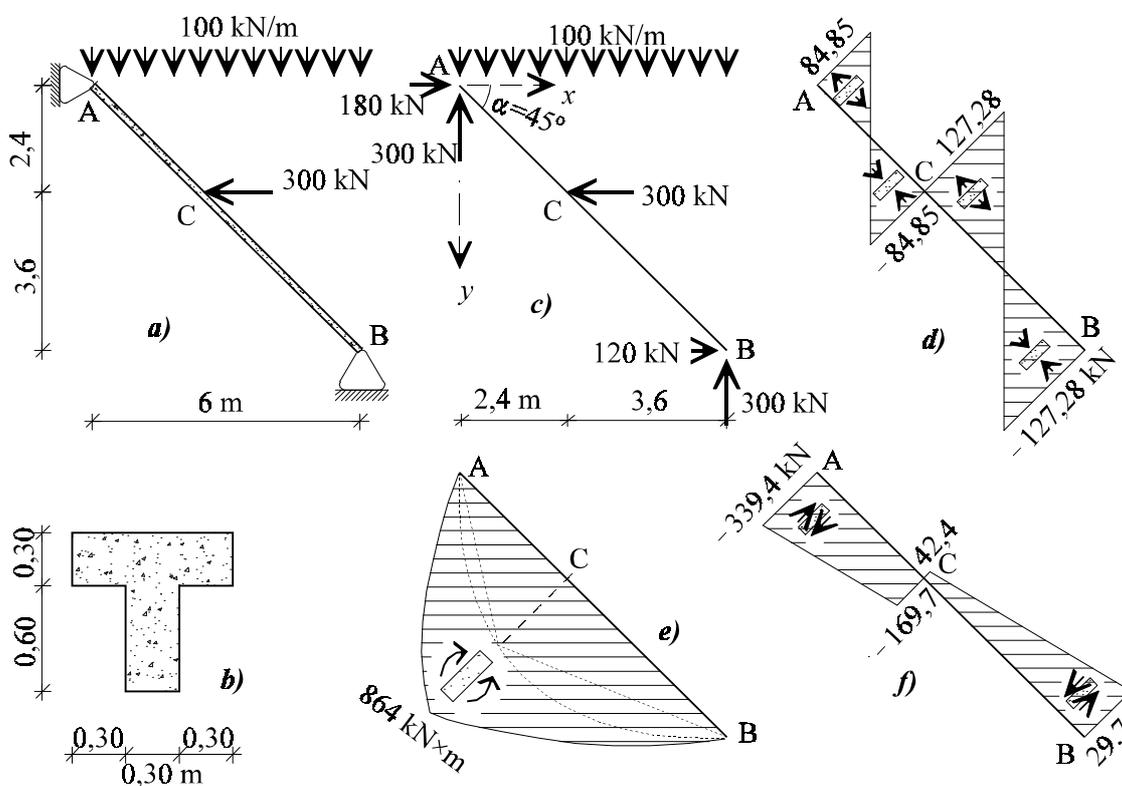


Figura 6.7
Estructura y diagramas del problema 6.3.1

6.3 Problemas de estructuras hiperestáticas sencillas

Problema 6.3.1: Cargas oblicuas

En la viga de la figura 6.7a, cargada como se muestra en la propia figura, cuya sección transversal se muestra en la figura 6.7b, se pide determinar:

- La máxima tensión de compresión.
- La máxima tensión de tracción.
- La máxima tensión tangencial.

Así como la localización (sección y fibra) en que aquellas tensiones se producen. (Examen enero 96.)

De acuerdo con las enseñanzas del ejemplo 6.2.1, la carga horizontal de 300 kN producirá reacciones horizontales inversamente proporcionales a su distancia a los apoyos: $H_A = 300 \times 3,6/6 = 180 \text{ kN}$, $H_B = 300 \times 2,4/6 = 120 \text{ kN}$; y la carga vertical (definida por unidad de longitud *proyectada*, x), reacciones verticales $V_A = V_B = 300 \text{ kN}$ (figura 6.7c).

Las leyes de esfuerzos serán (en el sistema x, y de la figura 6.7c):

$$\begin{aligned} N^{(AC)}(x) &= (300 - 100x)\text{sen}\alpha - 180\text{cos}\alpha \\ N^{(CB)}(x) &= (300 - 100x)\text{sen}\alpha + (300 - 180)\text{cos}\alpha \\ M^{(AC)}(x) &= 300x + 180y - 100\frac{x^2}{2} \\ M^{(CB)}(x) &= 300x + 180y - 100\frac{x^2}{2} - 300(y - 2,4) \end{aligned}$$

en donde $y = x$, $\text{cos}\alpha = \text{sen}\alpha = \sqrt{2}/2$. En el punto C se tienen los siguientes esfuerzos: $N_{C-} = -84,85 \text{ kN}$, $N_{C+} = 127,28 \text{ kN}$, $M_C = 864 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

En el centro del vano se tienen los siguientes esfuerzos:

$$\begin{aligned} N_M &= (300 - 180 - 100 \times 3 + 300)\sqrt{2}/2 = 84,85 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_M &= 300 \times 3 + 180 \times 3 - 100 \times 3 \times 3/2 - 300 \times 0,6 = 810 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Las leyes de esfuerzos axiales y momentos flectores son las que se muestran en las figuras 6.7d,e. Esta última es la suma de la parábola de 2º grado de la carga distribuida más el triángulo de la carga puntual, que se muestran de puntos en la figura 6.7e.

Los parámetros mecánicos de la sección son: $A = 0,45 \text{ m}^2$, $c_s = 0,33 \text{ m}$, $c_i = 0,57 \text{ m}$, $I = 0,0293 \text{ m}^4$, $M_e^{\text{max}} = 0,0486 \text{ m}^3$. La combinación pésima para producir tensión de compresión se da en la sección C^- , fibra superior de la sección:

$$\sigma_s^{\text{máx-}} = \frac{-84,85}{0,45} - \frac{864}{0,0293} \cdot 0,33 = -9.919,6 \text{ kN/m}^2$$

La máxima tensión de tracción se producirá en la fibra inferior de C^+ :

$$\sigma_i^{\text{máx+}} = \frac{127,28}{0,45} - \frac{864}{0,0293} \cdot (-0,57) = 17.091 \text{ kN/m}^2$$

La máxima tensión tangencial se tendrá sobre la fibra neutra de la sección A , donde el cortante vale $(300 + 180)\sqrt{2}/2 = 339,4 \text{ kN}$:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{339,4}{0,0293} \frac{0,0486}{0,30} = 1.876,5 \text{ kN/m}^2$$

Enseñanzas:

- Nos ha sido muy útil saber de antemano cómo se reparten entre los apoyos las cargas oblicuas a una viga.
- En las vigas rectas se produce *desacoplamiento* entre los esfuerzos axiales y de flexión:
 - para los esfuerzos axiales, sólo cuentan las cargas axiales.
 - para los esfuerzos de flexión (cortantes y flectores) sólo, las cargas transversales
 - ▶ perpendiculares a la viga
 - ▶ y momentos

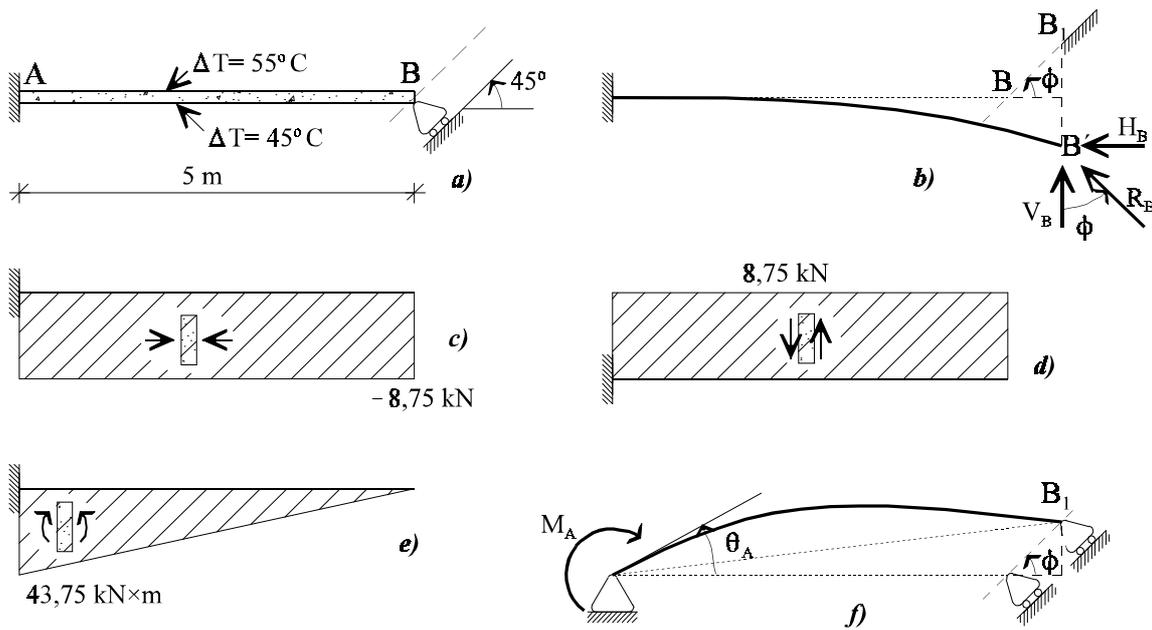


Figura 6.8
Estructura y diagramas del problema 6.3.2

Problema 6.3.2: Apoyo avieso

La viga de la figura 6.8a está empotrada en su extremo izquierdo y simplemente apoyada sobre un plano inclinado 45° en su extremo derecho. Su sección es rectangular de 50 cm de canto por 35 cm de ancho. La viga sufre un incremento térmico de 55°C en su cara superior y de 45°C en su cara inferior. Se admite que en el interior la temperatura varía linealmente en el canto. Las características del material son: $E=20.000\text{ MPa}$, $\alpha=10^{-5}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Se pide:

a) Dibujar y acotar las leyes de esfuerzos axil, cortante y flector.

b) Determinar los tres movimientos del extremo B de la viga.

Nota: Se despreciarán las deformaciones producidas por los esfuerzos axil y cortante. (Examen junio 95.)

Solución 1

a) Tomamos como incógnita hiperestática la reacción en B. Liberando su coacción, por efecto de la carga térmica el punto B tendrá un movimiento horizontal u_B debido al alargamiento térmico³ y un movimiento vertical v_B producido por la curvatura:

$$u_B = \alpha \Delta T_g L = 2,5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$v_B = -\alpha \frac{\Delta T_s - \Delta T_i}{h} L \frac{L}{2} = -2,5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Aunque producen movimientos, estas cargas térmicas no producen esfuerzos sobre la estructura isostática asociada.

Se ve que el efecto térmico lleva el punto B a la posición B' de la figura 6.8b. Este punto no yace sobre el plano inclinado de la sustentación en B por lo que habrá que introducir una reacción en B (de componentes V_B , H_B) que lo lleve a B₁. Este punto debe estar sobre la vertical de B porque al despreciar la deformación por esfuerzo axil la viga debe mantener su longitud final $L+u_B$; el lugar geométrico de B₁ es, pues, la circunferencia de centro en A y radio $L+u_B$, que para movimientos pequeños degenera en el segmento perpendicular a B. La ecuación de

³ El hecho de que se nos permita despreciar las deformaciones por axil $\epsilon = N/EA$ (frente a las de flexión $\epsilon(y) = -\chi \cdot y$) no nos da ningún derecho a despreciar las elongaciones térmicas $\epsilon_T = \alpha \Delta T$.

compatibilidad es (tanto si se desprecia la deformación por axil como si no) $v_B = u_B \operatorname{tg} \phi$. Para cumplirla, V_B debe elevar B' la cantidad de $-v_B^{(ext)} + u_B^{(ext)} \operatorname{tg} \phi$. Para ello debe valer:

$$\frac{V_B L^3}{3EI} = 5 \times 10^{-3} \text{ m} \rightarrow V_B = 0,875 \text{ t}$$

Esta V_B debe provenir de una reacción inclinada de valor $R_B = V_B \sqrt{2}$, que producirá (a la vez que la componente vertical V_B) una componente horizontal $H_B = -V_B \operatorname{tg} \phi$.⁴ Las leyes de esfuerzos axiles, cortantes y flectores son las producidas por estas reacciones hiperestáticas, las de las figuras 6.8c-e.

Si se decidiera incluir la influencia del esfuerzo axil, la ecuación hiperestática general es:

$$v_B^{(ext)} + \frac{V_B L^3}{3EI} = \left(u_B^{(ext)} - \frac{V_B \operatorname{tg} \phi L}{EA} \right) \operatorname{tg} \phi$$

en donde ya se ha hecho uso de $H_B = -V_B \operatorname{tg} \phi$. Esta ecuación da por resultado $V_B = 0,873 \text{ t}$. por lo que el error cometido al despreciar el esfuerzo axil es del 0,25%.

b) Los movimientos finales de B son $u_B = v_B = 2,5 \text{ mm}$. El giro final en B proviene (i) de la curvatura por temperatura y (ii) de la flexión de la reacción V_B :

$$\theta_B = \chi_T L + \frac{1}{2} \frac{V_B L}{EI} L = -1 \times 10^{-3} + 1,5 \times 10^{-3} = 0,5 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Solución 2

a) Tomaremos como hiperestática el momento en el empotramiento A . Por efecto del alargamiento térmico se tienen los movimientos $u_B = v_B = 2,5 \times 10^{-3} \text{ m}$ sobre la estructura isostática asociada (figura 6.8f), además de la curvatura térmica de $-0,2 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$. Estos efectos producirán giros:

- (i) por elevación del apoyo B : $\theta_A = \theta_B = v_B/L = 0,5 \times 10^{-3} \text{ rad}$, y
- (ii) por curvatura térmica: $\theta_A = -\theta_B = \chi_T L/2 = 0,5 \times 10^{-3} \text{ rad}$.

Para anular el giro en A necesitamos un momento exterior en ese punto (figura 6.8f) de valor $M_A = -3EI$. $\theta_A/L = -4,375 \text{ m} \times \text{t}$ (el signo - por su sentido horario).

b) Los movimientos finales de B son los u_B y v_B del caso térmico, más el giro θ_B causado por: (i) el movimiento de apoyo v_B , (ii) la curvatura térmica y (iii) el momento hiperestático M_A , que totalizan: $0,5 \times 10^{-3} - 0,5 \times 10^{-3} - M_A L/6EI = 0,5 \times 10^{-3} \text{ rad}$.

Enseñanzas:

- Hemos resuelto un problema de hiperestática con apoyo oblicuo de dos maneras:
 - En la primera, la reacción hiperestática era la propia *de apoyo oblicuo*; por ello
 - ▶ los movimientos de la estructura isostática asociada era muy fáciles de calcular, pero
 - ▶ la ecuación de compatibilidad era más compleja que la de apoyo fijo, porque una componente de la reacción inducía otra.
 - En el segundo procedimiento la incógnita hiperestática era de apoyo fijo, por lo que
 - ▶ la ecuación hiperestática era muy sencilla de escribir, pero
 - ▶ en la estructura isostática había unos movimientos inducidos por otros.
- En este problema pudimos despreciar la deformación por esfuerzo axil porque teníamos deformación por flexión, más importante.
- Resolvimos el problema (i) despreciando y (ii) considerando la deformación por axil, y comprobamos que, efectivamente, su influencia era despreciable.

⁴ Observa la variación inversa $v_B/u_B = \operatorname{tg} \phi = H_B/V_B$.

Problema 6.3.3: Losa rígida colgada

Una viga infinitamente rígida de 100 kN de peso está suspendida de tres barras biarticuladas (figura 6.9a). Las barras laterales son de aluminio ($E=0,7 \times 10^5$ MPa, $\alpha=27 \times 10^{-6}$ °C $^{-1}$) de 2 cm 2 de sección, y la interior, de acero ($E=2,1 \times 10^5$ MPa, $\alpha=12 \times 10^{-6}$ °C $^{-1}$) de 12 cm 2 de sección. Se pide:

a) Determinar los esfuerzos de cada barra cuando sólo actúa el peso propio.

b) Calcular las esfuerzos totales de cada barra cuando, además del peso propio, actúa la siguiente carga térmica: un enfriamiento de 20°C en la barra de acero y un calentamiento de 15°C en las barras de aluminio. (Examen febrero 94.)

Si la estructura colgara de dos barras, sería estable para cargas verticales⁵; la tercera barra, redundante, la convierte en hiperestática de primer grado. Como las únicas deformaciones son las de esfuerzo axial, es indispensable considerarlas.

Tomaremos como incógnita hiperestática el esfuerzo axial N_2 en la barra intermedia. La estructura isostática asociada es, pues, la de la figura 6.9b, en la que la carga N_2 es la necesaria para conseguir $v_B^{(viga)} = v_B^{(barra)}$.

a) Debido al peso propio, $N_1 = N_3 = 50$ t:

$$v_A = v_C = -\frac{50 \times 1}{0,7 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-4}} = -3,571 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$v_B = -3,571 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Debido a la carga N_2 , $N_1 = -N_2/3$, $N_3 = -2N_2/3$:

$$v_A = \frac{\frac{N_2 \times 1}{3}}{0,7 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-4}} = 0,0238 N_2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$v_C = 2v_A = 0,0476 N_2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$v_B = v_A + \frac{4}{6}(v_C - v_A) = 0,0397 N_2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

La ecuación de compatibilidad resulta:

$$-3,571 + 0,0397 N_2 = -\frac{N_2 \times 1}{2,1 \times 10^8 \times 12 \times 10^{-4}} \times 10^3 \rightarrow N_2 = 81,78 \text{ kN}$$

Observa que los coeficientes de N_2 se suman en la ecuación hiperestática. Los valores finales son: $N_1 = 5 - N_2/3 = 22,74$ kN, $N_2 = 81,78$ kN, $N_3 = 5 - 2 \times N_2/3 = -4,52$ kN.

b) Consideraremos la carga térmica aislada. Su ecuación de compatibilidad variará sólo en el término independiente:

$$v_A = v_C = -15 \times 27 \times 10^{-6} \times 1 = -0,405 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$v_B^{(viga)} = -0,405 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$v_B^{(barra)} = 20 \times 12 \times 10^{-6} \times 1 = 0,240 \times 10^{-3} \text{ m}$$

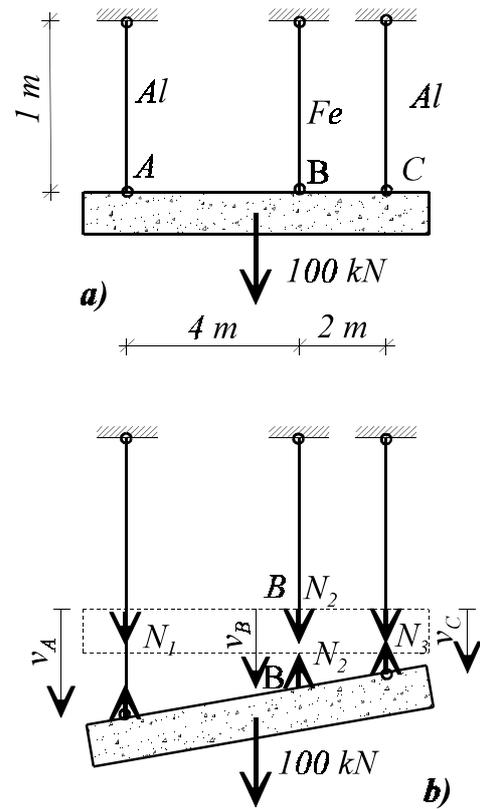


Figura 6.9
Estructura hiperestática e isostática asociada del problema 6.3.3

⁵ Para cargas horizontales no es estable ni siquiera colgando de tres barras. Para resolver este problema con el computador sería necesario proveer un apoyo horizontal; de lo contrario su matriz de rigidez es singular.

La nueva ecuación de compatibilidad es:

$$-0,405 + 0,0397N_2 = -0,00397N_2 + 0,240 \rightarrow N_2 = 14,77 \text{ kN}$$

La carga de temperatura aislada da: $T_1 = -4,92 \text{ kN}$, $N_2 = 14,77 \text{ kN}$, $T_3 = -9,85 \text{ kN}$. Equilibran una carga nula. Superpuesta con la de peso propio resulta: $N_1 = 17,80 \text{ kN}$, $N_2 = 96,55 \text{ kN}$, $N_3 = -14,36 \text{ kN}$, que equilibran una carga exterior de 100 kN.

Enseñanzas:

- Hemos resuelto un problema hiperestático con dos hipótesis de carga heterogéneas:
 - carga mecánica, y
 - carga térmica.

- Las ecuaciones de compatibilidad resultaron:
 - Iguales en el coeficiente de la incógnita hiperestática:
 - ▶ que es positivo (al tomar fuerza hiperestática y su movimiento con el mismo convenio de signos),
 - ▶ suma de términos positivos: los movimientos por la fuerza hiperestática en las dos subestructuras (viga y cable).
 - Diferentes en el término independiente:
 - ▶ que incorpora los movimientos debidos a la carga exterior.

- Comprobamos que la carga térmica:
 - no produjo tensiones en la estructura isostática asociada, pero
 - sí produjo tensiones en la estructura hiperestática.

- Para calcular el efecto conjunto de ambas hipótesis preferimos:
 - calcular su efecto aislado, y
 - aplicar el principio de superposición.

Problema 6.3.4: Barra de sección variable

La estructura de la figura 6.10a está formada por dos vigas del mismo material ($E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$, $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) y de la misma longitud pero de distinta sección, como se muestra en dicha figura. La sustentación impide los desplazamientos de los extremos A y B pero no impide sus giros. Se pide: (i) dibujar las leyes de esfuerzos, (ii) calcular la tensión pésima, y (iii) determinar el desplazamiento horizontal del punto medio M para cada una de las dos hipótesis de carga siguientes:

a) Calentamiento de la mitad MB de la estructura con distribución lineal de temperaturas a lo alto del canto entre $\Delta T_s = 100^\circ\text{C}$ en la cara superior de MB y $\Delta T_i = 0^\circ\text{C}$ en la cara inferior.

b) Actuación de una carga exterior axil aplicada según la directriz con la distribución triangular de la figura 6.10b. (Examen junio 92.)

La viga es hiperestática de grado 1 para cargas o deformaciones axiales, e isostática para cargas de flexión. Por consiguiente, la curvatura que adquirirá la viga por el gradiente transversal de temperatura se producirá libremente y no inducirá esfuerzos. Tomamos como incógnita hiperestática la reacción H_B , positiva hacia la derecha (consistente con el movimiento) aun a sabiendas de que en ambas hipótesis de carga resultará negativa. La estructura isostática asociada es, pues, la de la figura 6.10c.

a) En la estructura isostática asociada se tiene:

$$u_B^{(ext)} = 50 \alpha 4 = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$u_B^{(H_B)} = \frac{H_B \times 4}{2 \times 10^8 \times 25 \times 10^{-4}} + \frac{H_B \times 4}{2 \times 10^8 \times 50 \times 10^{-4}} = 0,012 H_B \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$2 + 0,012 H_B = 0$$

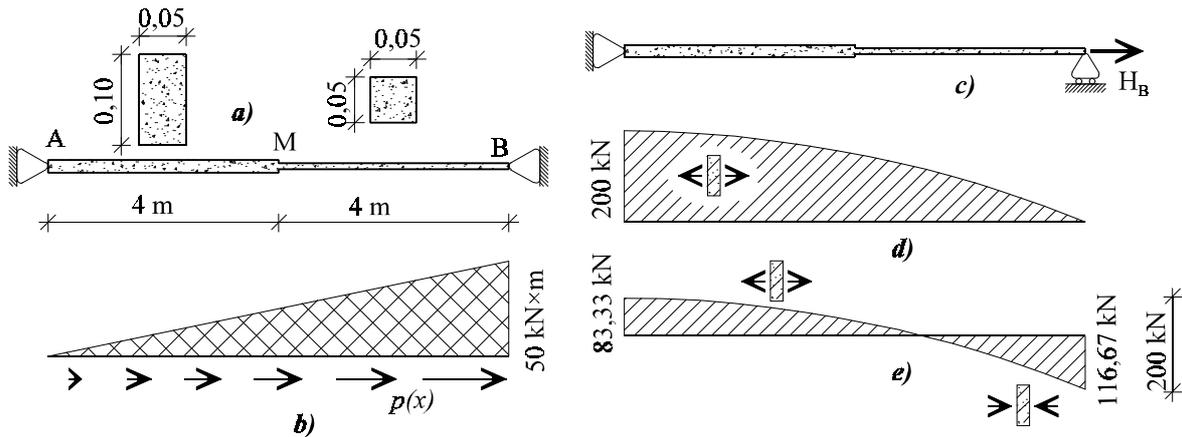


Figura 6.10
Estructura y diagramas del problema 6.3.4

(i) Para inmovilizar el apoyo B se precisa, pues, $H_B = -166,67 \text{ kN}$. El único esfuerzo para esta primera hipótesis de carga es $N = -166,67 \text{ kN}$ en toda la viga.

(ii) La tensión pésima es $\sigma = -166,67 \times 10^{-3} / 25 \times 10^{-4} = -66,67 \text{ MPa}$ en el tramo MB .

(iii) El punto M no se mueve por calentamiento de MB (en la estructura isostática de la figura 6.10c). Sólo se mueve por la acción de la hiperestática:

$$u_M = \delta_{AM} = -\frac{H_B \times 4}{2 \times 10^7 \times 50 \times 10^{-4}} = -0,667 \times 10^{-3} \text{ m}$$

b) Para la segunda hipótesis sólo necesitamos calcular el término independiente de la ecuación $u_B = 0$, esto es, el debido a la carga exterior de la figura 6.10b es preciso calcular antes la ley de esfuerzos axiales correspondiente. Ésta ley es:

$$N(x) = \int_x^8 p(z) dz = \int_x^8 \frac{50}{8} z dz = \frac{50}{16} (64 - x^2)$$

que coincide con el área del trapecio de carga entre x y B . Su representación gráfica se da en la figura 6.10d. Los movimientos u_M y u_B que causa esta ley son:

$$u_M = \int_0^4 \frac{N(x) dx}{EA} = \frac{50}{2 \times 10^8 \times 50 \times 10^{-4}} \left(\frac{64 \times 4 - \frac{4^3}{3}}{3} \right) = 0,733 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$u_B = u_M + \frac{\frac{50}{16} \left[64x - \frac{x^3}{3} \right]_4^8}{2 \times 10^8 \times 25 \times 10^{-4}} = 1,400 \times 10^{-3} \text{ m}$$

La nueva ecuación hiperestática es:

$$1,4 + 0,012 H_B = 0 \rightarrow H_B = -116,67 \text{ kN}$$

(i) La ley de esfuerzos axiales resultante de sumar este esfuerzo de compresión a la ley de la figura 6.10d, por lo que resulta esta misma trasladada hacia abajo (figura 6.10e).

(ii) La tensión máxima se produce en la sección B y vale $\sigma = -116,67 \times 10^{-3} / 25 \times 10^{-4} = -46,7 \text{ MPa}$.

(iii) El movimiento del punto M será:

$$u_M = 0,733 \times 10^{-3} - \frac{116,67 \times 4}{2 \times 10^8 \times 50 \times 10^{-4}} = 0,266 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Enseñanzas:

- Hemos resuelto un problema hiperestático de grado 1 con una viga de sección constante por tramos.
- Hemos considerado dos hipótesis de carga heterogéneas:
 - carga térmica, y
 - carga mecánica.
- Para cargas que produzcan curvaturas, la viga se comporta como isostática y no sufre esfuerzos
- El aspecto de la ecuación hiperestática era, no obstante, el mismo para las dos hipótesis de carga.
- Hemos mantenido el mismo criterio de signos para la fuerza hiperestática que para su movimiento aún a sabiendas de que iba a resultar de sentido contrario. Ello nos ha permitido:
 - comprobar nuestra intuición física, y
 - asegurarnos de que el coeficiente de la incógnita hiperestática sale positivo.
- Hemos obtenido los esfuerzos de la carga mecánica integrando la carga repartida.
- Hemos obtenido los movimientos integrando los esfuerzos encontrados.
- Conviene darse cuenta de que para pasar de cargas a movimientos hay que integrar dos veces (de alguna manera).

Problema 6.3.5: Losa flexible colgada

La viga AB de la figura 6.11a es de rigidez constante ($EI = 2 \times 10^6 \text{ t} \times \text{m}^2$). Cuelga de tres barras de igual longitud y de sección constante ($EA = 10.000 \text{ t}$) articuladas en sus extremos. Para la carga $P = 20 \text{ t}$ que actúa en el lugar indicado en la figura, se pide:

a) Dibujar la ley de momentos flectores en la viga.

b) Determinar el movimiento vertical del punto de aplicación de la carga. (Examen junio 91.)

a) A la viga le sobra un apoyo, que la hace hiperestática de grado 1 para cargas verticales.⁶ (El que los apoyos sean flexibles no afecta a su elasticidad.) La estructura es semejante a la del problema 6.3.3 pero con una diferencia importante: la viga suspendida no es infinitamente rígida sino que tendrá deformaciones —y movimientos— por flexión. Tomando, como entonces, por estructura isostática asociada la de la figura 6.11b, la ecuación hiperestática será, igual que en aquel caso, $v_C^{(viga)} = v_C^{(barra)}$, sin embargo, en el primer término habrá que incluir la flecha por flexión de la viga (además de la debida al alargamiento de las barras)

La carga exterior produce la ley de momentos flectores y las reacciones de la figura 6.11c. Midiendo los movimientos verticales positivos hacia arriba (como la carga hiperestática de la viga) se tiene:

$$v_A = -\frac{15 \times 10}{EA} = -15 \text{ mm} ; \quad v_B = -5 \text{ mm} ; \quad v_C^{(rig)} = \frac{v_A + v_B}{2} = -10 \text{ mm}$$

$$v_C^{(flex)} = -\frac{20 \times 5 \times 15 \times 25}{6 \times 20 EI} 10 + \frac{1}{2} \frac{50}{EI} 10 \frac{1}{3} 10 = -1,146 \text{ mm}$$

$$v_C^{(ext)} = -11,146 \text{ mm}$$

en donde $v_C^{(rig)}$ es la componente de la flecha por movimientos de sólido rígido de la viga (tanto de traslación como de giro de arrastre) causados por el alargamiento de las cables sustentantes en A y B; $v_C^{(flex)}$ es la componente de flexión (se ha calculado desde el extremo B). La suma de ambos términos es la flecha total causada por la carga exterior.

⁶ Para cargas horizontales es un mecanismo.

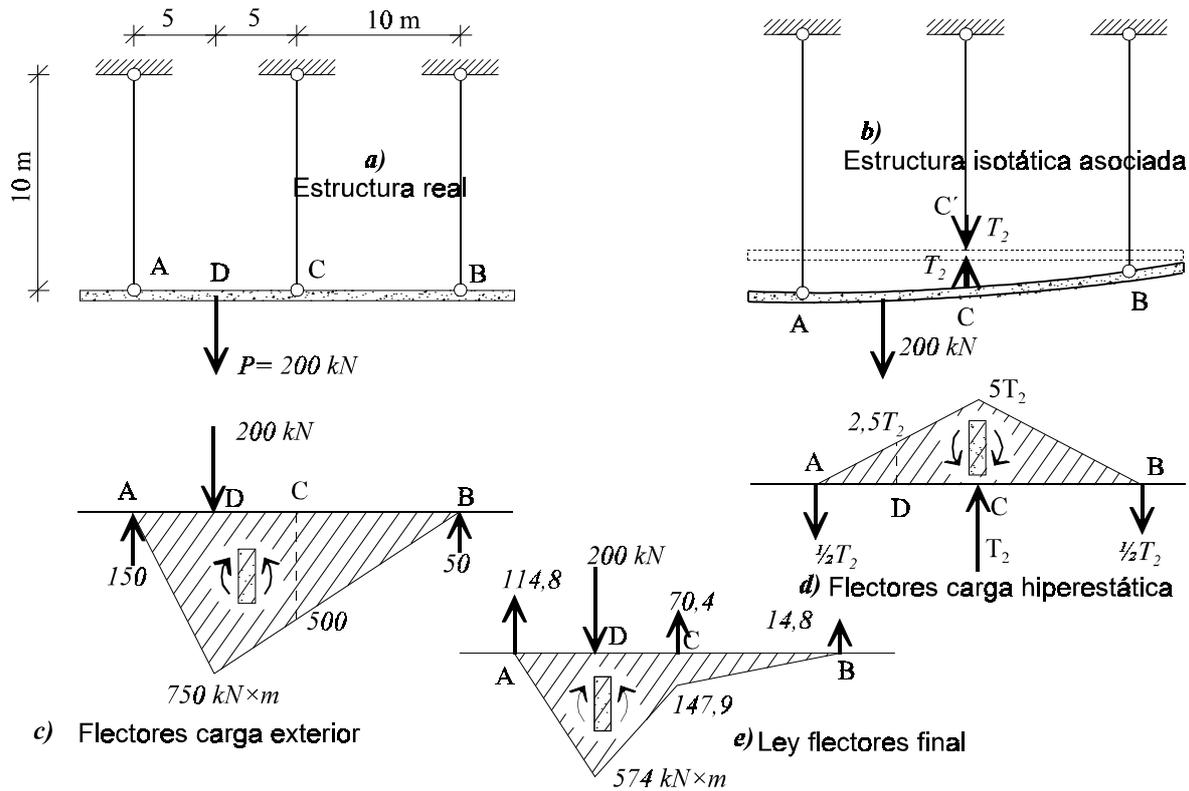


Figura 6.11 Estructura y diagramas del problema 6.3.5

La fuerza hiperestática T_2 produce la ley de momentos flectores de la figura 6.11d. El movimiento vertical en C es:

$$v_C^{(T_2)} = \left(\frac{0,5 \times 10}{EA} + \frac{20^3}{48EI} \right) T_2 = 0,583 T_2 \text{ mm}$$

El segundo sumando es la flecha en el centro producida por una carga en el centro.

El movimiento $v_C^{(barra)}$ bajo T_2 resulta $-T_2 \times 10^{-3} \text{ m}$. La ecuación de compatibilidad es:

$$-11,146 + 0,583 T_2 = -T_2$$

que arroja el resultado $T_2 = 7,041 \text{ t}$. La ley de momentos flectores final resulta de sumar las de las figuras 6.11c y d usando este coeficiente. El resultado se muestra en la figura 6.11e.

b) La carga exterior produce la siguiente flecha en D (calculada como antes en C):

$$v_D^{(rig)} = \frac{3v_A + v_B}{4} = -12,5 \text{ mm}$$

$$v_D^{(flex)} = -\frac{20 \times 5 \times 15 \times 25}{6 \times 20EI} 15 + \frac{1}{2} \frac{75}{EI} 15 \frac{1}{3} 15 = -0,938 \text{ mm}$$

$$v_D^{(ext)} = -13,438 \text{ mm}$$

y la hiperestática (calculada desde A):

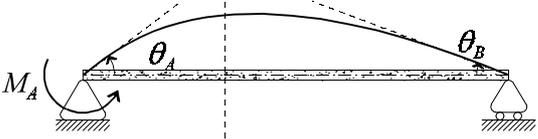
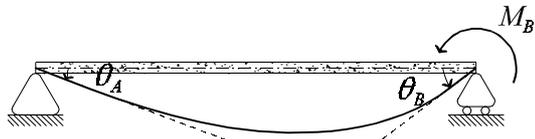
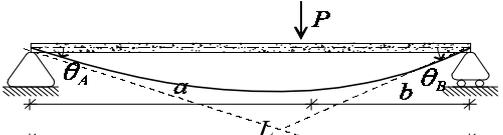
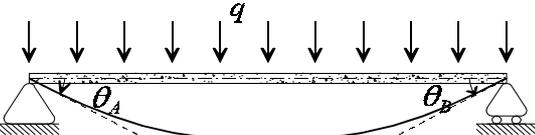
$$v_D^{(T_2)} = \frac{T_2 \times 10 \times 10 \times 30}{6 \times 20EI} 5 - \frac{1}{2} \frac{2,5T_2}{EI} 5 \frac{1}{3} 5 = 114,58 \frac{T_2}{EI} = 0,403 \text{ mm}$$

Por consiguiente, $v_D = -13,035 \text{ mm}$.

Enseñanzas

- Se trata de una viga sobre tres apoyos verticales; el que éstos sean flexibles no cambia su grado de hiperestatismo.
- La estructura es semejante a la del problema 6.3 y por ello, eligiendo la misma incógnita hiperestática, su ecuación de compatibilidad tiene el mismo aspecto.
- El coeficiente de la incógnita hiperestática volvió a ser la *suma* de dos términos positivos, uno por cada subestructura (viga y barra central) que concurre en el punto de separación.
- El término independiente volvió a ser el movimiento producido por la carga exterior.
- Al incluir la deformabilidad de la viga (que era despreciable en el problema 6.3) sólo aumenta el número de componentes de los movimientos que entran a formar parte de la ecuación de compatibilidad. Había:
 - movimiento de arrastre, o de sólido rígido, por los movimientos de los apoyos elásticos, más
 - movimiento relativo, el usual de flexión en la viga.

Tabla 6.1
Fórmulas de giros en apoyos causados por cargas sencillas, que debes recordar

$\theta_A = \frac{M_A L}{3EI}$ $\theta_B = -\frac{M_A L}{6EI}$ 	$\theta_A = -\frac{M_B L}{6EI}$ $\theta_B = \frac{M_B L}{3EI}$ 
$\theta_A = -\frac{Pab(L+b)}{6LEI}$ $\theta_B = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$ 	$\theta_A = -\frac{qL^3}{24EI}$ $\theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$ 

6.4 Vigas continuas

Caso particular, frecuente

Las vigas continuas son un tipo de estructura hiperestática particular pero muy extendido. Por eso vamos a ver un procedimiento de cálculo, también particular para ellas, que goza de la gran ventaja de ser considerablemente más sencillo de aplicar que el método general que estudiaremos en el apartado siguiente. Para aplicar con soltura el método de viga continua tienes que memorizar las fórmulas de giro en los apoyos de la tabla 6.1 (copia de la 4.2).

Hiperestáticas de flexión y de axil

Las cargas de flexión activan ciertas coacciones hiperestáticas y las de axil, otras. El número total es el que se obtiene mediante el recuento del apartado 6.1, pero el que interesa es normalmente menor. El grado de hiperestatismo en flexión de una viga continua es en general $N_v - 1$, siendo N_v el número de vanos. Si hubiera N_r rótulas intermedias el grado de hiperestatismo sería entonces $N_v - N_r - 1$.⁷ Aquí estudiaremos sólo el hiperestatismo de flexión. El hiperestatismo axil se resuelve aparte como en el ejemplo 6.2.1 y en el problema 6.3.1.

Hiperestatismo solidario

La ventaja de las vigas continuas reside en que la carga no la resiste el vano que la recibe de manera individual sino que éste es ayudado solidariamente por los vanos adyacentes. De esta forma todos los vanos flexan y producen entre todos la energía elástica necesaria para soportar las cargas. Así, en la figura 6.12a se ve el trabajo individual de dos vigas no unidas; en la figura 6.12b se ve el trabajo solidario de una viga continua de dos vanos, y en la figura 6.12c se interpreta cómo se materializa esta ayuda: mediante pares de momentos exteriores (el momento flector que aparece sobre el apoyo).

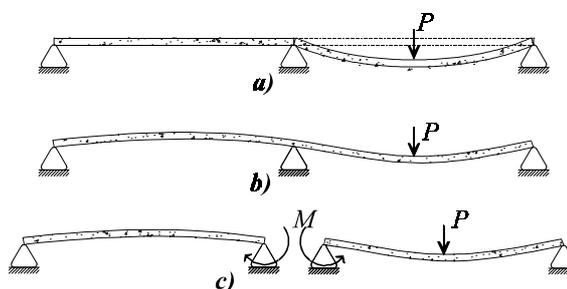


Figura 6.12
Comparación entre el trabajo individual y el solidario.
Interpretación de éste.

Método: incógnitas y ecuaciones

El momento hiperestático M que se prestan mutuamente los vanos de la figura 6.12c se determina con la condición de que el giro sobre el apoyo intermedio sea el mismo por la izquierda que por la derecha. El método de cálculo de vigas continuas consiste, pues, en:

- cortar y separar en vanos isostáticos
 - (los vanos con rótulas deberán seguir unidos a uno sin ellas para asegurar el equilibrio estático),
- introducir pares de momentos iguales y opuestos a ambos lados de los cortes, y
- determinar las magnitudes de cada par imponiendo la continuidad en el giro sobre cada apoyo cortado.

Las incógnitas hiperestáticas son, pues, los momentos flectores sobre los apoyos intermedios, y las ecuaciones hiperestáticas, las de continuidad en giros en dichos apoyos.

⁷ Las rótulas deberán estar bien colocadas para no convertir en mecanismo algún vano.

Ejemplo 6.4.1: Cargas mecánicas

Determinar el reparto de momentos flectores en la viga continua de la figura 6.13a. Los vanos son de igual longitud, L; el izquierdo soporta una carga puntual P en su centro y el derecho, una carga repartida q= P/L.

Separamos en dos vanos cortando por el apoyo intermedio e introducimos la pareja de momentos exteriores ±M en los extremos (figura 6.13b), que simulan el momento flector que se prestan los vanos. (Sabemos que éste será de signo contrario; no obstante, suponemos que los M's provienen de un momento flector positivo y el cálculo nos dará su signo debido.) Escribimos la expresión de los giros a cada lado del apoyo B; cada una constará del término debido a la carga exterior y del debido a la hiperestática M:

$$\theta_B^{(q)} = \frac{P L L 3 L}{6 L E I} + \frac{M L}{3 E I} = -\frac{P L^3}{L 24 E I} - \frac{M L}{3 E I} = \theta_B^{(P)} \rightarrow M = -\frac{5}{32} P L$$

La continuidad reduce el momento flector máximo en el vano AB de 0,250PL a 0,172PL. El momento máximo positivo en el vano BC ocurre allí donde el cortante es nulo:

$$Q(x) = -\frac{P}{2} + \frac{P}{L}x + \frac{M}{L} = 0 \rightarrow \left(\frac{x}{L}\right)_{\max} = \frac{1}{2} - \frac{M}{PL} = \frac{21}{32}$$

$$M_{f,\max}^+ = \frac{PL}{2} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] + M \left(1 - \frac{x}{L} \right) \Bigg|_{\left(\frac{x}{L}\right) = \frac{21}{32}} = \frac{121}{2048} PL \text{ m} \times t$$

y se reduce al 47,27% de su valor original. El momento flector máximo en este vano pasa a ser el negativo sobre el apoyo, que es un 25% superior al positivo original. El momento flector máximo en la estructura se reduce en un 31%. La reacción central se incrementa en un 31% y las laterales se reducen en esa misma proporción.

El efecto de la continuidad de "empujar hacia arriba" las leyes de momentos flectores se observa en la figura 6.13c, en la que se muestran las leyes de momentos flectores de las vigas sin continuidad y de la viga continua.

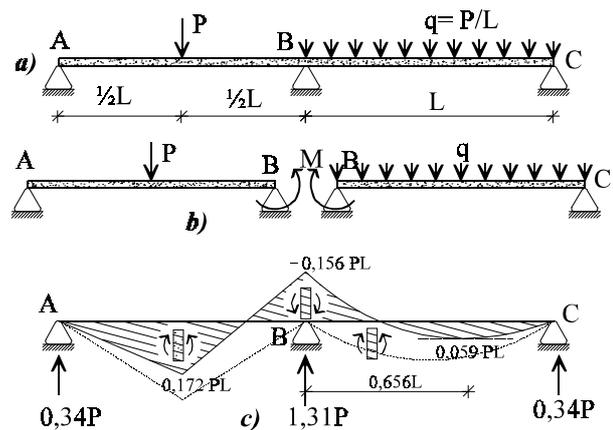


Figura 6.13 Estructura y diagramas del ejemplo 6.4.1

Enseñanzas:

- Hemos resuelto el primer problema por el método de viga continua:
 - descomponiendo en vanos,
 - introduciendo momentos de continuidad sobre los apoyos,
 - imponiendo que con estos momentos (y la carga exterior del vano) los giros a ambos lados del apoyo común resulten iguales.
- Se observa que el momento hiperestático aparece con signos contrarios a los lados de la ecuación hiperestática. Así su efecto se sumará, nunca desaparecerá de la ecuación.
- Hemos comprobado que el hiperestatismo reduce el momento máximo que debe resistir la viga "empujando hacia arriba" la ley de momentos flectores de la viga isostática;
 - hemos hallado la nueva posición y el valor máximo del momento positivo en una ley "movida hacia arriba";
 - esto lo hicimos encontrando el punto de esfuerzo cortante nulo;
 - el máximo se desplazó ligeramente hacia el lado en que la curva subió menos.
- La reacción central se incrementó sensiblemente respecto de la que hubieran dado las vigas separadas;
 - las reacciones laterales se redujeron proporcionalmente.

Asientos de apoyo

La desventaja del hiperestatismo está en que produce esfuerzos por movimientos impuestos. El movimiento impuesto más común en una viga continua es el asiento de un apoyo. Hay que recordar que, aunque pintemos los apoyos debajo de la viga, éstos coaccionan el movimiento vertical en ambos sentidos; por eso, un asiento de apoyo fuerza a la viga a moverse con él tal como lo haría una fuerza vertical desconocida que actuase en vez del apoyo.

Ejemplo 6.4.2: Asiento de apoyo

Determinar los esfuerzos y las reacciones que produce en la viga continua de dos vanos de igual luz L un descenso δ de su apoyo B (figura 6.14a).

La descomposición en vigas simples se hace en la figura 6.14b. Los giros en el apoyo B se deben ahora al descenso de este apoyo y al momento hiperestático M . La ecuación hiperestática es:

$$\theta_B^{(i)} \equiv -\frac{\delta}{L} + \frac{ML}{3EI} = \frac{\delta}{L} - \frac{ML}{3EI} \equiv \theta_B^{(d)}$$

$$M = \frac{3EI\delta}{L^2}$$

Observa que la reacción que tira del apoyo B hacia abajo es la carga P desconocida que necesitábamos para producir la flecha $\delta = P(2L)^3/48EI$ en el centro del vano AC de luz $2L$. Sin embargo, este procedimiento de cálculo no resultará siempre tan sencillo.

La ley de momentos flectores se muestra en la figura 6.14c. Se observa que, al revés que las cargas exteriores, el asiento de un apoyo produce un momento positivo sobre éste, que se sumará a los de las cargas exteriores "bajando" la ley. Los esfuerzos cortantes (figura 6.14d) se obtienen bien derivando la ley de momentos o bien a partir de las reacciones de los apoyos que resultan de la figura 6.14b.

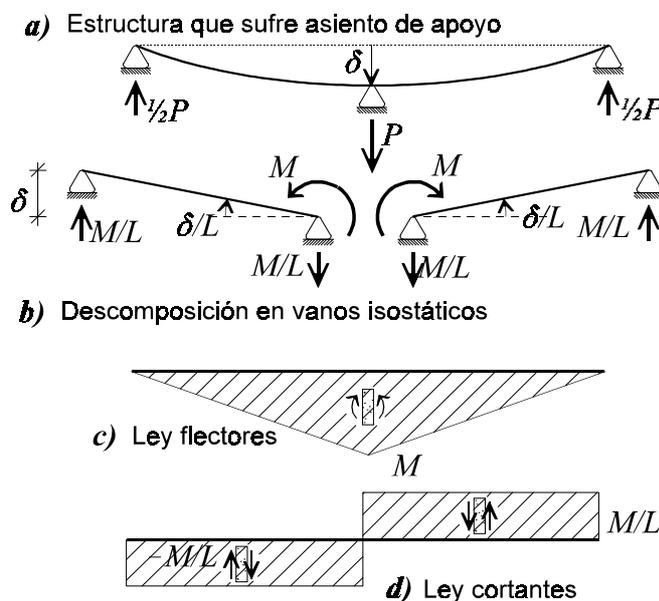


Figura 6.14
Efecto de un descenso de apoyo en una viga continua

Enseñanzas:

- Hemos resuelto una viga continua sometida a un descenso de apoyo por el mismo procedimiento del ejemplo anterior.
- Encontramos que los asientos de apoyo se tratan como una carga exterior más, que produce su giro de apoyo en la viga descompuesta.
- Al igual que el momento de continuidad, el giro producido por un asiento de apoyo aparece con signos contrarios a los lados de la ecuación hiperestática. Así se sumarán sus efectos, nunca se anularán.
- Comprobamos que los asientos de apoyo agravan los esfuerzos en una viga continua porque tienden a "bajar" la ley de momentos flectores.
- La ley de esfuerzos cortantes se puede determinar de dos maneras:
 - derivando la ley de momentos flectores, o
 - considerando las cargas exteriores, incluidas las reacciones de apoyo *del vano* (parcial) en cuestión
- La reacción en un apoyo intermedio resulta ser la suma algebraica de las reacciones procedentes de los vanos que en él concurren.

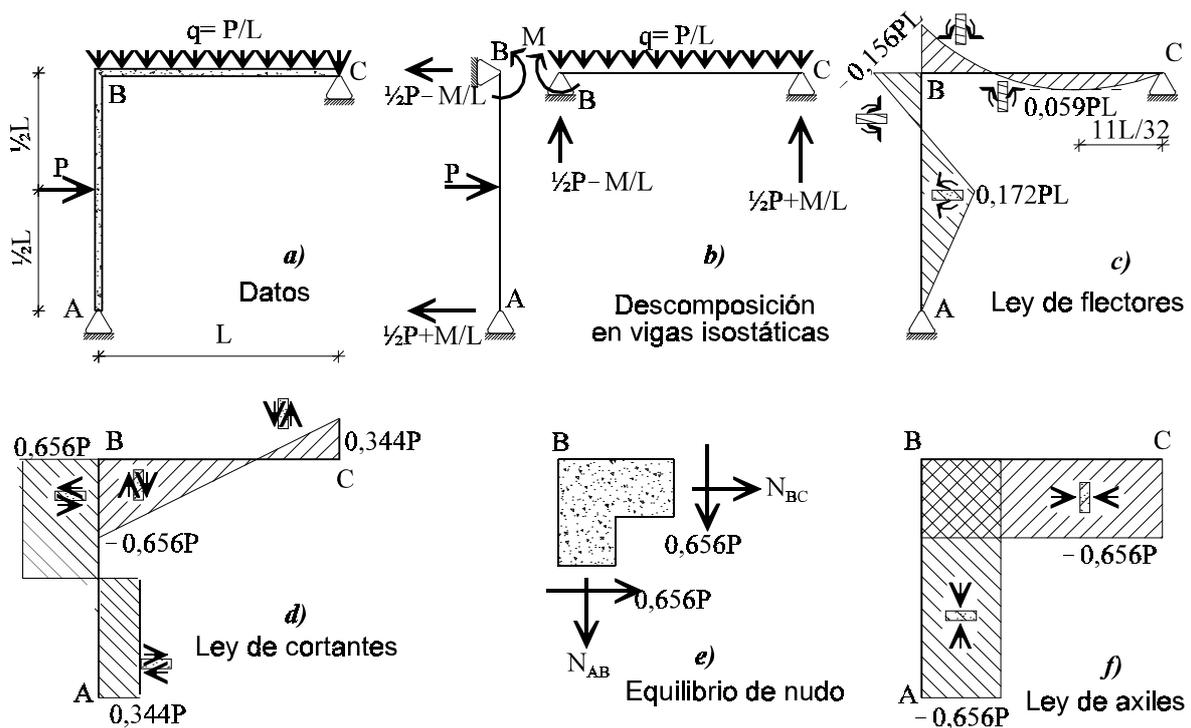


Figura 6.15
Estructura y diagramas del ejemplo 6.4.3

Curvatura térmica

La elongación térmica afecta al hiperestatismo axil y se trata por separado. La curvatura térmica produce giros en los apoyos de las vigas separadas, que se tratan como los de otra carga exterior cualquiera.

Hay que decir con mucho énfasis que cuando se tienen curvaturas térmicas, $M = EI(\chi - \chi_T)$:

- los momentos flectores resultan sólo del cálculo de continuidad en giros, mientras que
- las curvaturas serán la suma de las procedentes de:
 - de los momentos flectores anteriores, y
 - la curvatura térmica

Extensión a pórticos intraslacionales

El método de viga continua se puede extender con facilidad a los pórticos intraslacionales (aquéllos cuyos nudos no se mueven, o se mueven una cantidad conocida).

Ejemplo 6.4.3: Pórtico intraslacional

Determinar las leyes de esfuerzos en el pórtico de la figura 6.15a.

Este pórtico es intraslacional siempre y cuando se desprece la elongación por esfuerzo axil, por las razones siguientes: (i) u_B debe ser nulo porque la distancia BC no varía, y (ii) v_B debe ser también nulo porque AB no varía. Podemos por ello colocar artificialmente un apoyo en B y descomponer en vigas simples (figura 6.15b) igual que hicimos en el ejemplo 6.4.1. La ley de momentos flectores (figura 6.15c) resultará ser semejante a la de la figura 6.13c. La ley de cortantes (figura 6.15d) también es semejante y se puede obtener (i) derivando la anterior o (ii) teniendo en cuenta que las reacciones del apoyo ficticio B deben ser fuerzas internas: la reacción horizontal en el apoyo ficticio B será el cortante en AB , la vertical, el cortante en BC . Hasta aquí como en la viga continua de la figura 6.13a. La novedad surge porque en el pórtico aparecen esfuerzos axiles. Éstos se determinan por equilibrio en los nudos (figura 6.15e). En el nudo ortogonal es evidente que el cortante en una viga se convierte en el axil de la otra; en nudos no ortogonales es preciso proyectar los esfuerzos cortantes sobre los ejes de las barras y resolver el sistema. La ley de axiles de nuestro ejemplo se da en la figura 6.15f.

Enseñanzas:

- En pórticos hiperestáticos **intraslacionales** también se puede aplicar el método de cálculo de las vigas continuas, añadiendo apoyos ficticios.
- Cuando los nudos sufren **movimientos conocidos**, también es ventajoso el método de viga continua, introduciendo los movimientos como asientos de apoyo.
- Las leyes de cortantes resultan como en vigas continuas:
 - derivando la ley de momentos flectores,
 - o a partir de las cargas exteriores y las reacciones:
 - de los apoyos reales
 - y de los apoyos ficticios.
- *En los pórticos aparecen esfuerzos axiales.* Éstos se determinan a partir de los cortantes en los nudos, por equilibrio.

Ecuación de los tres momentos

Veamos cuál es el aspecto general de las ecuaciones que nos aparecen al formular una viga continua. Escogemos el nudo B de la viga continua (ya desmembrada) de la figura 6.16a porque tiene «compañeros hiperestáticos» a ambos lados:

$$\theta_B^{(i)} \equiv -M_A \left(\frac{L}{6EI} \right)_{(i)} - M_B \left(\frac{L}{3EI} \right)_{(i)} + \theta_{B,(i)}^{(ext)} = M_B \left(\frac{L}{3EI} \right)_{(d)} + M_C \left(\frac{L}{6EI} \right)_{(d)} + \theta_{B,(d)}^{(ext)} \equiv \theta_B^{(d)}$$

en donde el subíndice (i) indica que son valores del vano de la izquierda, y el (d) , de la derecha. Los giros $\theta_B^{(ext)}$ son los producidos a izquierda y derecha por las cargas exteriores en sus vanos correspondientes, incluyendo en general, cargas mecánicas, curvaturas térmicas y asientos de apoyo como en los ejemplos 6.4.1-3 precedentes.

Cuando en la ecuación típica anterior reunimos en un mismo miembro los términos con incógnitas y en el otro, los términos con datos, nos queda de la siguiente manera:

$$(6.4-1) \quad \left(\begin{array}{cccc} \dots & \left(\frac{L}{6EI} \right)_{(i)} & \left(\frac{L}{3EI} \right)_{(i)} + \left(\frac{L}{3EI} \right)_{(d)} & \left(\frac{L}{6EI} \right)_{(d)} & \dots \\ & -c_{21}^{\dagger(i)} & c_{22}^{\dagger(i)} + c_{11}^{\dagger(d)} & -c_{12}^{\dagger(d)} & \\ \end{array} \right) \begin{pmatrix} \dots \\ M_A \\ M_B \\ M_C \\ \dots \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dots \\ \theta_{B,rel}^{(ext)} \\ \dots \end{pmatrix}$$

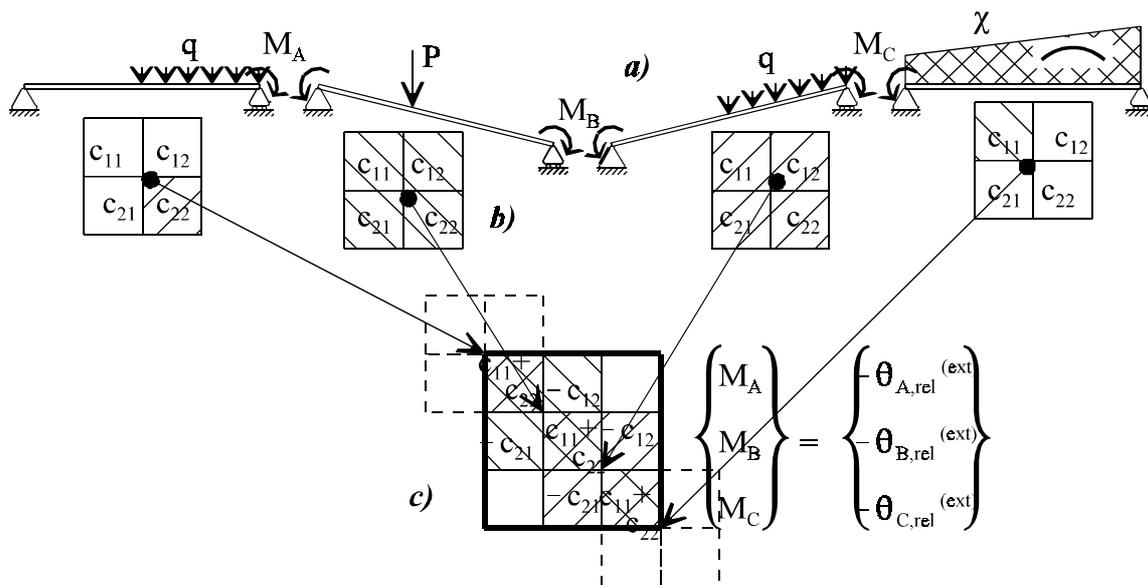


Figura 6.16

Ensamblado de matrices de flexibilidad de miembros individuales para formar la matriz de flexibilidad del conjunto

siendo $\theta_{B,rel}^{(ext)}$ el giro relativo en B debido a las cargas exteriores (mecánicas, térmicas o asientos de apoyo), el de la derecha menos el de la izquierda.

Definida la matriz de flexibilidad en giros de una viga biapoyada como:

$$(6.4-2) \quad \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

con $c_{11} = c_{22} = L/3EI$, y $c_{12} = c_{21} = -L/6EI$ dados en la tabla 6.1 para vigas de sección constante (otros valores para inercia variable, como veremos en los problemas 6.5.3 y 6.5.5), cada viga tendrá la suya, como se muestra en la figura 6.16b. Al escribir todas las ecuaciones (6.4-1) de igualdad de giros por la izquierda y por la derecha se obtiene un sistema como el de la figura 6.16c. En él se observa cómo la matriz de flexibilidad de cada viga (o una parte de ella en las vigas extremas) se ensambla con las de las otras vigas hasta componer la matriz de flexibilidad de la estructura. Hay que observar, no obstante, que los términos de fuera de la diagonal cambian su signo en el ensamblaje.

Resumen:

- Las vigas continuas y los pórticos hiperestáticos intraslacionales o de traslacionalidad conocida se pueden resolver:
 - separando en vanos estables sobre los apoyos reales o ficticios,
 - si un vano contiene rótula, habrá que considerarlo unido a otro sin ella para que sea estable;
 - introduciendo momentos de continuidad iguales y opuestos en los vanos a ambos lados del corte de separación;
 - y escribiendo las ecuaciones hiperestáticas que expresan la igualdad de giros a ambos lados.
- El sistema de las ecuaciones hiperestáticas que resultan al igualar los giros se compone de:
 - La matriz del sistema: formada por las filas de las matrices de flexibilidad de los miembros que concurren en cada nudo (con momento hiperestático),
 - sumándose en la diagonal principal,
 - con signo menos fuera de la diagonal.
 - El vector de datos: formado por los giros *relativos* producidos por las cargas exteriores:
 - cargas gravitatorias,
 - asientos de apoyo o movimientos conocidos,
 - curvatura por calentamiento no homogéneo,
 y que aparecen con signo contrario en cada vano para dar giro relativo.
- Este método resuelve el hiperestatismo de flexión, cuyo grado es:
 - número de vanos
 - menos número de rótulas
 - menos 1.
- El hiperestatismo axial se resuelve aparte, con toda comodidad. Grado: número de apoyos fijos menos 1.
- Las leyes de momentos flectores se obtienen por tramos al considerar:
 - las isostáticas de las cargas gravitatorias (no térmicas) exteriores,
 - movidas hacia arriba (o abajo) por la ley lineal de los momentos hiperestáticos encontrados;
 - y las reacciones que se tienen en el tramo por ambas causas.
- Las curvaturas son la suma de las de flexión, M/EI , y las térmicas χ_T dadas por (3.6-1) o (3.6-8).
- Las leyes de esfuerzos cortantes se pueden obtener de dos maneras:
 - derivando las de momentos flectores, o
 - proyectando sobre la normal las cargas exteriores y las reacciones de cada tramo aislado.
- Las reacciones en un apoyo son la suma de las aportadas por los vanos adyacentes.
- En los pórticos aparecen esfuerzos axiales debidos a la flexión. Éstos se determinan a partir de los esfuerzos cortantes invocando el equilibrio de los nudos.

6.5 Problemas de vigas continuas —y asimilables—

Problema 6.5.1: Viga continua con temperatura y asiento de apoyo

La viga continua de la figura 6.17a está sustentada mediante apoyos fijos en A, C y D, y por apoyo deslizante en B. La sección es constante de 1 m de canto por 50 cm de ancho y las características del material son $E=30.000$ MPa, $\alpha=10^{-5}$ °C⁻¹. La viga está sometida a las siguientes solicitaciones: (i) Un calentamiento en su cara superior que varía linealmente de 10°C en A a 30°C en B; la cara inferior no modifica su temperatura, y en cada sección la temperatura varía linealmente entre la cara superior y la inferior. Y (ii), un descenso del apoyo C de 1 cm. Se pide:

- Calcular las reacciones horizontales y verticales de cada apoyo.
- Dibujar las leyes de esfuerzos.
- Dibujar la deformada a estima e indicar en ella la posición de los puntos de inflexión. (Examen junio 93.)

Hay un problema hiperestático de grado 1 en axiles y otro de grado 2 en flexión. Al no haber ninguna solicitación axil en CD, el cuarto grado de hiperestatismo no se manifiesta.

a₁) Resolveremos primero el problema axil. El centro de gravedad de la sección se calienta 5° en A y 15° en B: por término medio, 10°. El alargamiento de AB será $\alpha\Delta TL=10^{-3}$ m. Ello movería el extremo A (si fuera libre) esta misma cantidad (hacia la izquierda). Para anular δ_{AC} aparecerán sendas reacciones horizontales $H_A=-H_C=H$ que producirán un esfuerzo axil de compresión $-H$ en el tramo AC, que contrarrestará dicho alargamiento:

$$10^{-3} - \frac{H \times 30}{3 \times 10^7 \times 0,5} = 0 \rightarrow H = 500 \text{ kN}$$

b₁) Con esto terminamos nuestro problema hiperestático en axil y dibujamos la ley de esfuerzos axiles en la figura 6.17b.

a₂) Para el problema de flexión calculamos las curvaturas debidas a la temperatura: $\chi_A=-10^{-4}$, $\chi_B=-3 \times 10^{-4}$ rad/m. Las ecuaciones de continuidad en θ_B y θ_C de la estructura descompuesta en vanos (figura 6.17c) son ($EI=1.250.000$ kN×m²):

$$\left. \begin{aligned} \theta_B^{(f)} &= -\frac{10^{-4} \times 10}{6} - \frac{3 \times 10^{-4} \times 10}{3} + \frac{M_B \times 10}{3EI} = -\frac{0,01}{20} - \frac{M_B \times 20}{3EI} - \frac{M_C \times 20}{6EI} \equiv \theta_B^{(d)} \\ \theta_C^{(f)} &= \frac{-0,01}{20} + \frac{M_B \times 20}{6EI} + \frac{M_C \times 20}{3EI} = \frac{0,01}{10} - \frac{M_C \times 10}{3EI} \equiv \theta_C^{(d)} \end{aligned} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{10}{3} + \frac{20}{3} & \frac{20}{6} \\ \frac{20}{6} & \frac{20}{3} + \frac{10}{3} \end{array} \right) \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,667 \\ 1,500 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} EI \rightarrow \begin{Bmatrix} M_B = 23,5 \text{ kN} \times \text{m} \\ M_C = 179,7 \text{ kN} \times \text{m} \end{Bmatrix}$$

b₂) Con estos resultados dibujamos la ley de momentos flectores de la figura 6.17d y la de cortantes en la 6.17e. (Éstos se pueden obtener derivando la ley de momentos flectores o considerando las reacciones que resultan de acuerdo con la figura 6.17c.)

c) Para obtener la ley de curvaturas debemos tener en cuenta que en el vano AB hay de las dos clases: de flexión y de temperatura. El resultado se recoge en la figura 6.17f. Por último, conociendo la ley de curvaturas se puede dibujar la deformada a estima, invirtiendo la curvatura en el punto de inflexión, situado allí donde la curvatura es nula (figura 6.17g).

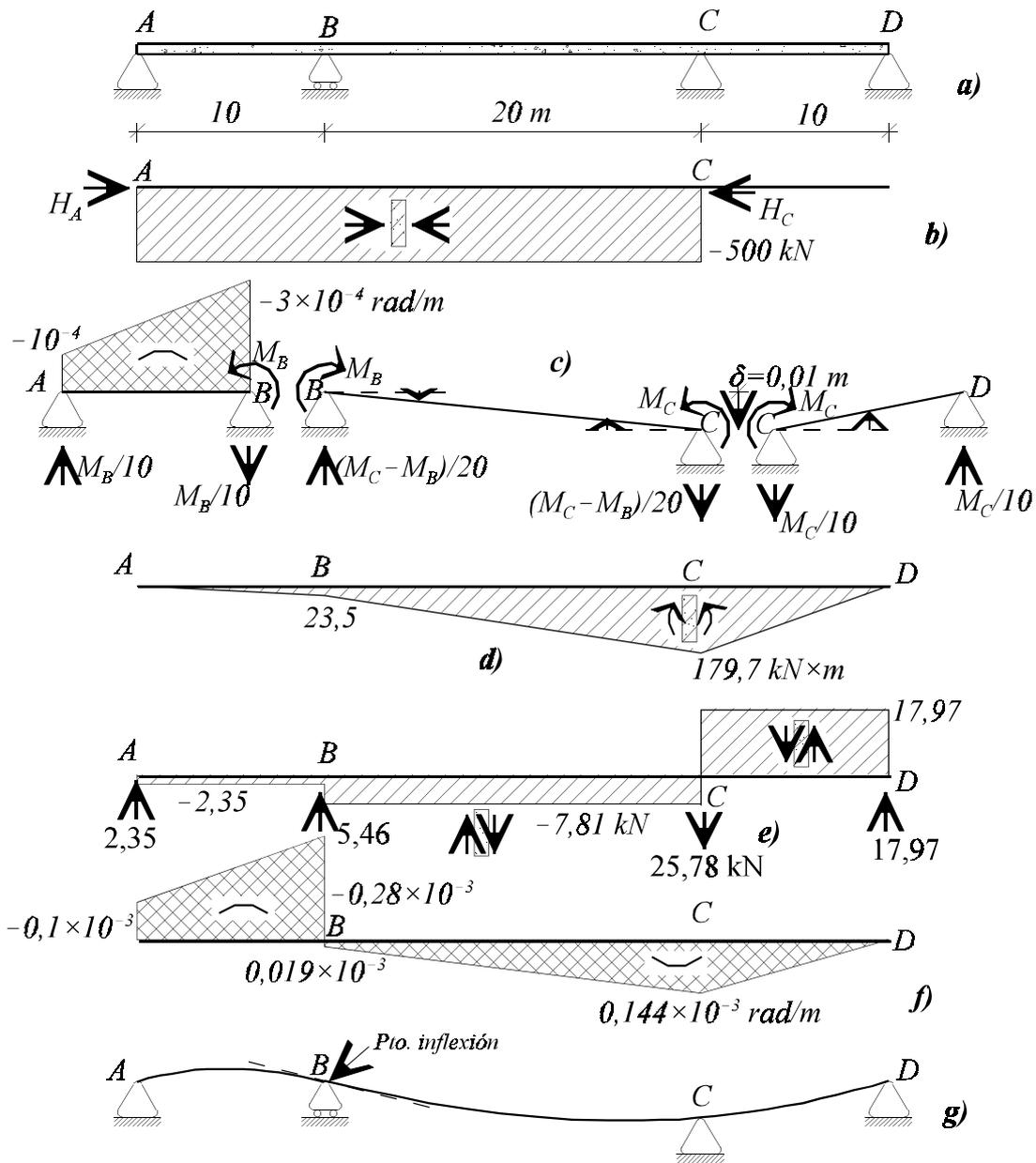


Figura 6.17
Estructura y diagramas del problema 6.5.1

Enseñanzas:

- Hemos resuelto un problema de viga continua sin cargas gravitatorias. Las cargas eran de movimientos impuestos:
 - por efecto térmico y
 - por descenso de apoyo

- Separamos el problema en dos:
 - uno con hiperestatismo axial solo, por alargamiento térmico $\epsilon_T = \alpha \Delta T_g$, que nos dio:
 - ▶ los esfuerzos axiales, y
 - ▶ las reacciones horizontales;
 - otro con hiperestatismo de flexión, que nos dio:
 - ▶ la ley de momentos flectores,
 - ▶ la ley de esfuerzos cortantes y
 - ▶ las reacciones verticales.

- El problema de flexión lo resolvimos por el procedimiento particular de vigas continuas:
 - separando en vanos,
 - restableciendo la continuidad con momentos hiperestáticos en los apoyos, y
 - escribiendo las ecuaciones hiperestáticas, que imponen igualdad de giros a cada lado de los apoyos intermedios.

- El sistema de ecuaciones hiperestáticas resultó:
 - de matriz simétrica,
 - con coeficientes positivos en la diagonal principal,
 - que a su vez eran suma de coeficientes positivos;
 - término independiente formado por los movimientos (giros relativos) debidos a las cargas exteriores.

- Para dibujar la deformada tuvimos que obtener antes la ley de curvaturas porque había de *las* dos clases:
 - curvaturas de flexión, $\chi_f = M_f/EI$, y
 - curvaturas de origen térmico, $\chi_T = -\alpha(\Delta T_s - \Delta T_i)/h$

Problema 6.5.2: Viga continua con rótula y asiento de apoyo

La viga continua de la figura 6.18a es de sección constante ($EI = 2 \times 10^4$ MPa) con una rótula en la sección E. Para la hipótesis de carga que consiste en un descenso de 8 cm del apoyo C, se pide:

- a) Dibujar la leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes en la viga.
- b) Dibujar a estima de la deformada de la viga, con el cálculo del giro en el apoyo A y de la flecha y el giro en la rótula E.

a) La estructura es de grado de hiperestatismo 1: +2 por los dos apoyos que sobran, y -1 por la rótula. El tramo BC aislado sería un mecanismo que no se sostiene por sí solo: hay que mantenerlo unido a otro tramo para formar una subestructura estable. Así pues, la descomposición en tramos isostáticos se puede hacer como en la figura 6.18b o como en la 6.17c. En ambos casos se pone de manifiesto que basta una incógnita hiperestática para restablecer la continuidad.

Tanto si separamos en C como si lo hacemos en B aparece una dificultad nueva: que no conocemos la fórmula del giro en el extremo de una viga de dos vanos con una rótula intermedia. Cortamos en C (figura 6.18b) y empezamos calculando el giro en C de la subestructura ABC (figura 6.18d) para un momento unidad $M_C = 1$. Lo hacemos expresando que, moviéndonos desde C hacia la izquierda, hemos de llegar a B y a A con flecha nula (resulta un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas porque desconocemos θ_E):⁸

$$\left. \begin{aligned} v_B &\equiv -\theta_C \times 15 + \frac{1}{2} \frac{1}{EI} 12 \left(15 - \frac{1}{3} 12 \right) + \theta_E \times 3 - \frac{1}{2} \frac{0,25}{EI} 3 \frac{1}{3} 3 = 0 \\ v_A &\equiv -\theta_C \times 30 + \frac{1}{2} \frac{1}{EI} 12 \left(30 - \frac{1}{3} 12 \right) + \theta_E \times 18 - \frac{1}{2} \frac{0,25}{EI} 3 \left(15 + \frac{1}{3} 3 \right) - \frac{1}{2} \frac{0,25}{EI} 15 \frac{2}{3} 15 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \theta_C &= 4,375 \frac{M_C}{EI} \\ \theta_E &= 0 \end{aligned}$$

El giro en la rótula sale cero por casualidad. Ello se debe a que la rótula está situada en el preciso lugar en el que una viga como la de la figura 6.18d pero sin rótula (hiperestática de grado 1) tendría su punto de momento nulo (para el mismo momento exterior). Ya podemos escribir la ecuación hiperestática correspondiente a la descomposición de la figura 6.18b:

$$\theta_C^{(i)} \equiv -\frac{0,08}{12} + 4,375 \frac{M_C}{EI} = \frac{0,08}{15} - \frac{M_C \times 15}{3EI} \equiv \theta_C^{(d)} \Rightarrow M_C = 25.600 \text{ kN}\times\text{m}$$

Con este resultado se dibuja inmediatamente la ley de momentos flectores de la figura 6.18e. La de cortantes (figura 6.18f) se obtiene bien derivando la anterior o bien a partir de las reacciones que resultan en la descomposición de la figura 6.18b.

⁸ Otro método (menos general) hubiera sido el de igualar flechas en la rótula por la izquierda (desde B) y por la derecha (desde C).

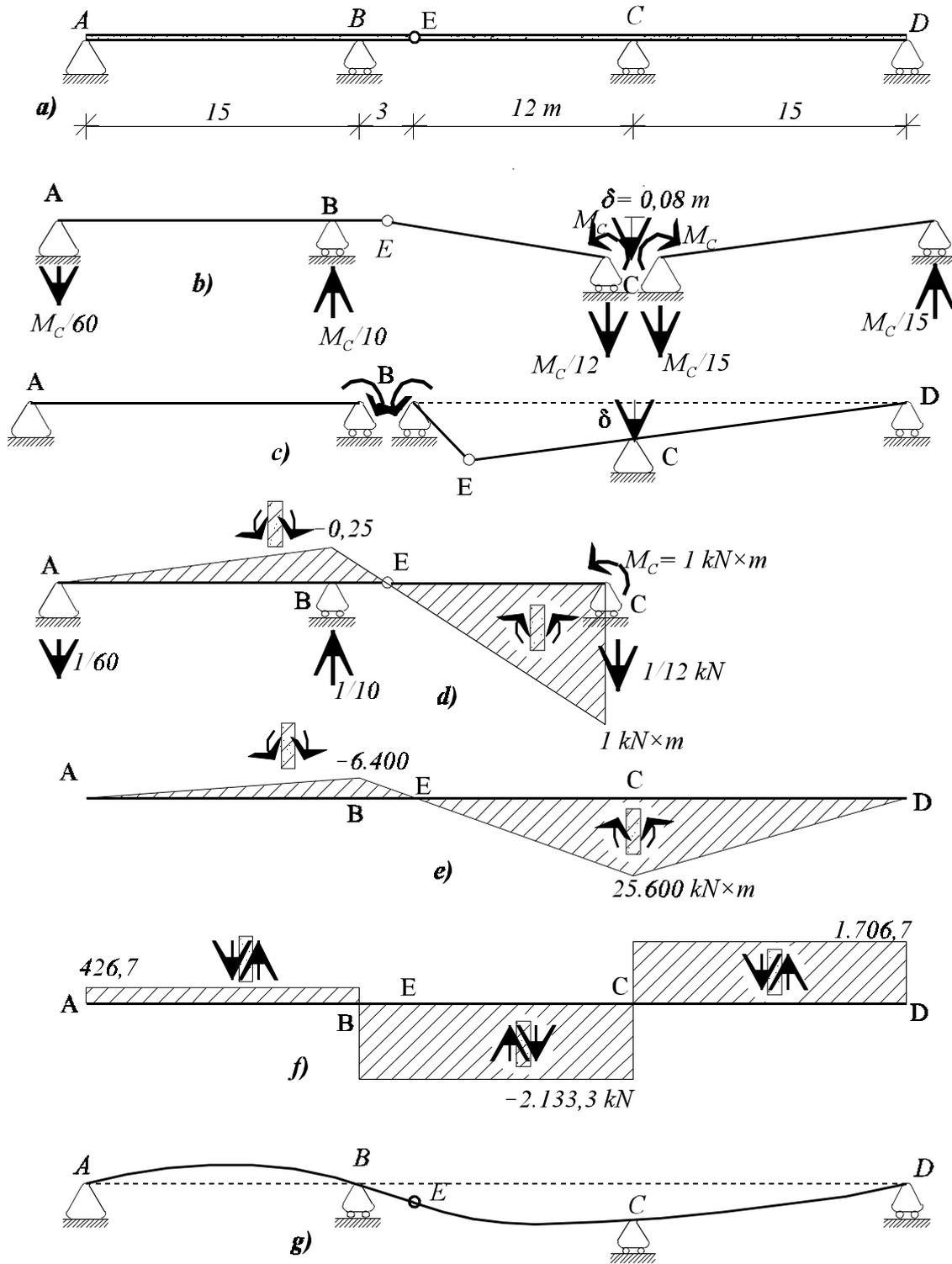


Figura 6.18
Estructura y diagramas del problema 6.5.2

b) No habiendo curvaturas térmicas, la deformada se dibuja a estima (figura 6.18g) considerando que la ley de curvaturas es afín a la de momentos flectores. Los movimientos pedidos salen como sigue:

$$\theta_A = -\frac{M_B \times 15}{6EI} = 0,800 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_B = -2\theta_A = -1,6 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$v_E = \theta_B \times 3 + \frac{Q_E \times 3^3}{3EI} = -5,76 \times 10^{-3} \text{ m}$$

El giro relativo en la rótula E se calcula con facilidad recordando que el momento M_C no producía ningún giro: todo él debe provenir del asiento de apoyo (figura 6.18b): $\theta_E^{(rel)} = -0,08/12 \text{ rad}$.

Enseñanzas:

- Hemos resuelto un problema de viga continua por el método correspondiente. Las peculiaridades fueron:
 - que un vano tenía una rótula, por lo cual, en la descomposición isostática, hubo que mantenerlo unido a otro vano para asegurar su estabilidad isostática;
 - que la acción exterior era un movimiento impuesto.
- La mayor dificultad fue la de calcular el giro en el apoyo de una viga de dos vanos con rótula en uno de ellos. Calculamos el giro por el método general:
 - imponiendo que la flecha en los otros dos apoyos fuera nula, y
 - resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:
 - ▶ el giro (concentrado y absoluto) en el apoyo, y
 - ▶ el giro (concentrado y relativo) en la rótula.
- Para calcular los movimientos finales hubo que considerar:
 - los que *se ven* en la ley final de momentos flectores,
 - más los de sólido rígido, causados por los movimientos impuestos (que *no se ven* en la ley de momentos flectores).
 Conviene, pues, superponer los movimientos de los estados isostáticos.
- Hemos comprobado cómo en la rótula se produce un giro relativo concentrado (aunque no resultara así para una carga particular) igual a la diferencia de giros por la derecha y por la izquierda.
- Hemos recordado que:
 - los giros *absolutos* (positivos):
 - ▶ suben los puntos a su derecha y
 - ▶ bajan los puntos a su izquierda
 - mientras que los giros *relativos* (positivos):
 - ▶ suben los puntos a su derecha y
 - ▶ *también suben* los puntos a su izquierda.
 - Los giros de apoyo extremo son concentrados y absolutos, mientras que
 - los giros en las rótulas son concentrados y relativos.
- El movimiento del punto E lo calculamos componiendo los movimientos:
 - de arrastre, de B ,
 - más el relativo (de ménsula), de E respecto de B .

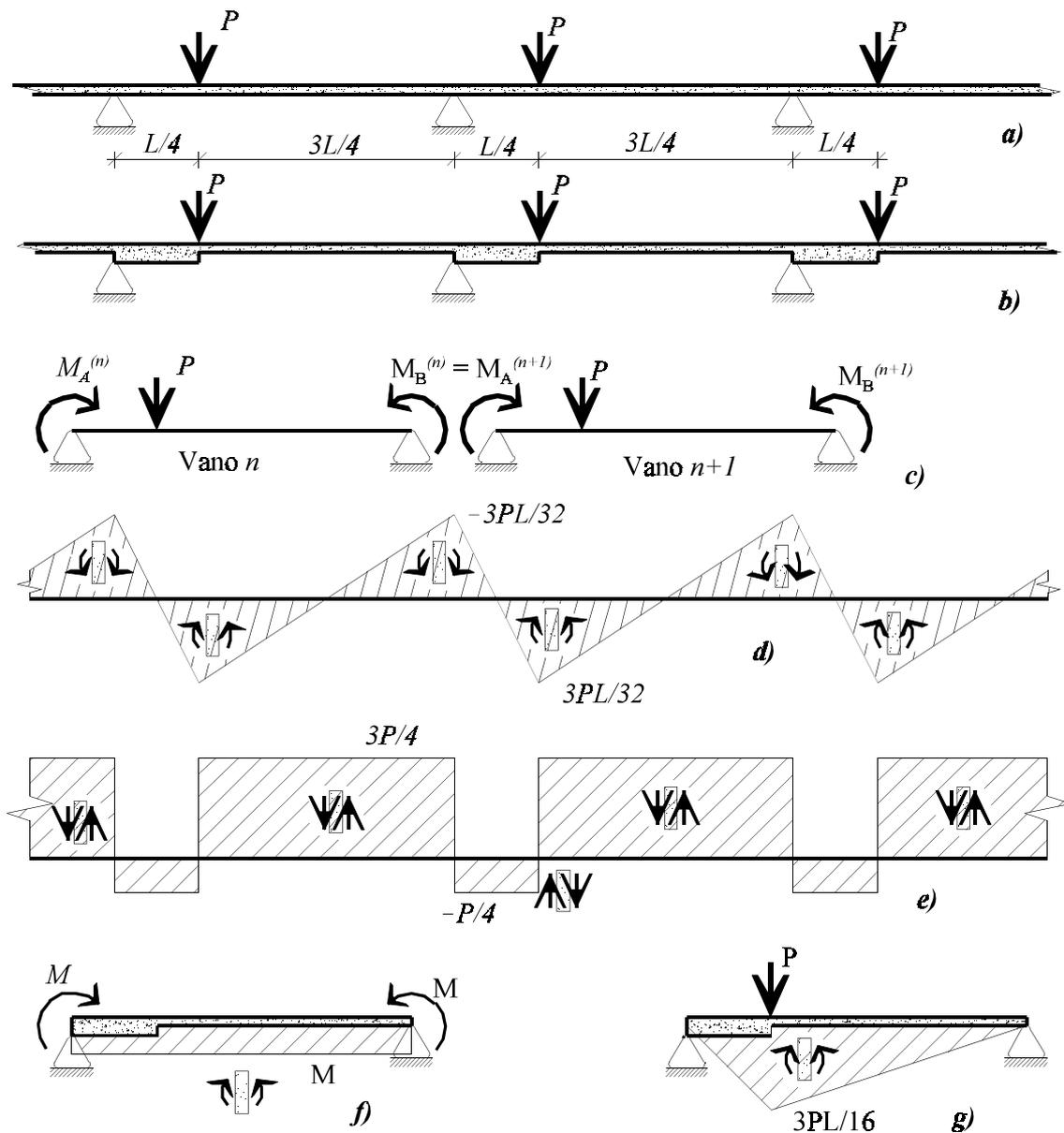


Figura 6.19
Estructura y diagramas del problema 6.5.3

Problema 6.5.3: Viga continua infinita y con rigidez variable

La viga continua de la figura 6.19a es de rigidez EI constante y luces iguales L . Está constituida por un número muy grande de vanos, todos cargados de la misma manera, con una carga puntual P situada a $L/4$ del apoyo a su izquierda. Se pide:

a) Obtener las leyes de momentos flectores y de esfuerzos cortantes en un vano interior.

b) Con objeto de reducir los movimientos de la viga, se modifica su rigidez en la longitud $L/4$ de cada vano entre el apoyo y la carga puntual, pasando a ser ésta $k \times EI$ (figura 6.19b). Determinar k para que el ángulo de giro en el apoyo se reduzca a la mitad. En estas condiciones, obtener de nuevo las leyes del apartado anterior. (Examen febrero 90.)

a) Se descompone en tramos isostáticos como se muestra en la figura 6.19c. La igualdad entre dos tramos muy alejados de los extremos exige que sus momentos hiperestáticos M_A y M_B sean iguales en los dos vanos: $M_A^{(n)} = M_A^{(n+1)}$, $M_B^{(n)} = M_B^{(n+1)}$, (figura 6.19c). Además, por equilibrio en el apoyo común, $M_B^{(n)} = M_A^{(n+1)}$. Por consiguiente, todos los momentos hiperestáticos (de apoyo) son iguales (en valor absoluto) y los designaremos por M . Por continuidad los giros de apoyo serán iguales (en magnitud y signo); la ecuación hiperestática es:

$$(a) \quad \theta_B^{(n)} \equiv \frac{ML}{3EI} + \frac{ML}{6EI} + \frac{P \frac{L}{4} \frac{3L}{4} \frac{5L}{4}}{6LEI} = -\frac{ML}{3EI} - \frac{ML}{6EI} - \frac{P \frac{L}{4} \frac{3L}{4} \frac{7L}{4}}{6LEI} \equiv \theta_A^{(n+1)}$$

de donde resulta $M = -3PL/32$. Con este resultado se dibuja la ley de momentos flectores de la figura 6.19d y la de cortantes de la 6.18e. Casualmente (a mi entender) el momento negativo resulta (en valor absoluto) igual al positivo. ¡La ley de momentos flectores es óptima!

El giro en cada apoyo resulta ser:

$$(b) \quad \theta_B^{(n)} = -\frac{PL^2}{32EI} - \frac{PL^2}{64EI} + \frac{15PL^2}{384EI} = -\frac{PL^2}{128EI}$$

b) En esta segunda parte en que las vigas no son de rigidez constante, cambian las fórmulas del giro en el apoyo utilizadas anteriormente. Deducimos a continuación las fórmulas para (c) un momento exterior $-M_A = M_B = M$, y (d) una carga P en $x = L/4$ (figuras 6.19f y g):

$$(c) \quad \theta_A = -\frac{1}{L} \left(\frac{M L 7L}{kEI 4 8} + \frac{M 3L 3L}{EI 4 8} \right) = -\frac{ML}{32EI} \left(\frac{7}{k} + 9 \right)$$

$$\theta_B = \frac{1}{L} \left(\frac{M L L}{kEI 4 8} + \frac{M 3L 5L}{EI 4 8} \right) = \frac{ML}{32EI} \left(\frac{1}{k} + 15 \right)$$

$$(d) \quad \theta_A = -\frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} \frac{3PL L 10L}{16kEI 4 12} + \frac{1}{2} \frac{3PL 3L L}{16EI 4 2} \right) = -\frac{PL^2}{768EI} \left(\frac{15}{k} + 27 \right)$$

$$\theta_B = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} \frac{3PL L L}{16kEI 4 6} + \frac{1}{2} \frac{3PL 3L L}{16EI 4 2} \right) = \frac{PL^2}{768EI} \left(\frac{3}{k} + 27 \right)$$

La ecuación hiperestática se escribe igualando giros como antes en (a):

$$(a') \quad \theta_B = \frac{ML}{32EI} \left(\frac{1}{k} + 15 \right) + \frac{PL^2}{768EI} \left(\frac{3}{k} + 27 \right) = -\frac{ML}{32EI} \left(\frac{7}{k} + 9 \right) - \frac{PL^2}{768EI} \left(\frac{15}{k} + 27 \right) \equiv \theta_A$$

y de ella se obtiene:

$$M = -\frac{PL}{24} \frac{\frac{18}{k} + 54}{\frac{8}{k} + 24} = -\frac{3PL}{32}$$

¡el mismo resultado anterior! Las leyes de esfuerzos siguen siendo las mismas. El giro en los apoyos será ahora:

$$(b') \quad \theta_n = -\frac{3}{32} \frac{PL^2}{32EI} \left(\frac{1}{k} + 15 \right) + \frac{PL^2}{768EI} \left(\frac{3}{k} + 27 \right) = -\frac{PL^2}{3072EI} \left(27 - \frac{3}{k} \right)$$

Para que este giro resulte la mitad del anterior es preciso que $k = 0,2$.

Enseñanzas:

- Hemos resuelto dificultades de dos tipos:
 - teórico, para deducir que:
 - ▶ los momentos en los dos extremos de cada vano tenían que ser iguales, y que
 - ▶ los giros en los extremos también tenían que ser iguales;
 - práctico, para obtener las fórmulas de los giros con dos tramos de distinta rigidez.
- Hemos llegado a resultados increíbles:
 - que aunque modifiquemos las rigideces de los tramos, las leyes de esfuerzos no cambian (cuando lo natural era que la zona más rígida atrajera hacia sí mayores esfuerzos), y
 - que haciendo más flexibles ciertos tramos de viga ($k < 1$, quitando material resistente) se reducían los giros en los apoyos.

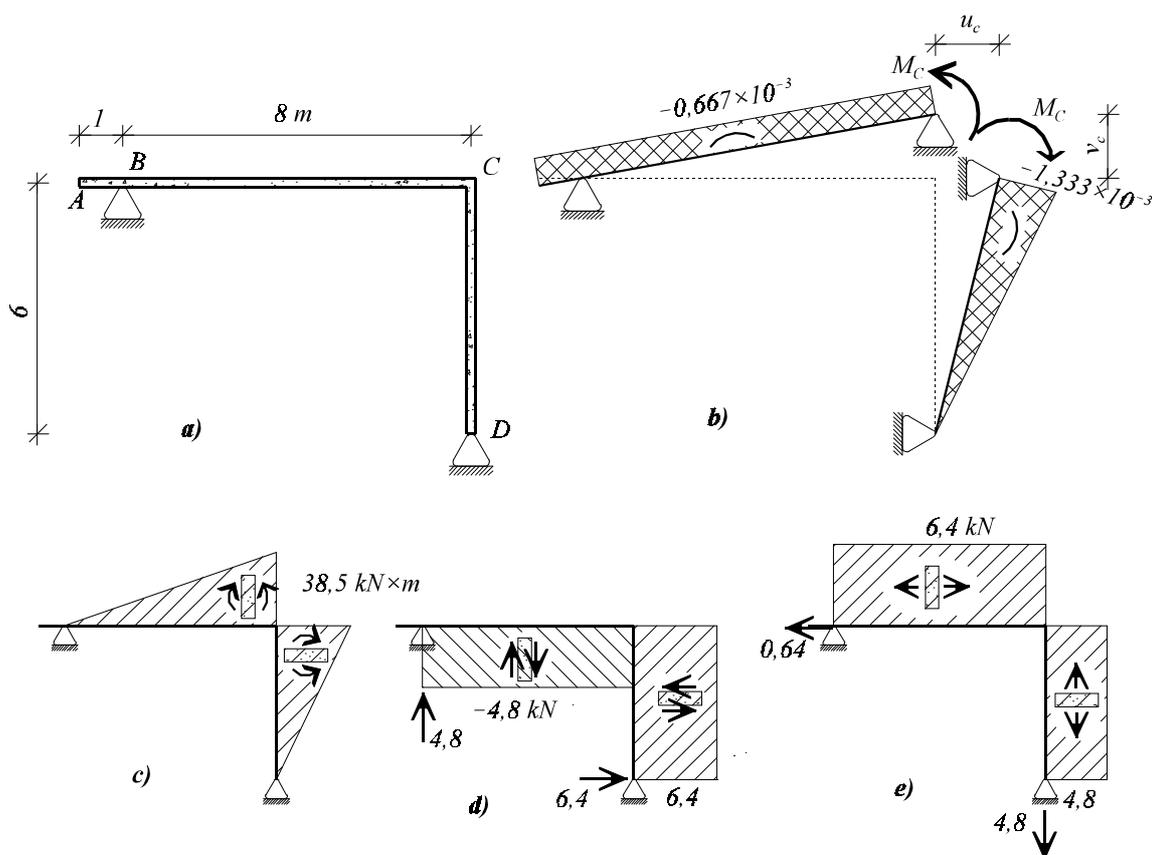


Figura 6.20
Estructura y diagramas del problema 6.5.4

Problema 6.5.4: Pórtico con traslacionalidad conocida

La estructura porticada de la figura 6.20a está formada por un dintel AC de sección rectangular de 40 cm de ancho por 60 cm de canto y un pilar CD de 40 cm de ancho por 30 cm de canto. Sufre los siguientes efectos térmicos: (i) En el dintel AC la cara superior se calienta 40°C mientras que la inferior mantiene invariable su temperatura. (ii) En el pilar CD, la cara exterior se calienta 40°C en C y 0°C en D, variando linealmente de un extremo al otro; la cara interior mantiene invariable su temperatura. Las características del material son $E= 20.000 \text{ MPa}$, $\alpha= 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Se pide:

- a) Dibujar y acotar las leyes de esfuerzos.
- b) Calcular el movimiento vertical del punto A.

a) La estructura es hiperestática de grado 1. Como es intraslacional⁹, podemos resolverla por el método de viga continua. Debemos calcular, sin embargo, los movimientos del punto C causados por los incrementos térmicos, para introducirlos como movimientos impuestos.

El desplazamiento horizontal de C viene determinado por el alargamiento de la directriz de la parte BC del dintel:

$$u_C = 20\alpha \times 8 = 1,6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

mientras que su desplazamiento vertical lo determina el alargamiento de la fibra baricéntrica de CD, que al ser lineal se puede calcular con su ΔT_g medio:

$$v_C = 10\alpha \times 6 = 0,6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

⁹ Al despreciar los alargamientos por esfuerzo axial. No despreciaremos, en cambio, los alargamientos por dilatación térmica. Por éstos, mejor que de estructura intraslacional, debemos hablar de estructura de traslacionalidad conocida *a priori*.

Teniendo en cuenta estos movimientos hacemos la descomposición en vigas simples de la figura 6.20b. En ella introducimos el efecto térmico de flexión, que no hemos considerado aún. Éste se concreta en una curvatura constante en el dintel de valor $\chi = -0,667 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$ y una curvatura en el pilar que varía linealmente de $\chi_C = -1,333 \times 10^{-3}$ a $\chi_D = 0$. La ecuación de compatibilidad en giros en C es:

$$\frac{0,6 \times 10^{-3}}{8} + \frac{-0,667 \times 10^{-3} \times 8}{2} + \frac{M \times 8}{3 \times 144 \times 10^3} = -\frac{1,6 \times 10^{-3}}{6} - \frac{-1,333 \times 10^{-3} \times 6}{3} - \frac{M \times 6}{3 \times 18 \times 10^3}$$

que da $M = 38,51 \text{ kN} \times \text{m}$. Con este valor resultan las leyes de momentos, cortantes y axiles de las figuras 6.20c,d,e.

b) El movimiento de A se calcula componiendo el de arrastre de B, $-\theta_B \times 1$, más el relativo, como si se tratase de una ménsula empotrada en B sometida a la curvatura térmica:

$$v_A = -\left(\frac{0,6 \times 10^{-3}}{8} + \frac{0,667 \times 10^{-3} \times 8}{2} - \frac{M \times 8}{6 \times 144 \times 10^3} \right) \times 1 - 0,667 \times 10^{-3} \times 1 \times 0,5 = -2,718 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Enseñanzas:

- Los pórticos de *traslacionalidad conocida*, como los intraslacionales, se resuelven de manera ventajosa por el método de viga continua.
- En pórticos las leyes de esfuerzos resultan en el siguiente orden:
 - los flectores, del cálculo:
 - ▶ flectores de las cargas exteriores,
 - (las curvaturas impuestas *no* entran en las leyes de flectores, pero los flectores *sí* entran en las leyes de curvaturas);
 - ▶ más los flectores de las hiperestáticas ya calculadas.
 - los cortantes:
 - ▶ de las pendientes de la ley anterior o
 - ▶ de las reacciones en los apoyos de las cargas exteriores y las hiperestáticas;
 - los axiles, del equilibrio de los nudos, en los cuales actúan los cortantes anteriores.

Problema 6.5.5: Pórtico con tramos infinitamente rígidos

El pórtico de la figura 6.21a es de sección constante con rigidez $EI = 2.500 \text{ t} \times \text{m}^2$, a excepción de la zona FG, cuya rigidez se considera infinita. Sobre el pórtico actúa la carga puntual $P = 12 \text{ t}$ de la figura. Suponiendo que las vigas son inelongables, se pide determinar las leyes de esfuerzos y las reacciones de la estructura. (Examen junio 90.)

La estructura es hiperestática de grado 2 (+2 por el apoyo C, +1 por la reacción horizontal en E, -1 por la rótula en B). La inelongabilidad hace que el pórtico sea intraslacional. La articulación en B hace que en dicho apoyo no haya momento; y tampoco habrá cortante en él porque el momento en A debe ser nulo: el soporte AB es una *biela* que sólo absorbe esfuerzo axil (mientras no tenga cargas aplicadas directamente) y sólo impide el movimiento vertical de B. Podemos hacer la descomposición en vigas simples de la figura 6.21b. Las incógnitas hiperestáticas serán, así, los momentos flectores en C y D.

La única dificultad que queda es la de obtener las fórmulas de los giros en los apoyos por la existencia de tramos rígidos. En éstos no se producirá curvatura ($M/EI = 0$) por lo que debemos "descontar" su efecto "habitual". De la figura 6.21c, en la que designamos con R el extremo rígido y con F el flexible (en lugar de A y B), se obtiene:

$$\theta_R^{(M_R)} = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{M_R}{EI} \frac{3}{4} \frac{2}{3} \frac{3}{4} \frac{L}{4} \right] = \frac{9 M_R L}{64 EI}$$

$$(a) \quad \theta_R^{(M_F)} = -\frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} \frac{M_F}{EI} \frac{L}{3} - \frac{1}{2} \frac{M_F}{4EI} \frac{L}{4} \left(L - \frac{2}{3} L \right) \right] = -\frac{9 M_F L}{64 EI}$$

$$\theta_F^{(M_F)} = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} \frac{M_F}{EI} \frac{2}{3} L - \frac{1}{2} \frac{M_F}{4EI} \frac{L}{4} \frac{2}{3} \frac{L}{4} \right) = \frac{21 M_F L}{64 EI}$$

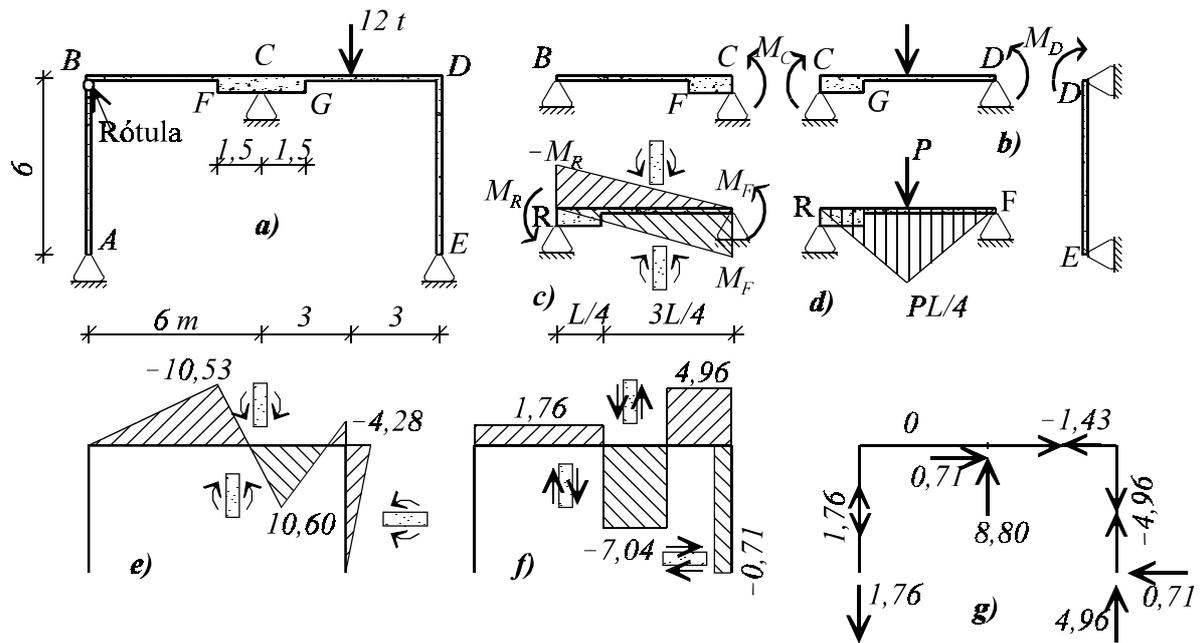


Figura 6.21
Estructura y diagramas del problema 6.5.5

En las fórmulas anteriores no hemos incluido el valor del giro θ_R que causa M_F porque es igual, por reciprocidad (sección 8.1), al de θ_F producido a M_R .

De la figura 6.21d:

$$\theta_R^{(P)} = -\frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} \frac{PL}{4EI} \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{PL}{8EI} \frac{L}{4} \left(L - \frac{2L}{3} \right) \right] = -\frac{19PL^2}{384EI}$$

(b)

$$\theta_F^{(P)} = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} \frac{PL}{4EI} \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{PL}{8EI} \frac{L}{4} \frac{2L}{3} \right] = \frac{23PL}{384EI}$$

Con las fórmulas anteriores estamos en condiciones de escribir las siguientes ecuaciones hiperestáticas de los giros en C y D, respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{9M_C \times 6}{64} &= -\frac{9M_C \times 6}{64} - \frac{19 \times 12 \times 6^2}{384} - \frac{9M_D \times 6}{64} \\ \frac{9M_C \times 6}{64} + \frac{23 \times 12 \times 6^2}{384} + \frac{21M_D \times 6}{64} &= -\frac{M_D \times 6}{3} \end{aligned} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{54}{64} + \frac{54}{64} & \frac{54}{64} \\ \frac{54}{64} & \frac{126}{64} + \frac{6}{3} \end{array} \right) \begin{pmatrix} M_C \\ M_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21,375 \\ -25,875 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} M_C = -10,526 \text{ m} \times \text{t} \\ M_D = -4,282 \text{ m} \times \text{t} \end{cases}$$

Con estos resultados se determinan las reacciones de apoyo y se dibujan las leyes de momentos flectores (figura 6.21e), de esfuerzos cortantes (figura 6.21f) y de axiles (figura 6.21g)

Enseñanzas:

- Hemos empleado el método de viga continua para el cálculo de un pórtico intraslacional.
- La carga exterior era convencional: una carga puntual gravitatoria. La dificultad surgió de que en las vigas había tramos de rigidez infinita por lo que tuvimos que obtener las fórmulas apropiadas para los giros en los apoyos.
- El efecto de una rigidez infinita en un tramo de viga es el de "borrar" la curvatura de ese tramo a la hora de calcular movimientos.
- El sistema de ecuaciones hiperestáticas resultó:
 - simétrico;
 - de diagonal principal positiva:
 - cada coeficiente suma de términos positivos;
 - con un término independiente en el que sólo entraban los giros de la carga exterior.
- La rigidez infinita no se deja notar en las leyes de esfuerzos.

Problema 6.5.6: Pórtico traslacional peculiar

Determinar la ley de momentos flectores en el pórtico de la figura 6.22a.

Se trata indudablemente de un pórtico *traslacional* para cuyo tipo *no* recomendamos, en general, el procedimiento de viga continua. Sin embargo, en este caso podemos aplicarle este método porque su traslacionalidad u_B no influye en la ecuación de compatibilidad en giro en el nudo B que se tiene al descomponer en la forma indicada en la figura 6.22b:

$$\theta_B^{(i)} \equiv -\frac{P \times L^2}{8EI} + \frac{M \times L}{EI} = -\frac{\frac{P}{L} \times L^3}{24EI} - \frac{M \times L}{3EI} \equiv \theta_B^{(d)} \Rightarrow M = 0,0625 PL \text{ m} \times t$$

La ley de momentos flectores resultante se da en la figura 6.22c.

Enseñanzas:

- Excepcionalmente hemos resuelto este pórtico traslacional por el método de viga continua,
 - debido a que casualmente su traslacionalidad no influye en los giros que se igualan.
- De no haber observado esta casualidad, habríamos tomado como incógnita hiperestática la reacción vertical en C ,
 - y utilizado el procedimiento general del apartado siguiente.

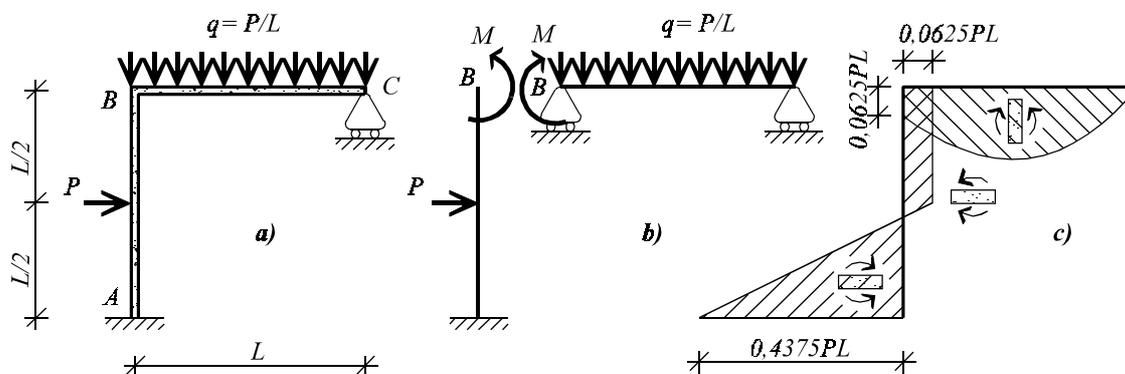


Figura 6.22
Estructura y diagramas del problema 6.5.6

6.6 Método general de resolución de hiperestáticas

Repaso

En el apartado 6.1 se describió el método general de cálculo de estructuras hiperestáticas:

- Se reduce la estructura hiperestática a otra *isostática asociada* de la siguiente manera:
 - reemplazando las coacciones externas redundantes por sus reacciones exteriores, desconocidas, y
 - reemplazando cada elemento resistente considerado redundante por los esfuerzos (desconocidos) que transmite.
- Se escribe (y resuelve) el sistema de ecuaciones hiperestáticas que expresan que bajo las cargas exteriores (conocidas) y las hiperestáticas (desconocidas) se obtiene:
 - movimientos nulos en las direcciones de las coacciones liberadas, y
 - movimientos relativos nulos entre los extremos de los elementos resistentes redundantes y la estructura.

Método automático

En este apartado nos fijaremos en el sistema de ecuaciones que resulta en cada caso para extraer enseñanzas que nos permitirán en lo sucesivo:

- Construir el sistema de ecuaciones hiperestáticas de cualquier estructura de manera automática, casi *a ciegas*.
- Reducir al mínimo el cálculo de sus coeficientes tras observar:
 - que el sistema es siempre simétrico: sólo necesitamos determinar $n+n(n+1)/2$ coeficientes, en lugar de $n+n^2$;
 - que si cambian las cargas exteriores sólo cambian los n coeficientes del término independiente;
 - que los apoyos elásticos sólo hacen sumar su coeficiente de flexibilidad $1/k$ en el lugar correspondiente de la diagonal principal.
- Reducir la oportunidad de equivocarnos al reconocer:
 - que los coeficientes de la diagonal principal han de ser positivos,
 - o suma de términos positivos, cuando más de una subestructura comparte ese grado de libertad.

Hiperestatismo de apoyo rígido

Sea la estructura hiperestática de grado 1 de la figura 6.23a. Si consideramos como incógnita hiperestática la reacción horizontal H_B , la estructura isostática asociada será la de la figura 6.23b. Sobre ésta actúan dos sistemas de cargas bien distintos: (i) la carga exterior, conocida, y (ii) la hiperestática H_B , desconocida. Por ello descomponemos nuestro cálculo en la superposición de dos: el de la estructura isostática asociada sometida a la carga exterior (figura 6.23c) *más* el de la misma estructura sometida únicamente a la fuerza hiperestática desconocida H_B (figura 6.23d). La ecuación hiperestática es:

$$\mathbf{u}_B^{(ext)} + \mathbf{u}_B^{(H_B)} = \mathbf{0}$$

Todavía haremos un *refinamiento* adicional. Para no hacer cálculos con una carga desconocida (cuyo coeficiente arrastraríamos peligrosamente durante todo al cálculo), éste último *estado* (el de la figura 6.23d) lo consideramos como el resultado de **aplicar una carga hiperestática unitaria $H_B = 1$ y multiplicar por un parámetro H_B desconocido todos sus resultados**: la incógnita hiperestática ya no es una fuerza sino un simple parámetro. Queda así una descomposición como la de la figura 6.23e. La ecuación hiperestática es ahora:

$$(6.6-1) \quad \mathbf{u}_B^{(ext)} + H_B \times \mathbf{u}_B^{(H_B=1)} = \mathbf{0}$$

Todo lo que tenemos que hacer es, pues, calcular los movimientos u_B causados por la carga exterior y por la fuerza $H_B = 1$.

Es fácil intuir que la reacción H_B resultará con sentido opuesto al que se muestra en la figura 6.23d. No obstante, *en este procedimiento matemático tomaremos siempre como positivas las fuerzas con el mismo criterio que los*

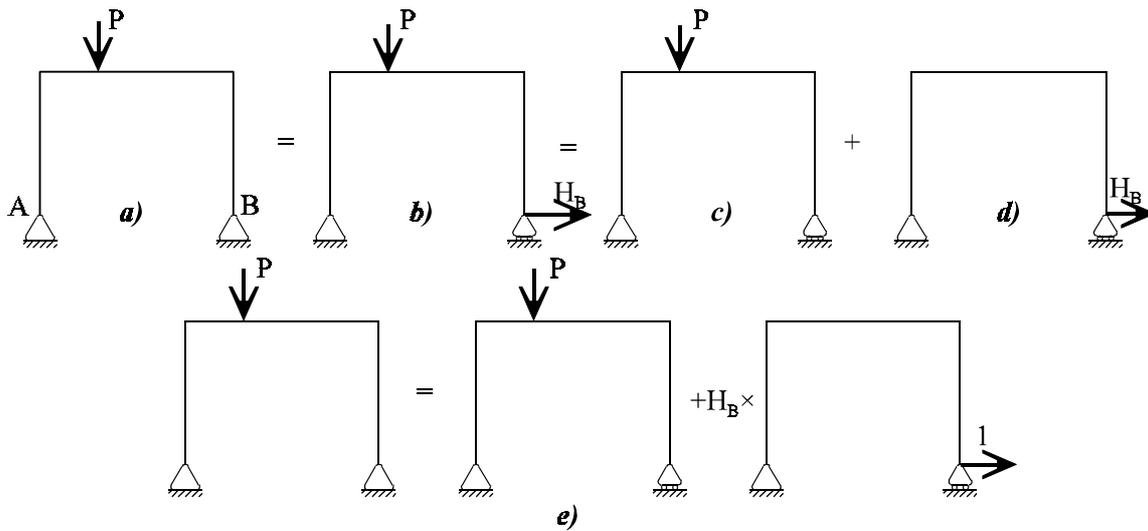


Figura 6.23
Descomposición de una estructura hiperestática en estados isostáticos

desplazamientos y que los ejes. Conseguiremos así que el trabajo sea producto de una fuerza por su desplazamiento novio, que los términos de la diagonal principal sean siempre positivos y que haya consistencia en el cálculo. Además, en estructuras más complejas es difícil predecir el signo de las hiperestáticas por lo que adoptar un criterio fijo y dejar al método poner el signo parece una opción prudente.

Hiperestatismo múltiple

La ecuación (6.6-1) se generaliza con toda facilidad al caso de varias hiperestáticas. Consideremos la estructura de la figura 6.24a que es hiperestática de grado 3. Tomando como incógnitas hiperestáticas las reacciones H_A , V_B y M_C resulta la estructura isostática asociada de la figura 6.24b; en ella los movimientos u_A , v_B y θ_C tendrán que ser nulos. Las cargas que los producen serán la exterior y las hiperestáticas desconocidas H_A , V_B y M_C . Descomponiendo en los cuatro estados de carga como se muestra en las figuras 6.24b-e, la primera ecuación será:

$$(6.6-2) \quad u_A^{(ext)} + H_A \times u_A^{(H_A=1)} + V_B \times u_A^{(V_B=1)} + M_C \times u_A^{(M_C=1)} = 0$$

Parece complicada pero no lo es. Todos los términos son los u_A 's (novios de H_A , la titular de la ecuación) producidos por las distintas cargas, la exterior y cada una de las hiperestáticas. Los movimientos de estas últimas los calculamos para carga unidad y multiplicamos su valor por la magnitud desconocida que les corresponde.

Habrán otras dos ecuaciones que expresen que los otros movimientos totales son también nulos. Cuando reunimos las tres ecuaciones en un sistema, que escribiremos de forma matricial para separar el trigo de la paja —digo, los coeficientes conocidos de las incógnitas— queda de la forma:

$$(6.6-3) \quad \begin{pmatrix} u_A^{(H_A=1)} & u_A^{(V_B=1)} & u_A^{(M_C=1)} \\ v_B^{(H_A=1)} & v_B^{(V_B=1)} & v_B^{(M_C=1)} \\ \theta_C^{(H_A=1)} & \theta_C^{(V_B=1)} & \theta_C^{(M_C=1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_A \\ V_B \\ M_C \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u_A^{(ext)} \\ v_B^{(ext)} \\ \theta_C^{(ext)} \end{pmatrix}$$

El sistema anterior puede parecer mareante, barroco, pero no debe asustar más que a los pusilánimes recalcitrantes: es muy fácil de recordar. La fila j contiene la ecuación asociada a la hiperestática número j , y todos sus coeficientes son los movimientos novios de dicha F_j ; el primero, debido a la primera fuerza hiperestática unitaria; el segundo, a la segunda, etc. Visto por columnas, la columna k contiene los n movimientos debidos a la $F_k = 1$. La columna del término independiente contiene los movimientos novios de todas las fuerzas hiperestáticas producidos por las cargas exteriores, conocidas, con signo negativo.

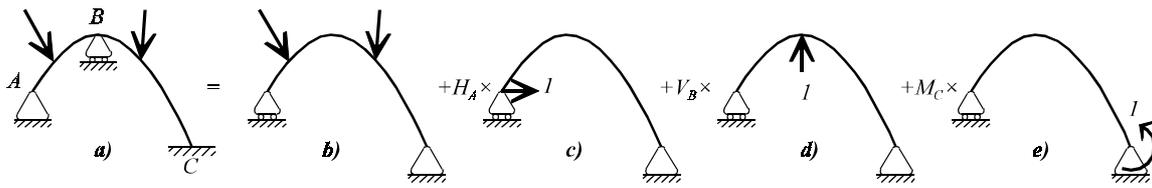


Figura 6.24
Descomposición de una estructura con N_H hiperestáticas en N_H+1 estados de carga isostáticos

La fórmula (6.6-3) nos dice que una vez decidido cuáles serán nuestras incógnitas hiperestáticas de apoyo rígido, ¡el sistema de ecuaciones hiperestáticas se puede escribir sin preguntar siquiera qué aspecto tiene la estructura!

Una vez escrito el sistema de ecuaciones, habrá que calcular los términos (movimientos) que lo componen. Habrá que empezar por obtener las leyes de esfuerzos para las siguientes hipótesis de carga: cada una de las hiperestáticas actuando solas con valor unidad (N_H leyes) más la de las cargas exteriores: total N_H+1 leyes de esfuerzos. Y por último habrá que calcular los movimientos pedidos por la fórmula (6.6-3), pero no todos los que allí se ven porque el teorema de la reciprocidad (sección 8.1) garantiza la simetría de la matriz: serán $(N^2+3 \times N)/2$.

Hiperestática de apoyo flexible (muelle)

La estructura de la figura 6.25a es muy semejante a la de la figura 6.23a; la diferencia es que el apoyo horizontal en B ha pasado de rígido a flexible. De acuerdo con la descomposición de la figura 6.25b la ecuación hiperestática, que antes era la (6.6-1) se convierte en:

$$(6.6-4) \quad u_B^{(ext)} + H_B \times u_B^{(H_B=1)} = -\frac{H_B}{k}$$

esto es:

$$(6.6-5) \quad \left[u_B^{(H_B=1)} + \frac{1}{k} \right] H_B = -u_B^{(ext)}$$

La ecuación hiperestática sólo ha cambiado en que aparece el término $1/k$ sumado al desplazamiento correspondiente de la diagonal principal. Nunca puede aparecer restado. Es natural: en el punto B concurren dos subestructuras, el pórtico y el muelle, con los mismos derechos. Cada una hace la misma aportación al sistema de ecuaciones: su coeficiente de flexibilidad. Éstos se deben sumar porque tienen los mismos derechos y porque el término resultante ha de ser siempre positivo. (Si fuera negativo se daría el absurdo de que al empujar a una estructura en un cierto sentido, ésta se moviera en sentido opuesto.) Y si el coeficiente fuera nulo, el movimiento sería infinito.

Si en lugar de un muelle la coacción deformable hubiera sido un cable (figura 6.25c), la ecuación hiperestática resultaría igual a la (6.6-5) con la flexibilidad del cable $1/k = L/EA$.

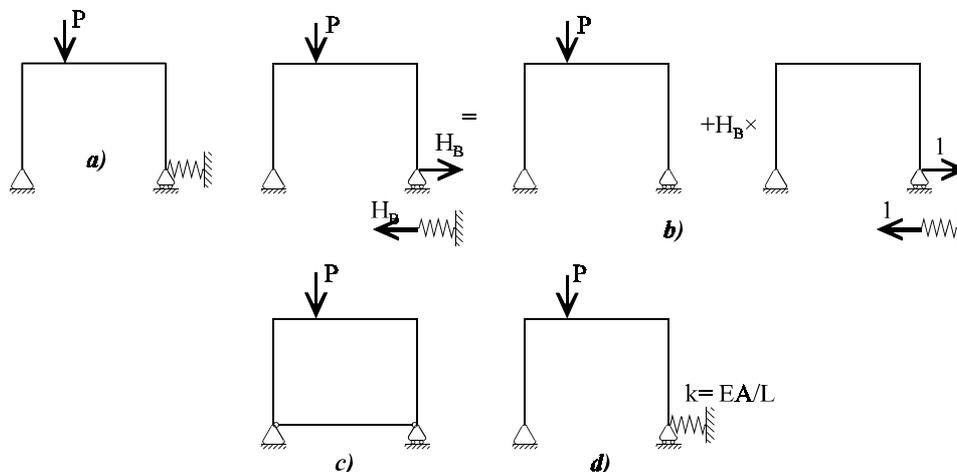


Figura 6.25
Estructura hiperestática de apoyo flexible

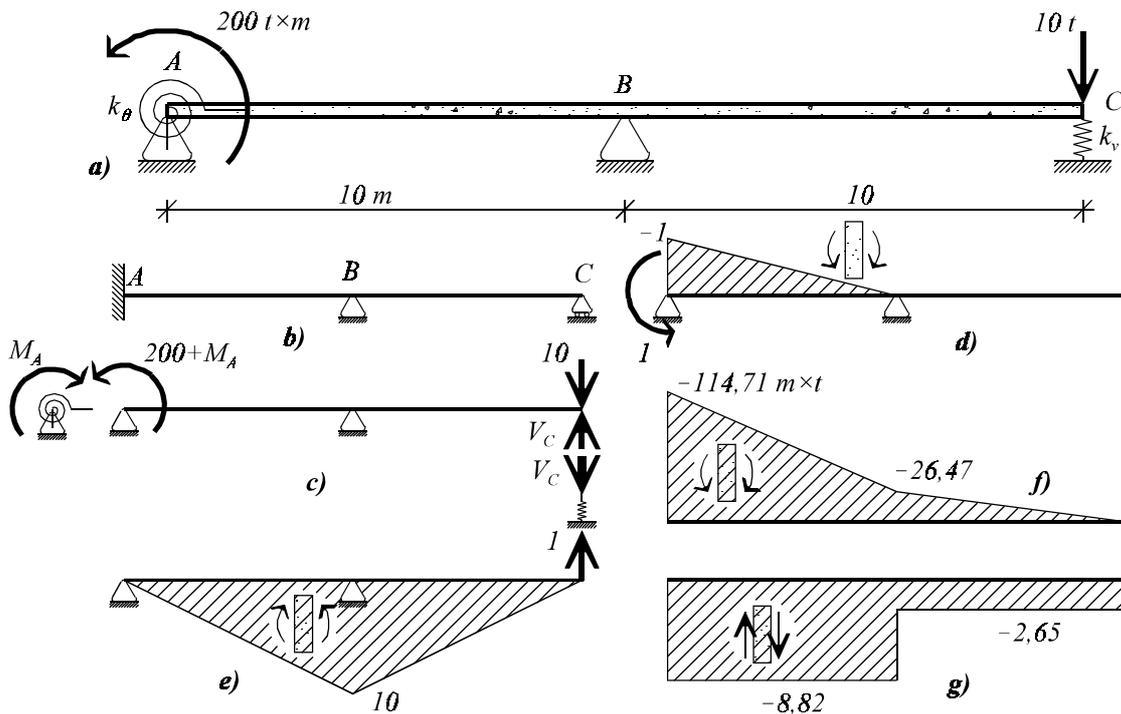


Figura 6.26
Estructura y diagramas del ejemplo 6.6.1

Ejemplo 6.6.1: Hiperestatismos de muelles longitudinal y rotativo

La viga de la figura 6.26a es de sección constante de rigidez $EI = 50.000 \text{ t/m}^2$. Está empotrada elásticamente en A ($k_\theta = 10.000 \text{ m}\times\text{t/rad}$) y apoyada elásticamente en C ($k_v = 100 \text{ t/m}$). Para las cargas exteriores mostradas en la misma figura, se pide:

a) Dibujar y acotar las leyes de esfuerzos flectores y cortantes.

b) Calcular la flecha en C y el giro en A.

a) El que un apoyo sea elástico en vez de rígido no cambia el grado de hiperestatismo total de la estructura; sólo cambia el que en la ecuación hiperestática correspondiente se añada su flexibilidad $1/k$ en el término de la diagonal principal. Quiere esto decir que la estructura de la figura 6.26a tiene el mismo grado de hiperestatismo que la de la figura 6.26b: $N_H = 2 + 1$; 2 para cargas de flexión, más una que activarían sólo las cargas axiales. Para la estructura de apoyos rígidos la figura 6.26b en la cual tomáramos como incógnitas hiperestáticas M_A y V_C , el sistema de ecuaciones sería:

$$\begin{pmatrix} \theta_A^{(M_A=1)} & \theta_A^{(V_C=1)} \\ v_C^{(M_A=1)} & v_C^{(V_C=1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_A \\ V_C \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \theta_A^{(ext)} \\ v_C^{(ext)} \end{pmatrix}$$

Para nuestra estructura de la apoyos flexibles el sistema es:

$$\begin{pmatrix} \theta_A^{(M_A=1)} + \frac{1}{k_\theta} & \theta_A^{(V_C=1)} \\ v_C^{(M_A=1)} & v_C^{(V_C=1)} + \frac{1}{k_v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_A \\ V_C \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \theta_A^{(ext)} \\ v_C^{(ext)} \end{pmatrix}$$

Hay que advertir, sin embargo, que para que esta ecuación sea válida hay que tomar la precaución de *aplicar la totalidad de las cargas exteriores sobre la subestructura viga*; cada muelle ha de sufrir sólo la carga de su hiperestática. Los coeficientes del sistema se calculan a partir de las leyes de esfuerzos de la figura 6.26d:

$$\theta_A^{(M_A=1)} = \frac{1 \times 10}{3EI} = 0,0667 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$v_C^{(M_A=1)} = \theta_B \times 10 = -\frac{1 \times 10}{6EI} \times 10 = -0,333 \times 10^{-3} \text{ m}$$

y de la figura 6.26e:

$$\theta_A^{(V_C=1)} = -\frac{M_B \times 10}{6EI} = -0,333 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$v_C^{(V_C=1)} = \theta_B \times 10 + \frac{1 \times 10^3}{3EI} = 13,333 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Hemos obtenido un valor redundante, que nos sirve de comprobación. Los movimientos debidos a las cargas exteriores resultan, casualmente, de combinar *con habilidad* los resultados anteriores:

$$\theta_A^{(ext)} = 200 \times \theta_A^{(M_A=1)} - 10 \times \theta_A^{(V_C=1)} = 16,667 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$v_C^{(ext)} = 200 \times v_C^{(M_A=1)} - 10 \times v_C^{(V_C=1)} = -200 \times 10^{-3} \text{ m}$$

El sistema de ecuaciones hiperestáticas resulta:

$$\begin{pmatrix} 0,0667+0,1 & -0,333 \\ -0,333 & 13,333+10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_A \\ V_C \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 16,667 \\ -200 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} M_A = -85,29 \text{ m}\times\text{t} \\ V_C = 7,353 \text{ t} \end{matrix}$$

Esto nos dice que del momento exterior de 200 m×t, el muelle rotativo se lleva 85,29 m×t y la viga, 114,71 m×t; y de la carga vertical, 7,353 t son para el muelle y 2,647 t, para la viga. La ley de momentos flectores resulta de combinar las de las figuras 6.26e y 6.26f con estos coeficientes; el resultado se muestra en la figura 6.26f. La ley de cortantes resulta de derivar la anterior y se muestra en la figura 6.26g.

b) Los movimientos pedidos se calculan con más facilidad en el lado muelle:

$$\theta_A = \frac{-M_A}{k_\theta} = 8,529 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$v_C = \frac{-V_C}{k_v} = 73,53 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Enseñanzas:

- Hemos escrito *de modo automático* las ecuaciones hiperestáticas de una estructura con incógnitas de apoyo flexible.
- Observamos, como siempre, que:
 - los movimientos debidos a las cargas hiperestáticas unitarias entran a formar parte de la matriz del sistema, mientras que
 - los movimientos debidos a las cargas exteriores entran en el término independiente.
- El sistema de ecuaciones:
 - resulta simétrico;
 - su diagonal principal, positiva;
 - el efecto de los muelles respecto del apoyo rígido ha sido el de sumar su flexibilidad al término correspondiente de la diagonal principal.
- Para lograr este "automatismo" hemos tenido que aplicar las cargas exteriores íntegramente sobre la subestructura principal.

Hiperestáticas internas

Las incógnitas hiperestáticas internas entran a formar parte de sistemas de ecuaciones semejantes al (6.6-2) con la única diferencia de que los movimientos nuevos que anulan son *movimientos relativos*. En efecto: sea el marco de la figura 6.27a. Es una estructura con tres grados de hiperestatismo, todos ellos internos, debido a que la viga CD (que puede transmitir tres esfuerzos) es un camino redundante para las cargas. El método general de cálculo consiste en cortar dicha viga por una sección intermedia S, lo cual da lugar a dos puntos separados, S y S' (figura 6.27b) e introducir fuerzas iguales y contrarias N, Q, M en ellas. Estas hiperestáticas se calculan haciendo que los movimientos u, v, θ relativos entre los dos labios S' y S del corte sean nulos, igual que se hacía en (6.6-2) con movimientos absolutos.

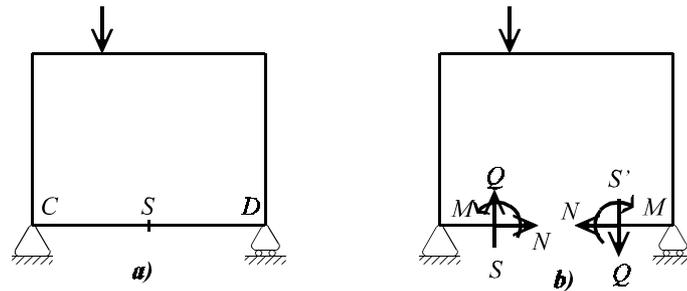


Figura 6.27
Incógnitas de hiperestatismo interno

Ejemplo 6.6.2: Hiperestatismo de tirante

La estructura atirantada de la figura 6.28a consta de vigas de rigidez constante $EI = 243.000 \text{ t}\cdot\text{m}^2$ y cable de rigidez $EA = 90.000 \text{ t}$. El coeficiente de dilatación del material de las vigas es $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Para la sollicitación exterior que consiste en un calentamiento uniforme de la viga horizontal BD de 50°C , se pide:

- Calcular el esfuerzo axial en el tirante.
- Dibujar y acotar las leyes de esfuerzos axiales, cortantes y flectores en toda la estructura.

Nota: En los elementos resistentes sometidos a flexión se permite despreciar las deformaciones producidas por los esfuerzos axiales y cortantes. (Examen septiembre 92.)

El cable es un elemento redundante; sin él, la estructura sería una ménsula con apéndice, isostática. Como el cable solo transmite redundantemente un esfuerzo, el axil, la estructura es hiperestática interna de grado 1. Tomando como isostática asociada la estructura sin cable de la figura 6.28b¹⁰, la ecuación de compatibilidad es:

$$\delta_{CD}^{(ext)} = \delta_{CD}^{(cable)}$$

siendo δ_{CD} el desplazamiento relativo entre los puntos C y D medido según la propia dirección CD. Lo tomaremos positivo cuando sea de separación, que es consistente con la pareja de fuerzas T que actúan sobre la estructura que consideramos principal. La ecuación hiperestática anterior expandida es:

$$\delta_{CD}^{(ext)} + \delta_{CD}^{(T=1)} \times T = -\frac{T \times L}{EA}$$

o sea:

$$\left[\delta_{CD}^{(T=1)} + \frac{1}{k} \right] T = -\delta_{CD}^{(ext)}$$

que es ecuación idéntica a la (6.6-5) sólo que en términos de un desplazamiento relativo. Pasamos a evaluar sus coeficientes.

La carga exterior produce $u_D = 12\alpha 50 = 6 \times 10^{-3} \text{ m}$. Ello supone que el punto D se aleje del C $\delta_{CD}^{(ext)} = u_D \cos \varphi = 4,8 \times 10^{-3} \text{ m}$.

¹⁰ No importa que el cable aparezca como trabajando a compresión. Sólo si el resultado final fuera de esta índole ($T > 0$) deberíamos rechazar el cálculo y quedarnos con la estructura sin cable.

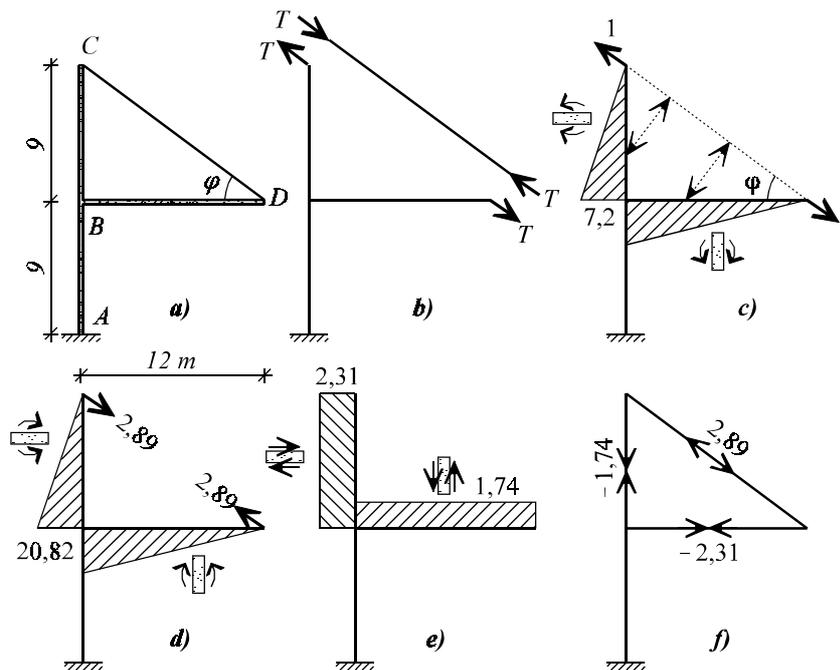


Figura 6.28
Estructura y diagramas del ejemplo 6.2.2

La carga $T=1$ produce sobre la estructura la ley de momentos flectores de la figura 6.28c. Observa que es una carga autoequilibrada, que no necesita de reacciones exteriores para alcanzar el equilibrio. Para calcular su efecto en la separación de C y D concentramos las áreas de curvaturas en sus centros de gravedad y multiplicamos este giro gordo por su distancia a la recta CD (ver figura 6.28c):

$$\delta_{CD}^{(T=1)} = \frac{1}{2} \frac{7,2}{EI} 9 \frac{2}{3} 9 \cos\varphi + \frac{1}{2} \frac{7,2}{EI} 12 \frac{2}{3} 12 \operatorname{sen}\varphi = \frac{362,88}{EI} = 1,493 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Observa que este cálculo es mucho más directo que el de obtener los movimientos relativos u_{CD} y v_{CD} y proyectarlos sobre CD. La ecuación hiperestática resulta:

$$[1,493 + 0,167]T = -4,8 \rightarrow T = -2,892 \text{ t}$$

Con este valor se llega a las leyes de esfuerzos flectores, cortantes y axiles de las figuras 6.28d-f.

Enseñanzas

- Hemos resuelto una estructura con una incógnita *hiperestática interna*.
- Hemos encontrado que la ecuación de hiperestática interna:
 - se asemeja a la de hiperestática de apoyo flexible en que se suman las flexibilidades de la subestructura principal y de la subestructura muelle o cable;
 - se diferencia en que el movimiento anulado es *relativo*.
- La carga exterior sólo afectaba a la subestructura principal.
- No nos ha importado iniciar el cálculo con un cable en supuesta compresión. No aceptaríamos, en cambio, acabar el problema de esta manera.

Sin limitaciones

La única limitación que tiene nuestra formulación automática hasta ahora es la de requerir que la carga exterior actúe *toda* sobre la subestructura principal (aquella para la que tomamos como positiva la fuerza hiperestática) y no sobre los cables o muelles que constituyen la subestructura secundaria. Vamos a ver un ejemplo de cómo resulta la ecuación hiperestática cuando la carga exterior actúa necesariamente sobre una subestructura secundaria.

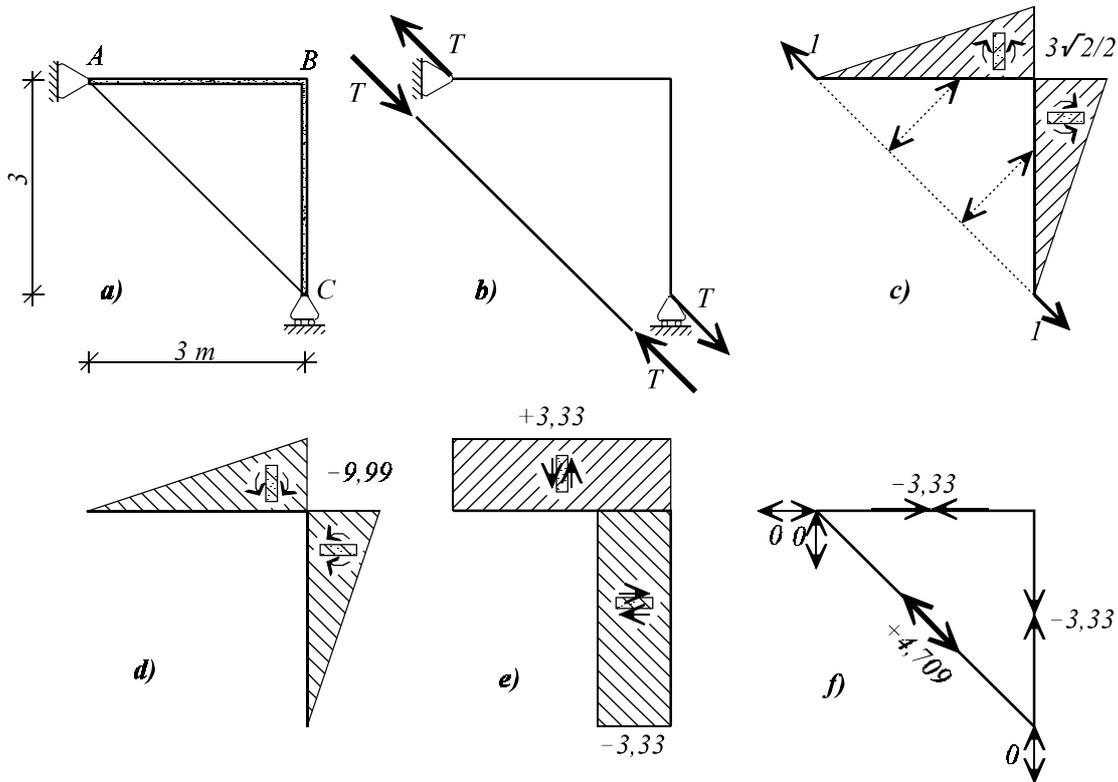


Figura 6.29 Estructura y diagramas del ejemplo 6.6.3

Ejemplo 6.6.3: Hiperestatismo de tirante con carga en el tirante

La rigidez de las vigas AB y BC que componen la estructura de la figura 6.29a es $EI= 20.000 \text{ t}\cdot\text{m}^2$, y la del cable AC, $EA= 9.400 \text{ t}$. Éste último sufre un enfriamiento de 100°C , siendo su coeficiente de dilatación $\alpha= 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Se pide:

- a) Calcular el esfuerzo en el tirante y las reacciones en los apoyos.
- b) Dibujar y acotar las leyes de momentos flectores y esfuerzos axiles de todos los miembros.
- c) Determinar el giro del punto B. (Examen junio 96.)

a) Definimos como subestructura principal la de vigas y le adjudicamos los esfuerzos T con el sentido positivo de separación de A y C (figura 6.29b). El cable es la subestructura secundaria que recibe los esfuerzos opuestos, haciéndolo trabajar supuestamente a compresión. La ecuación hiperestática será:

$$\delta_{AC}^{(s_o)} \equiv \delta_{AC}^{ext,s_o} + T\delta_{AC}^{(T=1),s_o} = \delta_{AC}^{ext,s_1} - T \frac{L}{EA} \equiv \delta_{AC}^{(s_1)}$$

para el supuesto de que haya cargas exteriores actuando tanto en la estructura principal como en la secundaria. El superíndice s_o se refiere a la subestructura 0 o principal, y s_1 , a la secundaria o cable. La ecuación queda finalmente.

$$\left[\delta_{AC}^{(T=1),s_o} + \frac{L}{EA} \right] T = - \left(\delta_{AC}^{(ext),s_o} - \delta_{AC}^{(ext),s_1} \right)$$

Esta ecuación sólo difiere de las vistas hasta ahora en que, al haber cargas exteriores en todas las subestructuras, en el término independiente aparecen, con signo menos, el movimiento de la subestructura principal menos los de las demás subestructuras. En el caso que nos ocupa no hay movimiento δ_{AC} de cargas exteriores en la subestructura principal.

En la subestructura principal, $\delta_{AC}^{(T=1)}$ sale de la ley de momentos flectores de la figura 6.29c, multiplicando los giros concentrados resultantes por sus distancias a la recta AC como sugiere la propia figura 6.29c. Resulta:

$$\delta_{AC}^{(T=1),s_0} = 2 \frac{1}{2} \frac{3\sqrt{2}}{2EI} 3 \frac{2}{3} \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0,45 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_{AC}^{(ext),s_0} = 0$$

En la subestructura secundaria cable:

$$\delta_{AC}^{(T=1),s_1} = -\frac{L}{EA} = -0,451 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_{AC}^{(ext),s_1} = -100\alpha L = -4,243 \times 10^{-3} \text{ m}$$

La ecuación hiperestática queda:

$$[0,45 + 0,451]T = -[0 - (-4,243)] \rightarrow T = -4,709 \text{ t}$$

El cable trabajará efectivamente a tracción de 4,709 t. Sobre la estructura no aparecerán reacciones porque la pareja de fuerzas $\pm T$ es autoequilibrada.

b) La ley de momentos flectores resulta de multiplicar la de $T=1$ de la figura 6.29c por el factor T encontrado. El resultado se da en la figura 6.29d. Las leyes de cortantes y de axiles se muestran en las figuras 6.29e,f.

c) Para calcular θ_B necesitamos obtener antes el giro en el apoyo:

$$v_C = \theta_A \times 3 - \frac{1}{2} \frac{9,99}{EI} 3 \frac{1}{3} 3 = 0 \rightarrow \theta_A = 0,250 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_B = \theta_A - \frac{1}{2} \frac{9,99}{EI} 3 = -0,500 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Enseñanzas

- Hemos resuelto un problema con una hiperestática interna con cargas exteriores aplicadas en la subestructura secundaria.
- Hemos encontrado cómo intervienen los movimientos de las diversas subestructuras:
 - los debidos a hiperestáticas unidad se *suman* para formar la matriz del sistemas;
 - los debidos a carga exterior se **restan** para formar el término independiente.

Resumen:

- Una estructura hiperestática de grado N_H se calcula:
 - reduciéndola a una isostática asociada soportando
 - una carga exterior, conocida, y
 - N_H fuerzas o reacciones hiperestáticas unitarias;
 - superponiendo los N_H+1 casos de carga anteriores y
 - forzando a que los movimientos *novios* de las hiperestáticas cumplan las *condiciones de compatibilidad* de la estructura original.

- El aspecto del sistema de ecuaciones hiperestáticas no depende del *sex appeal* de la estructura: sólo depende de cuáles sean sus incógnitas hiperestáticas.

- En el sistema de ecuaciones resultante se observa:
 - Que la matriz del sistema contiene en la fila n los desplazamientos u_n novios de la fuerza hiperestática F_n :
 - el primero es el debido a $F_1=1$,
 - el segundo, el debido a $F_2=1$, etc.
 - Que la matriz es
 - simétrica, y
 - con coeficientes positivos en la diagonal principal o *suma* de los coeficientes positivos de varias subestructuras.
 - Que el término independiente contiene la *diferencia* de los movimientos producidos por las cargas exteriores en las diversas subestructuras: el movimiento relativo, con signo menos.

- Para calcular los coeficientes del sistema habremos de:
 - dibujar las leyes de esfuerzos (generalmente basta con la de momentos flectores) de las N_H+1 hipótesis de carga sobre la estructura isostática asociada:
 - la de las cargas exteriores, más
 - cada una de las $F_n=1$, aislada;
 - para con esos esfuerzos calcular los movimientos pedidos por el sistema de ecuaciones hiperestáticas:
 - para las cargas exteriores, todos los u_n 's;
 - para las hiperestáticas unitarias:
 - al menos el suyo novio, que va en la diagonal principal;
 - para los demás de la fila o columna escogeremos la hipótesis en la que resulte más fácil (o los calcularemos en las dos posibles para comprobar que no hay error).

- Cuando hayamos concluido con el cálculo, las leyes finales de esfuerzos se pueden obtener de dos maneras:
 - superponiendo las correspondientes leyes de esfuerzos de los N_H+1 hipótesis de carga, o
 - obteniéndolos de nuevo sobre la estructura isostática con todas las cargas actuando simultáneamente:
 - las exteriores más
 - las N_H hiperestáticas con sus valores ya conocidos.

- La ley de esfuerzos cortantes, a su vez, se puede obtener de dos maneras:
 - a partir de las cargas exteriores,
 - proyectando las de un lado sobre la normal a la directriz, o
 - derivando la ley de momentos flectores.

- La ley de esfuerzos axiales también se puede obtener de dos maneras:
 - a partir de las cargas exteriores,
 - proyectando las de un lado sobre la tangente a la directriz, o
 - por equilibrio de nudos entre
 - axiales,
 - cortantes y
 - cargas puntuales aplicadas en el nudo.

7 Pórticos y arcos (Hiperestáticas, 2)

7.0 Objetivos y contenido

Objetivos	Contenido
<p>Generales:</p> <ul style="list-style-type: none"> — Aprender las peculiaridades del comportamiento de las estructuras porticadas, <ul style="list-style-type: none"> • pórticos y • arcos. — Saber qué es un antifunicular, qué interés tiene y la manera de hallarlo. — Conocer las simplificaciones de cálculo que permiten la simetría y la antisimetría 	
<p>Específicos:</p> <ul style="list-style-type: none"> — Aprender de los pórticos: <ul style="list-style-type: none"> • qué es el efecto pórtico • cuál es el funcionamiento ideal de un pórtico • notar las ventajas e inconvenientes del hiperestatismo. — Aprender de los arcos: <ul style="list-style-type: none"> • qué es el efecto arco, • cuándo es el antifunicular de una carga dada, <ul style="list-style-type: none"> ▶ conocer los antifuniculares de las cargas habituales, • hasta cuándo es admisible despreciar la deformación axial, • trucos para simplificar su cálculo. — Aprender las simplificaciones de cálculo permitidas por: <ul style="list-style-type: none"> • la simetría, <ul style="list-style-type: none"> ▶ condiciones para que la estructura sea simétrica <ul style="list-style-type: none"> □ en esfuerzos, □ en movimientos; • la antisimetría y • la superposición de ambas, <ul style="list-style-type: none"> ▶ y los peligros de estas simplificaciones en la vida profesional. . . 	<p style="text-align: right;">§7.1</p> <p style="text-align: right;">§7.2</p> <p style="text-align: right;">§7.3</p>
<p>Adicional:</p> <ul style="list-style-type: none"> — Adquirir soltura en el cálculo manual de estructuras pórtico y arco, <ul style="list-style-type: none"> • y en aprovechar las simplificaciones de la simetría 	<p style="text-align: right;">§7.4</p>

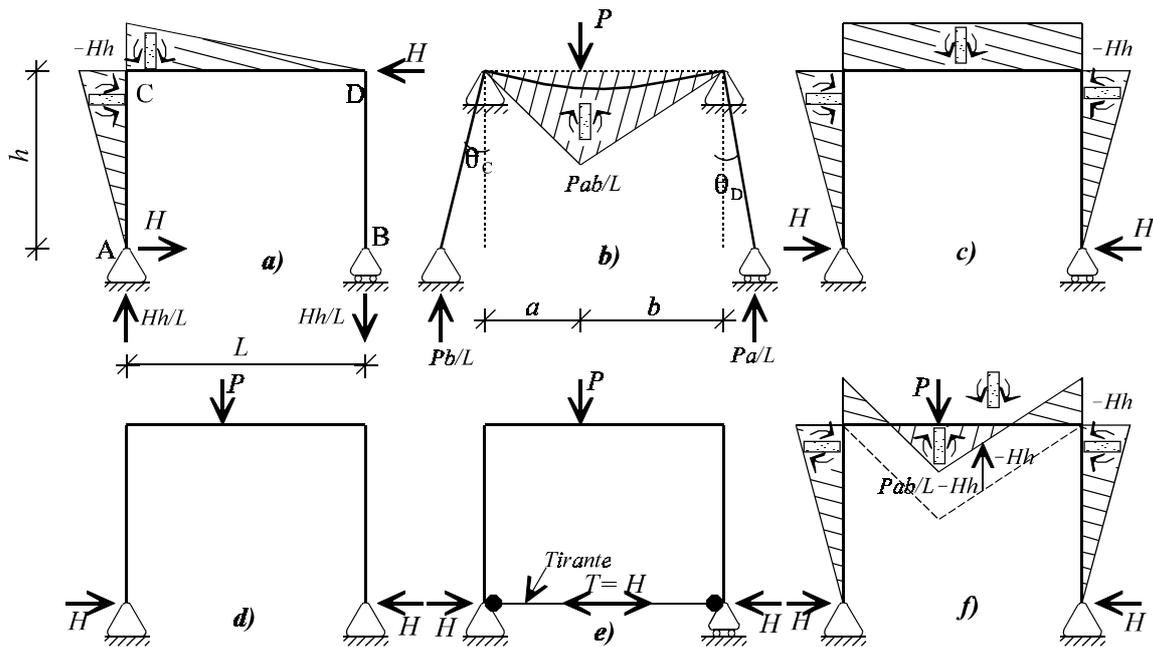


Figura 7.1
Pórticos isostáticos e hiperestáticos

7.1 Pórticos

Novedades

Empezaremos diciendo qué cosas cambian respecto de nuestras viejas amigas las vigas continuas:

- La *novedad 1* del §2.7: no podemos separar efectos de cargas axiales y transversales: ahora todas las cargas excitan todas las hiperestáticas. La figura 7.1a muestra cómo una carga horizontal causa reacciones verticales y momentos flectores.
- Si el pórtico es isostático (un apoyo horizontal es deslizante), el dintel se comporta como una viga biapoyada:
 - sus momentos flectores son los mismos de una viga biapoyada (figura 7.1b),
 - las patas solo trabajan llevando las reacciones verticales al suelo,
 - el desplazamiento horizontal relativo de las patas del pórtico es $u_B = -\theta_C h_A + \theta_D h_B$
 - siendo θ_C, θ_D los giros calculados en la viga biapoyada, con su signo .
- En un pórtico hiperestático:
 - si podemos asegurar que los nudos del pórtico no se mueven, o sabemos exactamente cuánto se mueven, podremos calcular sus reacciones hiperestáticas por el método de viga continua (§6.4);
 - de lo contrario será mejor resolverlo por los métodos de hiperestática general (§6.6),
 - usando ocasionalmente simplificaciones de simetría/antisimetría (§7.3)
- En nudos formados por vigas a 90°:
 - Si no hay fuerzas aplicadas en los nudos:
 - el valor del axil de una viga coincide con el cortante de la perpendicular,
 - y viceversa;
 - el valor del momento flector tiene que coincidir a ambos lados del nudo.
 - Si hay fuerzas aplicadas en los nudos, la regla anterior se modifica en que los valores mencionados se diferenciarán en la cantidad introducida por la carga aplicada.
- En nudos con otros ángulos, los esfuerzos están relacionados por las condiciones generales de equilibrio estático: $\sum f_x = 0, \sum f_y = 0$.

- Ver la *novedad 2* de §2.7 y figura 2.27 sobre cómo debemos suponer que *evolucionan* los signos de los esfuerzos. Al calcular movimientos, si se mantiene el signo del esfuerzo de acuerdo con la figura 2.27, se mantendrá el signo del movimiento que causa en un determinado punto,
 - siempre que el punto se mantenga al mismo lado (por encima o por debajo; a la izquierda o a la derecha) de la directriz.

Viga con patas

Un pórtico se proyecta para salvar un vano cuya topografía requiere *patas* o jambas, por razones de gálibo. Si éste es el único requerimiento, se puede escoger un pórtico isostático. Sin embargo, un pórtico isostático tiene el inconveniente de que no reparte bien los esfuerzos entre los miembros de la estructura. Para cargas verticales y momentos aplicados sobre el dintel, el pórtico isostático apoyado-deslizante se comporta como una viga biapoyada cuyas patas le sirven únicamente para conducir sus reacciones verticales hasta el suelo. En efecto: en el pórtico de la figura 7.1*b* el dintel sufre los mismos esfuerzos y transmite las mismas reacciones que la viga biapoyada: no recibe ayuda alguna de sus patas; es casi como si éstas colgaran de aquél (figura 7.1*b*).

Ayuda hiperestática

El comportamiento resistente del pórtico de la figura 7.1*a* mejora apreciablemente si nos las arreglamos para conseguirle una reacción horizontal H en los apoyos¹ (figura 7.1*c*). Esto se consigue regularmente introduciendo hiperestatismo: convirtiendo en fijo el apoyo deslizante (figura 7.1*d*) o colocando un tirante entre los apoyos (figura 7.1*e*). El efecto de la reacción horizontal es el de superponer una ley de momentos flectores negativa (figura 7.1*c*) que "empuja hacia arriba" la ley "de viga" del dintel (figura 7.1*a*), efecto que reduce los momentos flectores en el dintel (figura 7.1*f*) —a costa de introducirlos en las patas, claro—. La reacción horizontal añade además una compresión en el dintel, que resulta favorable en estructuras de hormigón. Así pues, un pórtico se puede proyectar hiperestático para que las patas ayuden a resistir al dintel. El ejemplo que sigue nos contradice, sin embargo, al mostrar que, con ingenio de ingeniero,² se puede conseguir también el efecto hiperestático de "subir la ley de viga del dintel" sin introducir hiperestatismo alguno.

Ejemplo 7.1.1: Pórtico con apoyo inteligente

El pórtico de la figura 7.2*a* es de sección constante de rigidez $EI = 400.000 \text{ t}\cdot\text{m}^2$. Está articulado en su extremo A y puede deslizar sobre una superficie plana inclinada en su extremo B ; soporta una sobrecarga uniforme de 2 t/m . Se desea saber:

- a) Cuál es la inclinación α óptima de la sustentación en B para que el momento máximo (en valor absoluto) que sufra la estructura sea lo más pequeño posible.
- b) En tales condiciones, determinar el desplazamiento que sufre el extremo B en la dirección α . (Examen enero 96.)

a) La idea del problema es la siguiente. Se trata de un pórtico isostático; sus reacciones verticales en A y en B valen $V_A = V_B = 12 \text{ t}$. La reacción en B no será vertical, pero el terreno cumplirá ciegamente con su deber de darnos una reacción R_B cuya componente vertical sea precisamente de 12 t . Lo que sucede es que esta reacción inclinada R_B nos dará, simultáneamente con la componente vertical necesaria, una componente horizontal de valor $H = -12 \text{ tg } \alpha$ (figura 7.2*b*), de la cual nos queremos aprovechar astutamente, como se explica a continuación.

Si el apoyo en B fuera horizontal (si no hubiera reacción H) la ley de momentos flectores sería la de la figura 7.2*c*, con un máximo en el centro de valor $q \times L^2 / 8 = 36 \text{ m}\cdot\text{t}$ igual que en la viga isostática. A esta ley habrá que superponerle la de la reacción H , que tiene el aspecto de la figura 7.2*d*. Su efecto será empujar hacia arriba la ley del dintel. Idealmente podremos conseguir que sea como la de la figura 7.2*e*, con $18 \text{ m}\cdot\text{t}$ por encima y $18 \text{ m}\cdot\text{t}$ por debajo. Con ello logramos que el momento flector máximo en toda la estructura sea *la mitad* del original. Esta cantidad es la mínima y de ella no podremos bajar.³ Así pues, el valor ideal para la reacción horizontal es $H = 18/5 = 3,6 \text{ t}$ de donde se obtiene $\alpha_{opt} = 16^\circ 70'$.

b) Los movimientos se calculan con la ley de momentos flectores de la figura 7.2*e*, pero es más fácil hacerlo con sus componentes, las de las figuras 7.2*c* y *d*. Para calcular el movimiento de B en la dirección inclinada tendríamos

¹ Si bien podemos empeorar su comportamiento frente a cargas que consistan en movimientos o deformaciones impuestas.

² Se dice que en español ingeniero viene de ingenio mientras que en inglés *engineer* viene de *engine*. Esto te lo digo para animarte a desarrollar tu ingenio, no para que adquieras un injustificado complejo de superioridad frente a los colegas de otras nacionalidades.

³ Observa que esta cantidad mínima no se obtiene derivando (porque no se trata de un problema de máximos y mínimos *relativos*, sino absolutos). Se llega a ella de forma mucho más económica: razonando.

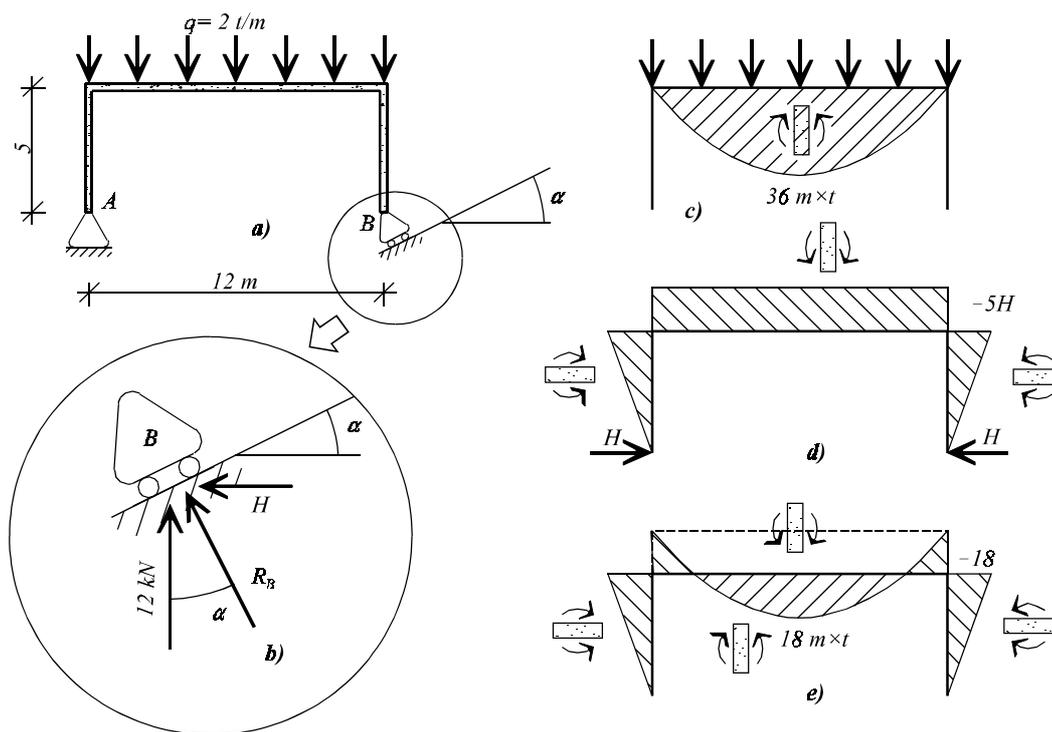


Figura 7.2
Estructura y diagramas del ejemplo 7.1.1

que determinar las distancias de los c.d.g.'s de las leyes de momentos a esta línea; además, tendríamos que calcular θ_A previamente. Resulta mucho más sencillo determinar su componente horizontal, y de ella, la inclinada:

$$u_h = \frac{2 \cdot 36}{3 EI} \cdot 12 \times 5 - 2 \cdot \frac{1 \cdot 18}{2 EI} \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{18}{EI} \cdot 12 \times 5 = 0,15 \times 10^{-3} \text{ m}$$

La componente inclinada será tal que $u_\alpha = u_h / \cos \alpha = 0,157 \times 10^{-3} \text{ m}$.

Enseñanzas

- Hemos conseguido el *efecto pórtico* sin introducir hiperestatismo: la reacción horizontal que nos reduce los momentos flectores en el dintel la hemos obtenido inclinando el apoyo deslizante.
- Hemos minimizado el momento flector en la estructura. El valor mínimo alcanzado se obtiene de igualar el máximo positivo al máximo negativo, en valor absoluto. En Resistencia rara vez se encontrarás los máximos/mínimos derivando.
- Hemos visto que los apoyos isostáticos nos dan precisamente las reacciones que el equilibrio exige. Nos hemos aprovechado ingeniosamente de esta bondad de la naturaleza.
- Hemos determinado el movimiento según una dirección a partir de otro más sencillo de calcular. En general se precisa de dos, según dos direcciones perpendiculares. (Aquí el segundo era nulo.)

Efecto pórtico

A pesar de lo que enseña el ejemplo anterior, lo normal es alcanzar con hiperestatismo el deseado *efecto pórtico*, que reduce los momentos flectores en el dintel en la cuantía $H \times h$. Si lo hacemos disponiendo un apoyo fijo, como en la figura 7.1d, la fuerza H nos la dará el terreno "gratis" —si es capaz de resistir este empuje— pero en una cantidad que puede resultar insuficiente o excesiva. Si queremos una H en cantidad precisa, *afinada*, la podemos conseguir proyectando cuidadosamente un cable o tirante, como vemos en el ejemplo que sigue.

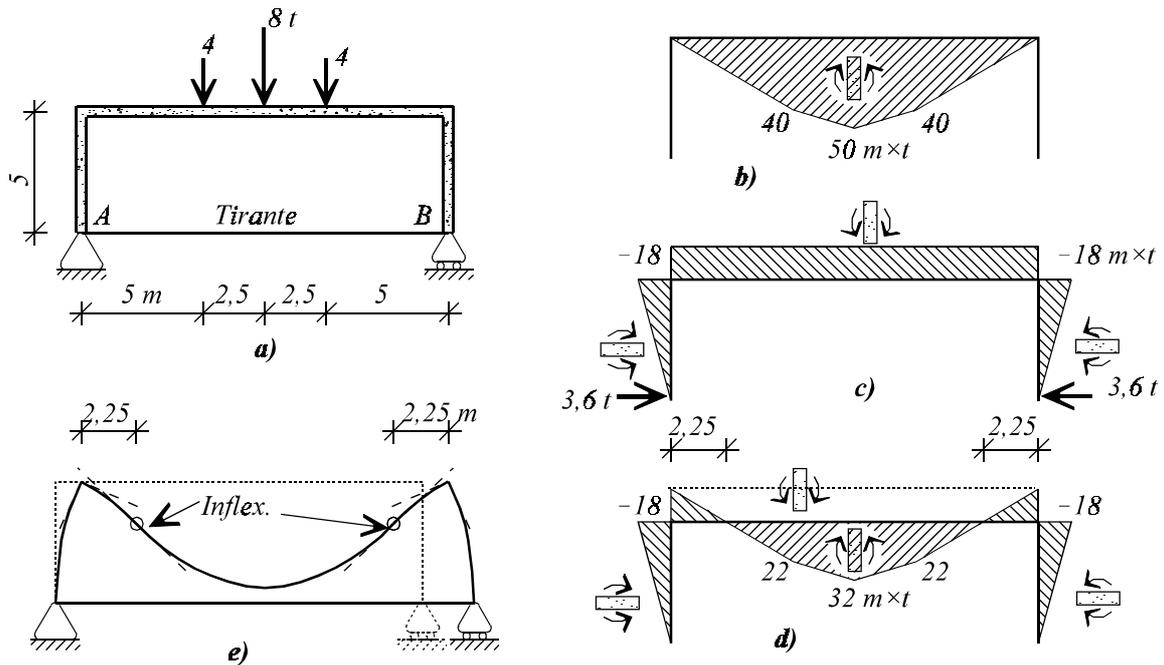


Figura 7.3
Estructura y diagramas del ejemplo 7.1.2

Ejemplo 7.1.2: Hiperestática afinada

El pórtico de la figura 7.3a está constituido por vigas de rigidez $EI = 500.000 \text{ t}\times\text{m}^2$ y un tirante cuyo material tiene una tensión admisible de 400 kp/cm^2 y un módulo de elasticidad de $2 \times 10^6 \text{ kp/cm}^2$. Se pide:

a) Determinar la sección mínima que ha de tener el tirante para que en ningún punto del pórtico el momento flector exceda de $32 \text{ m}\times\text{t}$.

b) En el supuesto anterior, dibujar la ley de momentos flectores y la deformada de la estructura, mostrando en ella la posición de los puntos de inflexión.

Con el fin de conseguir un mejor aprovechamiento de la resistencia del tirante, se dispone un tensor que permite modificar la longitud de aquél. Se pide, también:

c) Determinar la sección mínima del tirante y el acortamiento que hay que producir en el mismo para mantener las condiciones anteriores, esto es, que el máximo momento flector en el pórtico siga siendo de $32 \text{ m}\times\text{t}$. (Examen enero 94.)

a) En el pórtico isostático, sin tirante, la ley de momentos flectores sería la de la figura 7.3b. El máximo momento flector sería de $50 \text{ m}\times\text{t}$. Para reducir este valor hasta 32 es necesario "subir" la ley de momentos flectores $18 \text{ m}\times\text{t}$. Esto ha de conseguirse con la fuerza horizontal que transmite el tirante. Esta fuerza habrá de ser de $3,6 \text{ t}$ (figura 7.3c). Con esta fuerza, la ley de momentos flectores en el pórtico resulta ser la de la figura 7.3d.

Advertencia 1: la hiperestática no valdrá lo que tú quieras

No podemos colocar cualquier tirante entre los apoyos del pórtico y confiar en que nos dé precisamente las $3,6 \text{ t}$ que deseamos sin "persuadirle" a ello. Un cable de sección $A = 3600/400 = 9 \text{ cm}^2$ puede resistir esta fuerza pero no por ello nos la va a proporcionar.

Advertencia 2: la condición hiperestática no desaparece

La estructura es hiperestática de grado 1. Y, sin embargo, hemos hallado sus esfuerzos sin resolver ninguna ecuación hiperestática, solamente con nuestros "buenos deseos" de reducir los momentos flectores en el dintel una cantidad precisa. La condición hiperestática, empero, no ha desaparecido: es precisamente su cumplimiento lo que va a "persuadir" al tirante a darnos exactamente las $3,6 \text{ t}$ de fuerza horizontal con las que hemos contado para dibujar la ley de momentos flectores de la figura 7.3d. Esta ley (o sus dos componentes de las figuras 7.3b y c) nos dice que el apoyo B se moverá la cantidad:

$$u_B = \left(\frac{40}{EI} \frac{15+5}{2} + \frac{50-40}{2EI} 5 \right) \times 5 - 2 \frac{1}{2} \frac{18}{EI} 5 \frac{2}{3} 5 - \frac{18}{EI} 15 \times 5 = 0,95 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$u_B^{(ext)} = 4,25 \times 10^{-3} \text{ m} \quad u_B^{(H)} = H_B \times u_B^{(H_B=1)} = 3,30 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Por compatibilidad conyugal, el tirante extendido entre A y B habrá de alargarse esta misma cantidad bajo su fuerza de 3,6 t. Por consiguiente:

$$A_{\text{cable}} = \frac{T \times L}{E \times \delta_{AB}} = \frac{3,6 \times 15}{2 \times 10^7 \times 0,95 \times 10^{-3}} = 28,42 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 28,42 \text{ cm}^2$$

Ésta es la sección *mínima* pedida. (Es "mínima" porque con un sección mayor se reduciría aún más el momento máximo en el dintel. Tal vez podríamos llegar a reducirlo a la mitad de su valor inicial o isostático; a partir de ahí, "subir" más la ley de momentos flectores supondría crear un momento negativo mayor de la mitad, y eso, además, pagando por un cable más caro. Engordando el cable para hacerlo más rígido podríamos llegar, en el límite, a obtener el valor de H del apoyo rígido; para obtenerlo mayor hay que recurrir a procedimientos «traumáticos», como veremos en seguida.)

Podríamos haber escrito la ecuación hiperestática de manera automática, como aprendimos en (6.6-5):

$$\left[u_B^{(H_B=1)} + \frac{L}{EA} \right] H_B = -u_B^{(ext)}$$

y haberla empleado, de forma diferente a la habitual, entrando con $H_B = -3,6 \text{ t}$, para encontrar la sección necesaria de cable. Es importantísimo observar que *si no se usa la ecuación hiperestática para el cálculo de la estructura habrá que usarla para el dimensionamiento de la misma*.

b) La ley de momentos flectores la obtuvimos en la figura 7.3d. De ella se saca la posición de los puntos de inflexión y la deformada a estima concordante con las curvaturas que de ella se infieren (figura 7.3e).

c) Resulta triste para un ingeniero colocar un cable de 28,42 cm² cuando uno de 9 cm² sería suficiente para resistir. ¿Cómo podríamos persuadir a este último para que nos diera las 3,6 t de fuerza apetecidas? El cable de 0,9 cm² bajo la fuerza de 3,6 t se alargaría:

$$\delta'_{AB} = \frac{3,6 \times 15}{2 \times 10^7 \times 9 \times 10^{-4}} = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Este alargamiento es $3 - 0,95 = 2,05 \text{ mm}$ en exceso del necesario. Para conseguir la compatibilidad basta con cortar ese exceso.⁴ En el enunciado se nos dice que se hará mediante un aparato *tensor* que se colocará previamente en serie con el tirante. Aunque no nos lo pidan, juzgamos importante determinar cuál será la tensión que tendrá el cable *con la estructura descargada*. Si el cable es 2,05 mm más corto que lo que impone la geometría, entre la fuerza $H_B = -T$, que mueve el punto B del pórtico hacia la izquierda y su contraria la fuerza T , que alarga el tirante, deberán cerrar la holgura de 2,05 mm:

$$\left[\left(2 \frac{1}{2} \frac{5}{EI} 5 \frac{2}{3} 5 + \frac{5}{EI} 15 \times 5 \right) + \frac{15}{2 \times 10^7 \times 9 \times 10^{-4}} \right] T = 2,05 \times 10^{-3} \text{ m} \rightarrow T = 1,171 \text{ t}$$

$$u_B^{(H_B=1)} \qquad \qquad \qquad L/EA$$

Conoceremos que el tirante ha alcanzado la tensión debida cuando el punto B del pórtico se haya movido:

$$u_B = -T \times u_B^{(H_B=1)} = -1,073 \times 10^{-3} \text{ m}$$

hacia la izquierda. (La cantidad restante hasta cerrar la holgura es el alargamiento del cable bajo $T = 1,171 \text{ t}$.)

⁴ Afortunadamente, en Resistencia la armonía *conyugal* cable-estructura es más fácil de alcanzar que en otros ámbitos: basta con una ligera amputación en un miembro.

Aparte del procedimiento del tensor (que consiste en tirar de cable y pórtico simultáneamente con la pareja $\pm T$ de acción y reacción, pagando sólo por una), podríamos instalar el tirante, 2,05 mm más corto de lo debido, de otras dos maneras: (i) empujando el pórtico con $H_B = -2,236 t$, o (ii) estirando el cable con $T = 2,46 t$. En cualquier caso, una vez atado el cable a la estructura, al retirar la fuerza aplicada, éste quedará con la tensión remanente $T = 1,171 t$ encontrada para el caso de tirar de pórtico y cable simultáneamente. La ley de momentos flectores en la estructura será semejante a la de la figura 7.3c, corregida por el factor de escala $1,171/3,6 = 0,325$.

Enseñanzas:

- Hemos querido que la estructura sea hiperestática para reducir sus esfuerzos.
- Se trata de una estructura *afinada* (en el sentido de afinar un instrumento musical) porque hemos conseguido que la reacción hiperestática tenga el valor preciso que nos conviene.
- Nunca te vas a librar de satisfacer las ecuaciones hiperestáticas: cuando no las uses para determinar los esfuerzos, porque los quieras fijar a voluntad, las tendrás que emplear para dimensionar la estructura que cumpla tus designios.
- Hemos modificado la dimensión de un elemento resistente (haciéndola menor que lo exigido por la geometría) para aprovechar mejor su capacidad resistente.
- Por colocar un elemento resistente de dimensiones distintas de las geométricamente correctas en una estructura hiperestática, nos han aparecido esfuerzos (y tensiones) remanentes en la estructura descargada.
- Aunque puede haber diferentes procedimientos constructivos para instalar un miembro de dimensiones incorrectas en una estructura hiperestática, los esfuerzos remanentes en la estructura no dependen del procedimiento escogido.

Resumen:

- En un pórtico isostático como el de la figura 7.1a:
 - el dintel soporta toda la flexión de las cargas verticales, como viga biapoyada;
 - las jambas sólo sufren el esfuerzo axial de transmitir las reacciones verticales de viga.
- El *efecto pórtico* consiste en reducir la flexión en el dintel introduciendo reacciones horizontales que añaden una flexión negativa, contraria. Esto se consigue:
 - introduciendo hiperestatismo
 - de apoyo fijo, que da la reacción horizontal que corresponda;
 - de apoyo flexible o tirante, que puede dar la reacción horizontal deseable; o
 - inclinando el apoyo deslizante, sin introducir hiperestatismo.
- El momento flector resulta mínimo al igualar, en valor absoluto, el máximo positivo al máximo negativo; no resulta de minimizar una función.

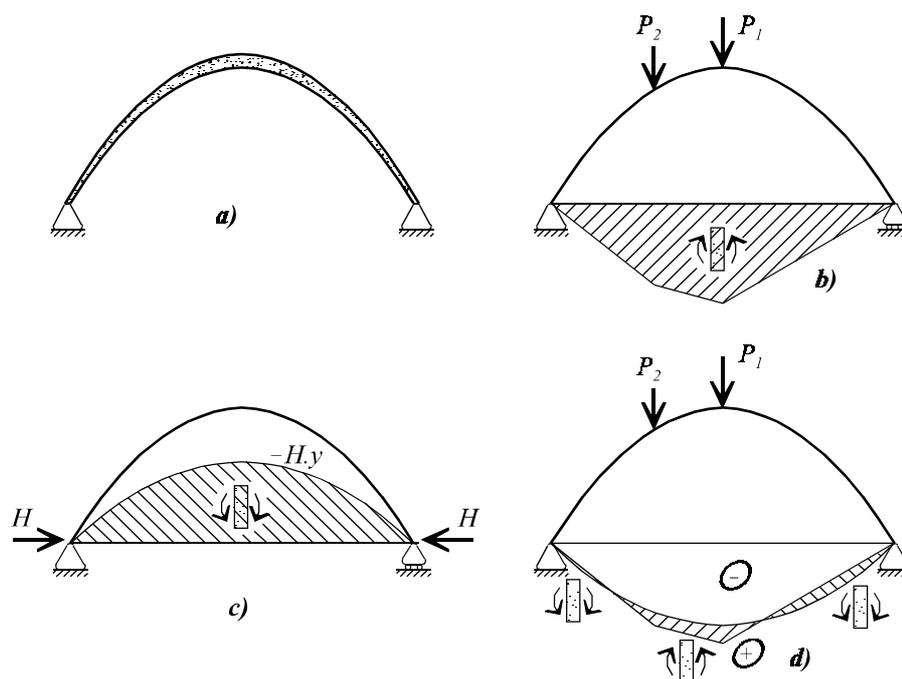


Figura 7.4
Arcos isostático e hiperestático

7.2 Arcos y antifuniculares

Efecto arco

Un arco es demasiado complicado de construir para hacerlo a la ligera. Si en un pórtico era sensato buscar el efecto hiperestático, en un arco es casi obligado buscar el *efecto arco*. Éste es, además, mucho más ventajoso todavía que en el caso anterior, por lo que sigue. Si mediante el efecto pórtico restábamos una cantidad $H \times h$ constante a los momentos flectores en el dintel, tanto allí donde convenía más como donde menos, mediante el efecto arco restamos una cantidad $H \times y$ que será mayor en el centro de la luz, donde hace más falta, y menor donde menos. La ley de momentos flectores en un arco biarticulado como el de la figura 7.4a se puede interpretar como la suma de la ley isostática o *de viga* de la figura 7.4b más la de la reacción horizontal de la figura 7.4c. El resultado final es como muestra la figura 7.4d: hemos reducido más el momento allí donde hacía más falta: la clave.

Dificultades de cálculo

(i) El cálculo de esfuerzos y movimientos exige evaluar integrales analíticamente, como ya sufrimos en el problema 4.5-7. Pero hay más: las integrales aparecen "acabadas" en ds en vez de dx ; en el arco circular esto no introduce dificultad alguna porque $ds = R \cdot d\phi$. Pero (ii) en cualquier otro arco $ds = dx / \cos\phi = dx(1+y'^2)^{-1/2}$, lo cual no tiene ninguna gracia. Cuando en un problema de examen trabajas con arcos no circulares, los profesores bondadosos te aliviarán esta dificultad (paradójicamente) introduciendo otra: una rigidez variable de la forma $EI(x) = EI_0 / \cos\phi^5$; con ella las integrales se transforman de la siguiente manera:

$$(7.2-1) \quad \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{F}(x) \frac{ds}{EI} = \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{F}(x) \frac{dx / \cos\phi}{EI_0 / \cos\phi} = \frac{1}{EI_0} \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{F}(x) dx$$

Así pues, cuando la rigidez de un arco varía con la secante, el *modus operandi* es sacar la rigidez en la clave EI_0 fuera de la integral, como si de inercia constante se tratara, y reemplazar tranquilamente $ds \rightarrow dx$.

⁵ Variación que, dicho sea de paso, es poco conveniente para este tipo de arco; por ello la utilizarás sólo en *soluciones académicas*, porque los profesores, a pesar de ser ingenieros, todavía seguimos obsesionados con evaluaciones analíticas de las integrales. En *soluciones profesionales* determinarás tú mismo la variación $EI(x)$ que te convenga y evaluarás las integrales numéricamente (los programas de cálculo lo harán por ti).

Antifuniculares

Tan eficientes podemos ser con un arco en el arte de reducir sus momentos flectores que los podemos anular por completo, con tal que nos dejen darle al arco la forma apropiada, que veremos. En efecto, la ley de momentos flectores en un arco es la siguiente expresión (que queremos anular):

$$(7.2-2) \quad \begin{aligned} M(x) &= M(x)^{(viga)} - H \cdot y = 0 \\ y(x) &= \frac{M(x)^{(viga)}}{H} \end{aligned}$$

Así, pues, no se producirán momentos flectores en el arco si:

- (i) *le damos una forma afín a la ley de momentos flectores que produciría su carga si actuara sobre una viga biapoyada, y*
- (ii) *lo apoyamos fijamente en sus extremos,*

lo cual es el sueño de todo ingeniero. A la curva $y(x)$ para la cual la carga $q(x)$ no produce momento flector en ningún punto le llamamos funicular o *antifunicular*. (El funicular es la estructura que trabaja exclusivamente en tracción; el antifunicular, en *compresión*.) Hay que fijarse en dos cosas:

- (i) La forma afín $y(x)$ del antifunicular puede ser más o menos peraltada (elevada) dependiendo del parámetro H de escala. Así, un arco muy levantado requerirá una reacción horizontal H pequeña para anular los momentos flectores; un arco rebajado, por el contrario, exigirá una H grande.⁶
- (ii) Si despreciamos la deformación por esfuerzo axial (cosa que es aceptable en arcos peraltados pero no, en arcos rebajados, donde la contribución de H al esfuerzo axial en cada sección, $H/\cos \phi$, es elevada) esta H , que anula los momentos flectores, anula también los movimientos de todos los puntos; en particular, el supuesto movimiento horizontal de los apoyos. Así pues, *H es precisamente la reacción de apoyo fijo*. A mí esto me parece una propiedad maravillosa. Observa lo siguiente:
 - los apoyos isostáticos dan la cantidad de reacción exacta que se precisa para el equilibrio;
 - los apoyos hiperestáticos dan la cantidad de reacción que les corresponde, sin atender a nuestras conveniencias. Sin embargo,
 - ▶ los apoyos fijos de un antifunicular dan precisamente la cantidad de reacción que anula los momentos flectores en la estructura.

Ejemplo 7.2.1: Antifunicular para carga triangular

Sobre el arco biarticulado de sección variable de la figura 7.5a actúa una carga repartida con la distribución triangular que se muestra en la propia figura. Despreciando los acortamientos debidos a los esfuerzos axiales en el arco, se pide:

- a) *Determinar la ecuación de la directriz del arco para que no aparezcan en él momentos flectores.*
- b) *En el caso de que en el arco anterior se sustituya el apoyo fijo en B por un apoyo deslizante atirantado, como se muestra en la figura 7.5b, obtener el esfuerzo en el tirante y la ley de momentos flectores en el arco (dibujada y acotada).*

Las rigideces de los miembros son: tirante, $EA = 16.500 \text{ t}$; arco, $EI \cos \phi = 200.000 \text{ t} \times \text{m}^2$, siendo ϕ el ángulo de la tangente a la directriz con la horizontal. (Examen enero 97.)

a) Tomando el origen de la coordenada z en el apoyo A, la ley de momentos flectores debida a la carga vertical (sin reacción horizontal, con apoyo deslizante en B) es:

$$\begin{aligned} V(z \leq 15) &= \frac{1}{2} \frac{z}{15} z = 7,5 \left(\frac{z}{15} \right)^2 \\ M(z \leq 15) &= 7,5z - V(z) \frac{z}{3} = 112,5 \left(\frac{z}{15} \right) - 37,5 \left(\frac{z}{15} \right)^3 \end{aligned}$$

Cambiando a la variable adimensional $\xi = z/15 = z/15 - 1$; $z/15 = \xi + 1$:

$$M(\xi) = 112,5(\xi + 1) - 37,5(\xi + 1)^3 = 37,5(2 - 3\xi^2 - \xi^3)$$

⁶ Observarás que los arcos de piedra, de medio punto en el románico, se peraltan aún más en el gótico inicial, para acabar en el renacimiento siendo en ocasiones tan audazmente rebajados, por alarde técnico, que producen intranquilidad.

La expresión anterior está deducida en el tramo $\xi < 0$. Para que dé el mismo valor cuando $\xi > 0$:

$$M(\xi) = 37,5(2 - 3\xi^2 + |\xi|^3)$$

La ecuación del antifunicular será:

$$y(\xi) = \frac{37,5}{H}(2 - 3\xi^2 + |\xi|^3)$$

cuya constante ajustaremos de modo que en $x = 0, y = 5$:

$$y(\xi = \frac{x}{15}) = 2,5(2 - 3\xi^2 + |\xi|^3)$$

Comprobación: En el cálculo anterior nos vimos obligados a tomar $H = 15$. Esta H representa la reacción horizontal en el arco. Como la reacción *total* debe llevar la dirección de la tangente:

$$\frac{V_A}{H} = \operatorname{tg} \phi_A = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=-15}$$

$$\frac{7,5}{15} \stackrel{?}{=} 2,5(-6\xi - 3\xi^2)_{\xi=-1} \frac{d\xi}{dx}$$

Se cumple.

b) En el caso de cable, la ecuación hiperestática es:

$$\left[u_B^{(H_B=1)} + \frac{L}{EA} \right] H_B = -u_B^{(ext)}$$

Aquí vamos a aplicar un *truco* que nos ahorrará algún cálculo. Si en la estructura de la figura 7.5c aplicáramos la carga exterior y $H_B = -15$ simultáneamente, sabemos, por propiedad de antifunicular, que el punto B se quedaría inmóvil. Así pues:

$$u_B^{(ext)} - 15 \times u_B^{(H_B=1)} = 0$$

$$u_B^{(ext)} = 15 \times u_B^{(H_B=1)}$$

Sólo calcularemos, pues, el desplazamiento debido a $H_B = 1$. La ley de momentos flectores será $M(x) = I \times y$:

$$u_B^{(H_B=1)} = \int_{x=-15}^{x=15} y \cdot y \frac{ds}{EI(x)} = \frac{2}{EI_0} \int_{x=0}^{x=15} y^2 dx = \frac{2 \times 2,5^2}{EI_0} \int_0^1 (2 - 3\xi^2 + \xi^3)^2 15 d\xi$$

en donde nos hemos aprovechado de la simetría de la función $y(x)$ para integrar sólo en la mitad de la luz y el *atajo*, descrito antes, de cambiar $ds/EI(x) \rightarrow dx/EI_0$. Resulta:

$$u_B^{(H_B=1)} = \frac{187,5}{200.000} \left[4\xi + \frac{9}{5}\xi^5 + \frac{1}{7}\xi^7 - 4\xi^3 + \xi^4 - \xi^6 \right]_{\xi=0}^{\xi=1} = 1,821 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\left(1,821 + \frac{30}{16,5} \right) H_B = -15 \times 1,821 \rightarrow H_B = -7,506 \text{ t}$$

La ley de momentos flectores será $(15 + H_B) \times y$ (porque $H_B = 15$ produce exactamente la misma ley que la carga triangular exterior, que anulábamos con $H_B = -15$):

$$M(x) = 18,735 \left[2 - 3 \left(\frac{x}{15} \right)^2 + \left| \frac{x}{15} \right|^3 \right]$$

que es máximo en la clave, con valor de 37,47 m×t.

Enseñanzas:

- Hemos aprendido a determinar la curva *antifunicular* de una carga dada.
- Hemos comprobado que para que no se produzcan momentos flectores en la estructura, el antifunicular debe estar fijo en sus extremos: sólo la reacción de apoyo fijo anula los momentos; la de apoyo flexible, no.
- Hemos hecho uso de la simplificación que introduce en un arco la rigidez variable de la forma $EI(x) = EI_0 / \cos \phi$.

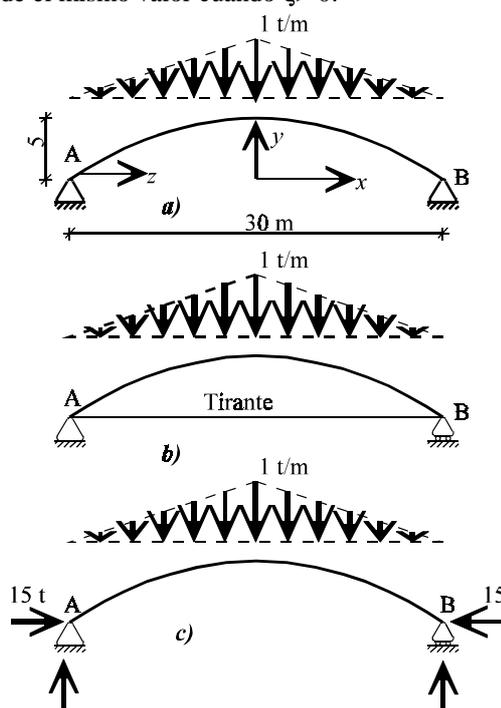


Figura 7.5
Estructura y diagramas del ejemplo 7.2.1

Antifuniculares familiares

Debes conocer los siguientes antifuniculares:

Carga	Antifuncular	Figura
Puntual, P	Estructura <i>bípeda</i> : línea quebrada en el punto de aplicación de la carga	7.6a
Uniforme, $q(\phi)$, normal a la directriz	Arco circular	7.6b
Uniforme vertical, $q(x)$, por unidad de proyección	Parábola de 2º grado	7.6c
Uniforme vertical, $q(s)$, por unidad de longitud	Catenaria (sin interés en esta asignatura)	7.6d

Si despreciamos las deformaciones por esfuerzo axial, el único esfuerzo en un antifuncular es el axial. Conviene no olvidar la perogrullada de que lleva en cada punto la dirección de la tangente al arco. La estructura tiene la *forma precisa* para que su tangente lleve la dirección de la resultante en cada punto.

Antifuncular bípodo

En la estructura *bípoda*, la carga puntual en el nudo se reparte entre las vigas de acuerdo con la regla del paralelogramo. Empleando el sistema coordenado de la figura 7.7a, el reparto es:

$$(7.2-3) \quad \left. \begin{aligned} N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 &= P \\ N_1 \sen \alpha_1 + N_2 \sen \alpha_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} N_1 &= P \frac{\sen \alpha_2}{\sen(\alpha_2 - \alpha_1)} \\ N_2 &= -P \frac{\sen \alpha_1}{\sen(\alpha_2 - \alpha_1)} \end{aligned} \right\}$$

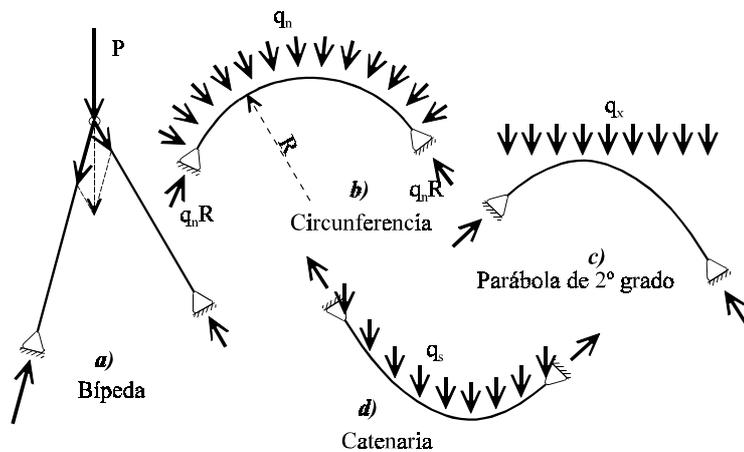


Figura 7.6 Antifuniculares familiares

Truco mental

Cuando trabajemos con presiones uniformes sobre una curva cualquiera, el cálculo de resultantes sale zumbando con sólo un poco de imaginación: en lugar de considerar la curva AB sometida a la presión p (figura 7.7b),

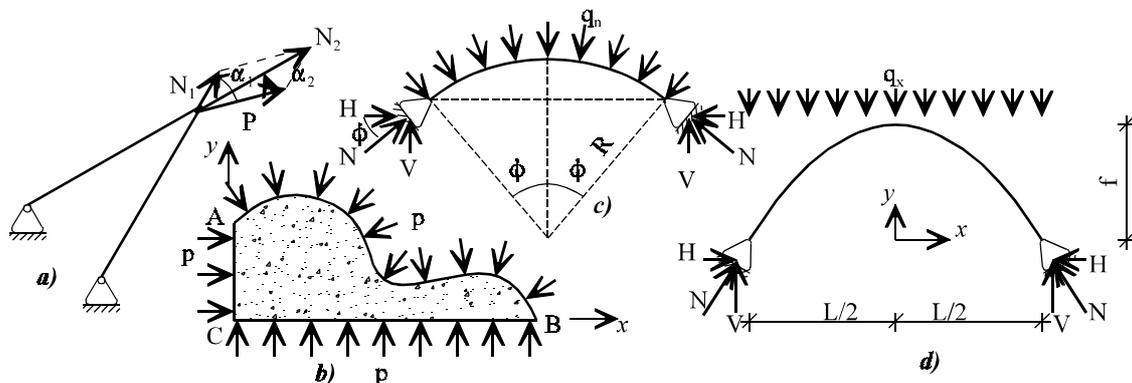


Figura 7.7 Ilustración de antifuniculares

consideramos el sólido imaginario ABC sumergido en un líquido, que a una cierta profundidad le presiona con p por todos los bordes. El cuerpo estaría en equilibrio en el seno del líquido, por lo que las resultantes según x e y sobre AB serían $H = p \times AC$, $V = p \times CB$:

$$(7.2-4) \quad \begin{aligned} H &= p \times \Delta y \\ V &= p \times \Delta x \end{aligned}$$

Antifunicular circular

Esta fórmula permite escribir para la figura 7.7c:

$$(7.2-5) \quad V = qR \operatorname{sen} \phi \rightarrow N = -qR$$

que dice que *en un arco circular sometido a carga normal uniforme el esfuerzo axial es* (i) constante $N = -qR$ e (ii) independiente de la abertura del arco.

Antifunicular parabólico

En el arco de 2° grado biarticulado con carga uniforme q_0 por unidad de proyección x (figura 7.7d), las reacciones verticales valen lo que en la viga biapoyada, $V = q_0 L/2$. Las horizontales serán tales que la resultante lleve la dirección de la tangente:

$$\frac{V}{H} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{4f}{L} \rightarrow H = \pm \frac{q_0 L^2}{8f}$$

La componente horizontal del esfuerzo axial es constante, H . Por consiguiente:

$$N(x) = -\frac{H}{\cos \phi} = -\frac{q_0 L^2}{8f} \sqrt{1 + \left(\frac{8f}{L^2} x\right)^2}$$

con la ordenada x medida desde el vértice de la parábola.

Variaciones

- Las propiedades del antifunicular se conservan aunque:
 - se empotre algún extremo, o
 - se introduzcan rótulas en la directriz (en número menor del que lo haría inestable) porque ningún punto tiene intención de girar.
- Las propiedades del antifunicular se pierden si:
 - se hace deslizante algún apoyo,
 - se hace flexible algún apoyo, (ejercicio anterior) o
 - se tienen en cuenta las deformaciones por esfuerzo axial (ejercicio siguiente), importantes en arcos rebajados $f/L < 1/5$.

Ejemplo 7.2.2: Antifunicular sin y con deformación por axial

El arco biarticulado de la figura 7.8a es de directriz circular. Su sección transversal es rectangular, de 0,5 m de ancho por 1 m de canto. El módulo de elasticidad del material es $E = 2 \times 10^6$ t/m². El arco soporta una carga radial uniforme $p = 1$ t/m.

En un cálculo preliminar se considera el arco inelongable, y bajo esta hipótesis se pide:

- a₁) Calcular el valor de las reacciones en el apoyo B.
- b₁) Calcular los esfuerzos en la sección de clave C.
- c₁) Determinar el valor del giro en el apoyo B.

Con objeto de comprobar el grado de aproximación de la hipótesis anterior, se efectuará un nuevo cálculo teniendo en cuenta la deformación por esfuerzo axial. De él se obtendrán de nuevo:

- a₂) El valor de las reacciones en el apoyo B.
- b₂) Los esfuerzos en la sección de clave C.
- c₂) El valor del giro en el apoyo B. (Examen junio 97.)

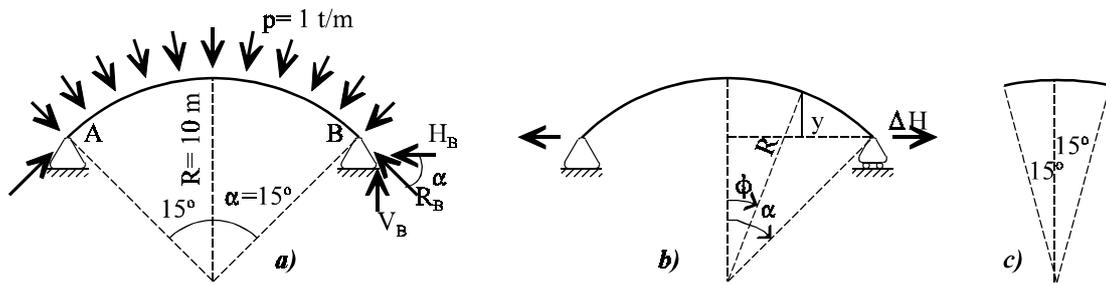


Figura 7.8
Estructura y diagramas del ejemplo 7.2.2

a₁) Por (7.2-5) $N = -q \cdot R = -10 \text{ t}$ en todos los puntos del arco. Siendo éste el único esfuerzo, las reacciones en el extremo B serán $V_B = -N \cdot \text{sen } \alpha = 2,59 \text{ t}$, $H_B = N \cdot \text{cos } \alpha = -9,66 \text{ t}$.

b₁) Por lo dicho antes, los esfuerzos en cualquier punto son: $M = 0$, $Q = 0$, $N = -10 \text{ t}$.

c₁) Despreciando la deformación por esfuerzo axial, no habrá deformaciones en el arco: $\theta_B = 0$.

a₂) Si tenemos en cuenta la deformación por esfuerzo axial, las reacciones horizontales del arco serán ligeramente distintas a las calculadas anteriormente: $H_B = -9,66 + \Delta H$. Los esfuerzos en la estructura serán los encontrados antes más los debidos a esta corrección ΔH ⁷; el movimiento u_B será de acuerdo con Bresse (4.4-7b):

$$M(\phi) = \Delta H \times y = \Delta H \times 10 (\cos \phi - \cos \alpha)$$

$$N(\phi) = -10 + \Delta H \cos \phi$$

$$u_B = 2 \int_0^\alpha \left(\frac{M(\phi)}{EI} y + \frac{N(\phi)}{EA} \cos \phi \right) 10 d\phi =$$

$$= \frac{20}{83.333} \left(100 \Delta H \int_0^\alpha (\cos \phi - \cos \alpha)^2 d\phi \right) + \frac{20}{10^6} \left(-10 \int_0^\alpha \cos \phi d\phi + \Delta H \int_0^\alpha \cos^2 \phi d\phi \right) = 0$$

$$u_B = 24 \times 10^{-3} \Delta H \left[\left(\frac{1}{2} \phi + \frac{1}{4} \text{sen } 2\phi \right) - 2 \text{sen } \phi \cos \alpha + \phi \cos^2 \alpha \right]_0^\alpha +$$

$$+ 0,02 \times 10^{-3} \left[-10 \text{sen } \phi + \Delta H \left(\frac{1}{2} \phi + \frac{1}{4} \text{sen } 2\phi \right) \right]_0^\alpha = 0$$

$$u_B = (0,00388 \Delta H - 0,0518 + 0,00512 \Delta H) \times 10^{-3} = 0 \Rightarrow \Delta H = 5,75 \text{ t}$$

Interpretación: El segundo sumando de u_B es el debido al axial que antes habíamos despreciado. El primer sumando es debido a la flexión producida por la corrección ΔH , y el tercero, a la deformación axial por la misma corrección.

Como se trata de un arco muy rebajado, $f/L = 1/15$, la influencia del esfuerzo axial es importante. (En realidad, las proporciones geométricas del arco son las de la figura 7.8c, que en las figuras anteriores habíamos falseado por razones didácticas.) Las reacciones verticales no cambian; las reacciones horizontales pasan a ser $H_A = -H_B = 9,66 - 5,75 = 3,91 \text{ t}$.

b₂) En la clave aparece un momento flector de $5,75 \times 0,341 = 1,96 \text{ m} \times \text{t}$. El nuevo esfuerzo axial es de $-4,25 \text{ t}$.

c₂) El primer estado de cargas no producía giro alguno en los apoyos. Todo el giro viene del ΔH :

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int_0^\alpha M(\phi) ds = \frac{1}{EI} \Delta H \times 100 \int_0^\alpha (\cos \phi - \cos \alpha) d\phi =$$

$$= \frac{1}{83.333} 5,75 \times 100 (\text{sen } \alpha - \alpha \cos \alpha) = 0,041 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

⁷ En el cálculo que sigue debes tener cuidado de poner tu calculadora en modo *radianes*, o de cambiar $\alpha = 15^\circ \cdot \pi/180$ allí donde el ángulo aparezca *exento*, es decir, sin afectar por una función trigonométrica.

Los cálculos anteriores nos sirven para estudiar la influencia de la deformación por esfuerzo axial según el peraltado relativo f/L del arco. En la tabla 7.1 se ven las variaciones de los siguientes parámetros: H_{N+M}/H_M y u_N/u_M . El primero es el cociente entre la reacción horizontal verdadera y la calculada sin considerar la deformación por axial. u_N/u_M es el cociente entre el desplazamiento horizontal producido por la deformación axial y el debido a la flexión, en la hipótesis de carga $H_B = 1$. Se observa que para $f/L > 0,2 = 1/5$ la influencia de la deformación por axial es efectivamente despreciable.

Enseñanzas:

- Hemos calculado las reacciones y los esfuerzos en un arco antifunicular producidos por su carga en dos hipótesis:
 - despreciando la deformación por esfuerzo axial, e
 - incluyendo la deformación por esfuerzo axial.
- Lo hemos resuelto en dos fases:
 - con los esfuerzos del antifunicular, conocidos *a priori*, que no dan movimientos, más
 - esfuerzos modificativos producidos por la variación ΔH respecto de la H del funicular.
- Al incluir la deformación por esfuerzo axial aparecen esfuerzos flectores, cortantes y variaciones de los axiles.
- Hemos visto que la deformación por esfuerzo axial sólo influye en arcos rebajados, con $f/L < 1/5$.

Resumen:

- Los arcos se proyectan para trabajar fundamentalmente a compresión.
- El cálculo de arcos no circulares se simplifica mucho haciendo su rigidez variable de la forma $EI(x) = EI_0 \cos \phi$. Con esta variación se puede reemplazar en las fórmulas:
 - $EI(x) \rightarrow EI_0$, como si fuera rigidez constante, y
 - $ds \rightarrow dx$, simultáneamente.
 No obstante, esta variación de la rigidez no es la adecuada para un buen proyecto del arco.
- Para una carga fija se puede encontrar una familia de arcos antifuniculares sobre los cuales no se producen esfuerzos de flexión (ni de cortante): sólo axiles.
 - La forma del antifunicular puede ser más o menos peraltada, a costa de producir un empuje horizontal menor o mayor.
 - Antifuniculares conocidos son:
 - ▶ la estructura *bípoda*, para una carga puntual;
 - ▶ el arco circular, para una presión uniforme;
 - ▶ la parábola de segundo grado, para una carga vertical uniforme por unidad de proyección.
- Si despreciamos la deformación por esfuerzo axial, el empuje horizontal que precisa un antifunicular para anular los momentos flectores es exactamente el que le proporcionan los apoyos fijos.
- La deformación por esfuerzo axial es realmente despreciable en arcos peraltados por encima de $f/L > 1/5$.
- En arcos muy rebajados la deformación por esfuerzo axial introduce esfuerzos correctores en el arco: axiles adicionales y esfuerzos de flexión.

Tabla 7.1
Influencia de la deformación por esfuerzo axial

$\alpha^{(0)}$	f/L	H_{N+M}/H_M	u_N/u_M	$\alpha^{(0)}$	f/L	H_{N+M}/H_M	u_N/u_M
5	0,022	0,008	107,651	55	0,260	0,993	0,007
10	0,044	0,125	6,706	60	0,289	0,995	0,005
15	0,066	0,425	1,318	65	0,319	0,996	0,003
20	0,088	0,701	0,414	70	0,350	0,997	0,002
25	0,111	0,852	0,168	75	0,384	0,998	0,002
30	0,134	0,923	0,080	80	0,420	0,998	0,001
35	0,158	0,957	0,043	85	0,458	0,999	0,001
40	0,182	0,974	0,025	90	0,500	0,999	0,001
45	0,207	0,984	0,015				
50	0,233	0,989	0,010				

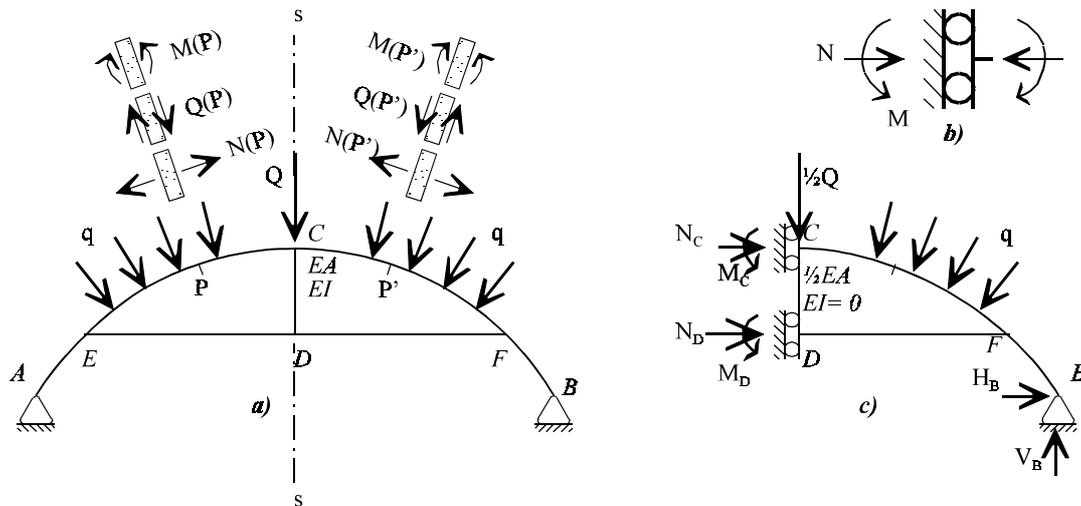


Figura 7.9 Estructura simétrica con carga simétrica

7.3 Simplificaciones de la simetría

Simetría en la geometría

Cuando la estructura sea *simétrica* en su geometría (cualesquiera que sean las cargas que actúen sobre ella) podemos aprovechar esta propiedad para simplificar el cálculo de sus esfuerzos, tensiones, deformaciones y movimientos. Distinguiremos tres casos según que la carga exterior sea:

- ▶ carga simétrica,
- ▶ carga antisimétrica,
- ▶ carga cualquiera.

Curiosamente, la más favorable suele ser la segunda; la tercera se puede descomponer siempre en la suma de las otras dos.⁸

Carga simétrica

Cuando tanto la estructura como la carga sean simétricas con relación a un cierto eje *s-s* que supondremos *vertical* (figura 7.9a), se puede afirmar que los desplazamientos de puntos *P* y *P'* situados simétricamente con relación al eje cumplirán:

$$(6.6-1a) \quad \begin{aligned} u_P &= -u_{P'} \\ v_P &= v_{P'} \\ \theta_P &= -\theta_{P'} \end{aligned}$$

La misma figura 7.9a ilustra que entre los esfuerzos se darán las siguientes relaciones:

$$(6.6-1b) \quad \begin{aligned} N(P) &= N(P') \\ Q(P) &= -Q(P') \\ M(P) &= M(P') \end{aligned}$$

Tabla 7.2 Movimientos y esfuerzos en puntos del eje de simetría de la carga

Movimientos		
u	v	θ
= 0	cualquiera	= 0
cualquiera	= 0	cualquiera
N	Q	M
Esfuerzos		

Cuando *P* y *P'* sean un mismo punto $S \equiv S'$ situado sobre el propio eje *s-s* de simetría, se habrán de cumplir igualmente las relaciones anteriores; aquéllas que exigen que un valor sea igual a su opuesto implicarán la nulidad de este valor. Por consiguiente, en los puntos del eje de simetría se tendrán los desplazamientos y esfuerzos que se indican en la tabla 7.2.

⁸ Las simplificaciones de la simetría son muy interesantes en tu situación académica, en la cual se requiere que resuelvas problemas en menos tiempo del necesario. Tu autor amigo, sin embargo, te recomienda no aprovecharlas en la vida profesional ya que no te va a interesar ahorrarle trabajo al computador a costa de aumentar el tuyo, y arriesgarte, además, a cometer errores.

A la vista de esta tabla, los puntos S del eje de simetría se comportan como si estuvieran coaccionados por una deslizadera como la de la figura 7.9b, que permite el libre desplazamiento vertical (sin esfuerzo cortante *novio* que lo coarte) pero no, el horizontal ni el giro (impedidos por el esfuerzo axial y el momento flector).

La receta para el cálculo de estructuras simétricas con carga simétrica es:

- cortar la estructura en dos por el eje de simetría,
- colocar deslizaderas sobre los puntos del eje de simetría,
- resolver solo media estructura y
- extender movimientos y esfuerzos a la otra media estructura de acuerdo con las fórmulas (6.6-1).

Es posible que al cortar la estructura por la mitad encontremos cargas y elementos resistentes (vigas o cables) dispuestos según el propio eje de simetría, que van a quedar cortados. En tal caso:

- de las cargas dispuestas según el eje de simetría se toma la mitad de su valor;
- de los elementos resistentes dispuestos según el eje de simetría:
 - se toma la mitad de su rigidez axial, $EA/2$, y
 - se desprecia su rigidez a flexión, $EI = 0$.⁹

Veamos cómo analizaríamos la estructura de la figura 7.9a de grado de hiperestatismo 7.¹⁰ Una vez simplificada como en la figura 7.9c su grado de hiperestatismo es 4: +3 coacciones exteriores, +1 por la barra (con rigidez $EA/2$) en que se convirtió la viga CD al perder su rigidez a flexión. Las incógnitas hiperestáticas podrían ser M_C , H_D , M_D y N_{CD} (las reacciones H_C , V_B y H_B serán las necesarias para mantener el equilibrio). Observa que se aplica la mitad de la carga P que actúa según el eje de simetría.

Al recomponer la estructura no hay que olvidarse de multiplicar por 2 el esfuerzo axial de la viga CD .

Asimetría en los apoyos

Con frecuencia una estructura no parece simétrica y, sin embargo, lo es a los efectos importantes, esfuerzos y deformaciones; sólo falla en los movimientos. Así, el arco de la figura 7.10a no es simétrico en desplazamientos u . No obstante, cuando prescindimos de los apoyos y colocamos en su lugar las reacciones correspondientes, figura 7.10b, la simetría resulta evidente. En esta segunda versión de la estructura podemos calcular esfuerzos y deformaciones aprovechando la simplificación de la simetría. Sólo a la hora de pasar a movimientos $u(x)$ debemos ocuparnos de dónde poner el cero u origen de éstos. Así, por ejemplo, si en la figura 7.10b, aprovechando la simetría, resultará una cierta $u(x)^{(sim)}$. Para hacer que estos desplazamientos se correspondan con los reales de la estructura de la figura 7.10a sólo hay que tomar la precaución de corregir con la constante de integración adecuada: $u(x) = u(x)^{(sim)} - u(x_A)^{(sim)}$. Si la estructura real hubiera sido la de la figura 7.10c, nos habría valido el mismo cálculo sin más que corregir $u(x) = u(x)^{(sim)} - u(x_B)^{(sim)}$.

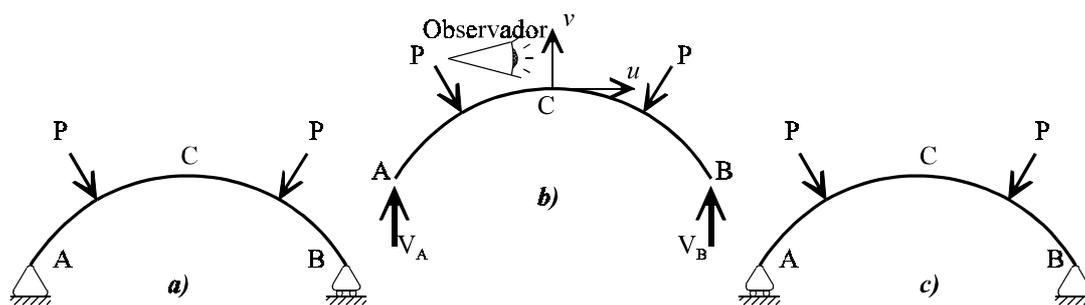


Figura 7.10
Estructura simétrica en todo menos en movimientos

⁹ Si el giro es nulo a lo largo de todo el elemento, también lo será su curvatura, y por tanto su momento flector.

¹⁰ El recuento puede hacerse de la siguiente manera: cortando las vigas CD y EF por alguna de sus secciones y liberando el movimiento horizontal del extremo B queda una estructura isostática con apéndices. Para recomponerla a su estado original necesitamos los tres esfuerzos de de cada una de las secciones cortadas y la reacción horizontal de B , para anular todo movimiento relativo entre los labios de los cortes y el movimiento horizontal de B .

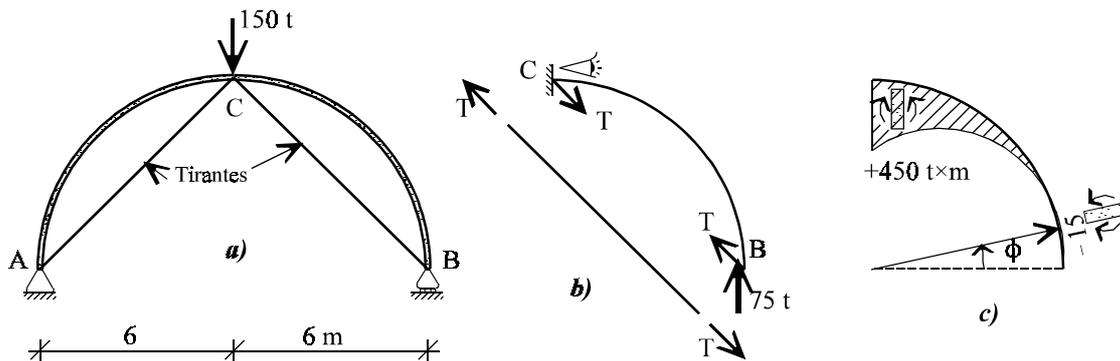


Figura 7.11 Estructura y diagramas del ejemplo 7.3.1

Ejemplo 7.3.1: Arco doblemente atirantado

El arco semicircular de la figura 7.11a, cuya rigidez es $EI = 20.000 \text{ t}\cdot\text{m}^2$, está doblemente atirantado entre AC y CB por tirantes de rigidez $EA = 4.500 \text{ t}$. El arco soporta la carga puntual en su clave que se muestra en la figura. Se pide:

- a) Determinar el esfuerzo axial en los tirantes.
- b) Dibujar la ley de momentos flectores en el arco.
- c) Calcular los movimientos de la clave C.

a) Se trata de una estructura con dos grados de hiperestatismo: los esfuerzos en los tirantes. La estructura no es simétrica en movimientos porque el punto A no se puede desplazar horizontalmente mientras que el B, sí. Sin embargo, si en lugar de apoyos aplicamos sus reacciones, 75 t hacia arriba en cada uno de ellos, se ve que la estructura es simétrica en esfuerzos. Por esta simetría, los esfuerzos en los tirantes deben ser iguales, por lo que el grado de hiperestatismo se reduce a 1. Calcularemos el esfuerzo T del modelo reducido de la figura 7.11b. En él, la clave C permanece inmóvil mientras que el punto B puede moverse verticalmente. Ello indica que para movimientos verticales debemos hacer la corrección $v^{(real)} = v^{(modelo)} - v_B^{(modelo)}$.

Calculamos los movimientos horizontal y vertical para el cuadrante de circunferencia empotrado en un extremo y con fuerzas $H = 1$ y $V = 1$ en el otro:

$$u_B^{(H=1)} = \int_0^{\pi/2} \frac{R \text{sen}\phi}{EI} R \text{sen}\phi R d\phi = \frac{\pi R^3}{4EI} = 8,482 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$v_B^{(H=1)} = \int_0^{\pi/2} \frac{R \text{sen}\phi}{EI} R(1 - \text{cos}\phi) R d\phi = \frac{R^3}{2EI} = 5,4 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$v_B^{(V=1)} = \int_0^{\pi/2} \frac{R(1 - \text{cos}\phi)}{EI} R(1 - \text{cos}\phi) R d\phi = \frac{3\pi - 8}{4} \frac{R^3}{EI} = 3,847 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$u_B^{(V=1)} = v_B^{(H=1)} = 5,4 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(La igualdad anterior viene de la simetría de las matrices de flexibilidad y será demostrada en el capítulo 8.) Los movimientos horizontal y vertical de B bajo las cargas de la figura 7.11b son:

$$\begin{pmatrix} u_B \\ v_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,432 & 5,4 \\ 5,4 & 3,847 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \begin{pmatrix} -T\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 75 + T\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 405 \\ 288,5 \end{pmatrix} \times 10^{-3} + T \begin{pmatrix} -2,144 \\ -1,098 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

En el cable $\delta_{BC} = T \times 6\sqrt{2}/EA = 1,886T \times 10^{-3} \text{ m}$. En el arco:

$$\delta_{BC} = (u_B - v_B) \frac{\sqrt{2}}{2} = (82,378 - 0,740T) \times 10^{-3} \text{ m}$$

Igualando ambos resulta $T = 31,37 \text{ t}$.¹¹

b) La ley de momentos flectores responde a la ecuación:

$$M(\phi) = \left(75 + T \frac{\sqrt{2}}{2}\right) R(1 - \cos\phi) - T \frac{\sqrt{2}}{2} R \sin\phi = 583,1(1 - \cos\phi) - 133,1 \sin\phi$$

El máximo es $450 \text{ m}\cdot\text{t}$ en la clave, el mínimo, $-15 \text{ m}\cdot\text{t}$ en $\phi = 12,86^\circ$ (figura 7.11c).

c) Por la corrección mencionada antes, $v_C^{(real)} = -v_B^{(modelo)}$:

$$v_C = - \left[5,4 \times 10^{-3} \left(-T \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 3,847 \times 10^{-3} \left(75 + T \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = -0,254 \text{ m}$$

La no simetría en movimientos horizontales implica que $u_C^{(real)} = u_B^{(modelo)}$:

$$u_C = 8,432 \times 10^{-3} \left(-T \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 5,4 \times 10^{-3} \left(75 + T \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0,338 \text{ m}$$

Enseñanzas:

- Hemos resuelto como simétrica una estructura que no lo es en movimientos, pero sí, en esfuerzos.
- La estructura era hiperestática de grado 2; la simetría lo redujo a 1.
- La ecuación hiperestática era de compatibilidad en movimiento según una dirección oblicua; éste se calculó a partir de los movimientos según dos direcciones perpendiculares.
- Para calcular los movimientos, (i) hemos supuesto al observador inmóvil en un cierto punto C; (ii) hemos calculado, respecto de aquél, los movimientos de puntos que los tenían conocidos y (iii) hemos aplicado las correcciones oportunas a los relativos para obtener los absolutos.

Carga antisimétrica

Cuando la estructura sea simétrica y la carga exterior, *antisimétrica* con relación a un mismo eje *s-s*, que supondremos *vertical* (figura 7.12a), se puede afirmar que los desplazamientos de puntos *P* y *P'* situados simétricamente con relación al eje cumplirán:

$$(6.6-2a) \quad \begin{aligned} u_P &= u_{P'} \\ v_P &= -v_{P'} \\ \theta_P &= \theta_{P'} \end{aligned}$$

La misma figura 7.12a ilustra que entre los esfuerzos se darán las siguientes relaciones:

$$(6.6-2b) \quad \begin{aligned} N(P) &= -N(P') \\ Q(P) &= Q(P') \\ M(P) &= -M(P') \end{aligned}$$

Tabla 7.3
Movimientos y esfuerzos
en puntos del eje de antisimetría de la carga

Movimientos		
u	v	θ
cualquiera	= 0	cualquiera
= 0	cualquiera	= 0
N	Q	M
Esfuerzos		

Cuando *P* y *P'* sean un mismo punto $S \equiv S'$ situado sobre el propio eje *s-s* de simetría, se habrán de cumplir igualmente las relaciones anteriores; aquéllas que exigen que un valor sea igual a su opuesto implicarán la nulidad de este valor. Por consiguiente, en los puntos del eje de simetría se tendrán los desplazamientos y esfuerzos que se indican en la tabla 7.3. A la vista de esta tabla, los puntos *S* del eje de simetría se comportan como si estuvieran coaccionados por un apoyo deslizante como el de la figura 7.12b, que permite el libre desplazamiento horizontal y el giro (sin esfuerzos *novios* axil y flector que lo coarten) pero impide el movimiento paralelo al eje.

¹¹ El lector ilustrado reconocerá que $\delta_{BC}^{(ext)} = 82,378 \times 10^{-3} \text{ m}$, $\delta_{BC}^{(T=1)} = 0,740 \times 10^{-3} \text{ m}$, $1/k = 1,886 \times 10^{-3} \text{ m}$. La ecuación que escribiríamos automáticamente sería: $[\delta_{BC}^{(T=1)} + 1/k] \times T = -\delta_{BC}^{(ext)}$, que da el resultado con el signo cambiado porque en ésta hemos supuesto implícitamente que *T* comprime el cable.

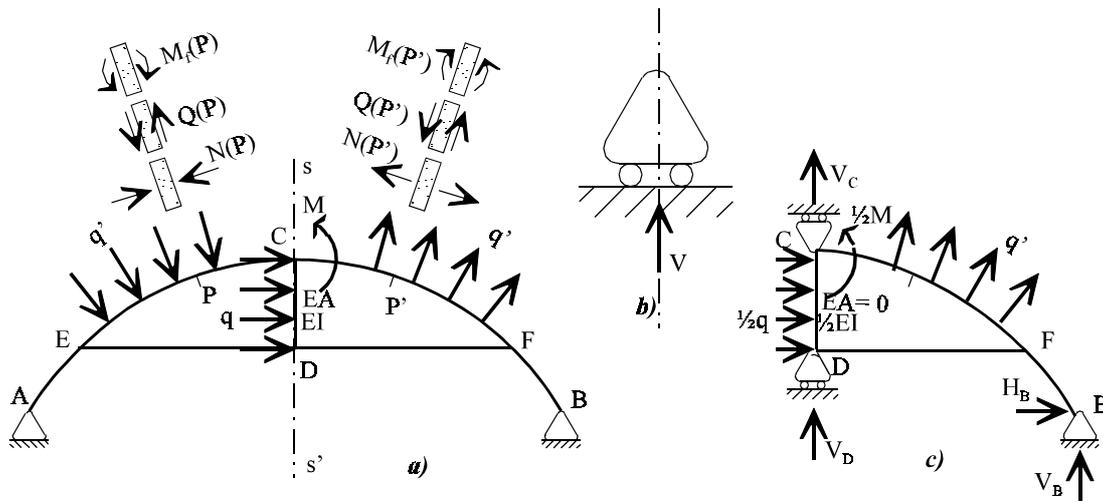


Figura 7.12 Estructura simétrica con carga antisimétrica

La receta para el cálculo de *estructuras simétricas con carga antisimétrica* consiste en:

- cortar la estructura en dos por el eje de simetría y quedarte con la mitad,
- colocar sobre los puntos del eje de simetría apoyos que deslizen perpendicularmente a él,
- resolver solo media estructura y
- extender movimientos y esfuerzos a la otra media estructura de acuerdo con las fórmulas (6.6-2).

Es posible que al cortar la estructura por la mitad encontremos cargas normales y momentos aplicados sobre el eje de simetría, y elementos resistentes (vigas o cables) dispuestos según el propio eje de simetría, que van a quedar cortados. En tal caso:

- de las cargas aplicadas sobre el eje de simetría y normales a él, y de los momentos aplicados sobre el propio eje, se tomará la mitad de sus valores;
- de los elementos resistentes dispuestos según el eje de simetría:
 - se toma la mitad de su rigidez a flexión, $EI/2$, y
 - se desprecia su rigidez a axil, $EA = 0$.

Para analizar la estructura de la figura 7.12a, la simplificamos como se muestra en la figura 7.12c. Su grado de hiperestatismo se reduce de 7 a 3. Las incógnitas hiperestáticas podrían ser V_D , $N^{(CD)}$ y M_D . Observa que se aplica la mitad de la carga normal a la viga CD y la mitad del momento exterior que actúa en C , y que se toma la mitad de la rigidez a flexión de la viga CD .

Ejemplo 7.3.2: Marco con arco

El marco de la figura 7.13a está compuesto por un arco semicircular y vigas rectas, piezas de sección constante $EI = 2,5 \times 10^6 \text{ t}\cdot\text{m}^2$ todas ellas. La única carga exterior es el momento aplicado en el punto D que se muestra en la figura. Se pide:

- a) Dibujar las leyes de esfuerzos.
- b) Determinar los movimientos del punto D. (Examen febrero 95.)

a) Se trata de una estructura simétrica con carga antisimétrica; se le aplican las simplificaciones correspondientes, como se muestra en la figura 7.13b. Consideramos como incógnita hiperestática la reacción vertical en el apoyo C, la cual calcularemos con la condición $v_C = 0$.

Debido a la carga exterior:

$$v_C^{(ext)} = -25 \times \theta_B^{(ext)} = 25 \times \frac{22,5 \times 25}{6EI} = 0,9375 \times 10^{-3} \text{ m}$$

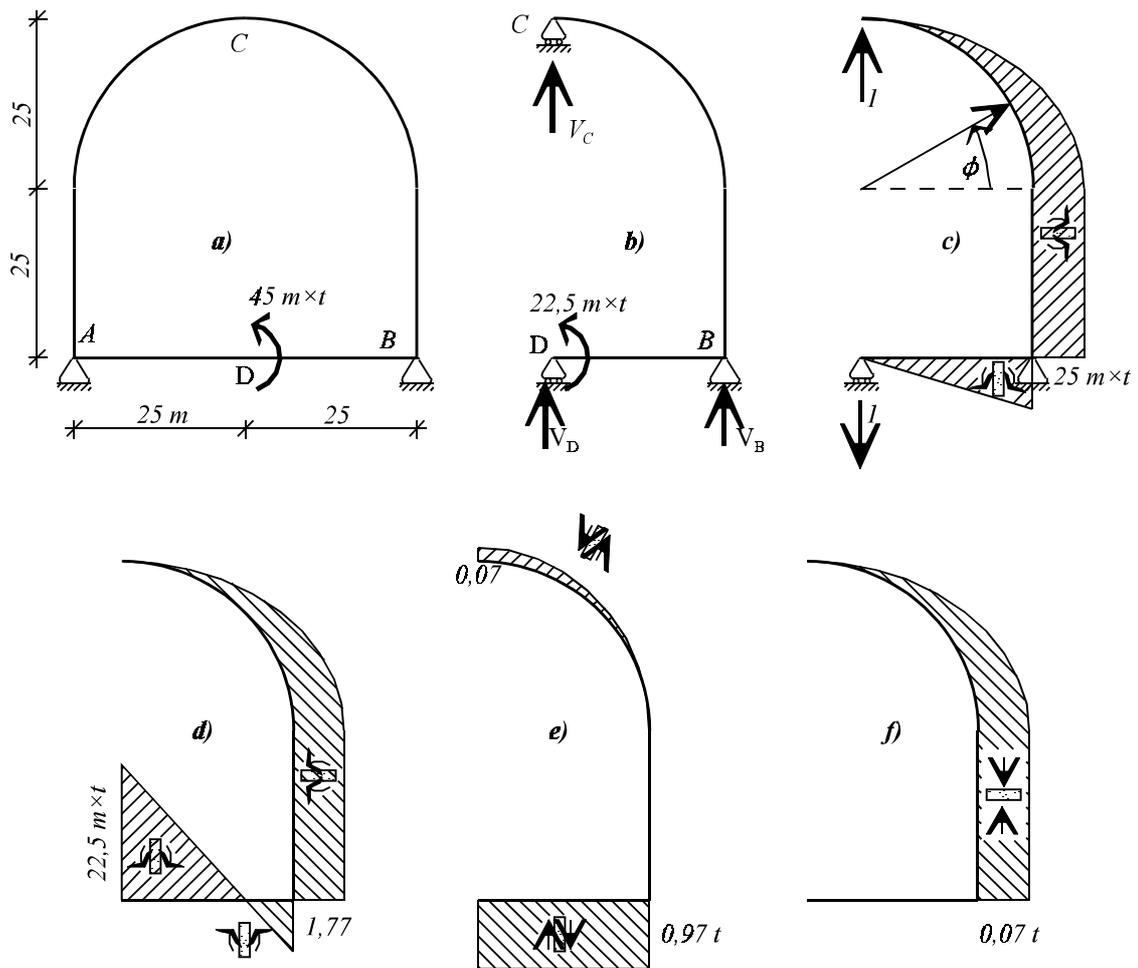


Figura 7.13
Estructura y diagramas del ejemplo 7.3.2

Debido a $V_C = I$, se tiene la ley de momentos flectores de la figura 7.13c. De ella:

$$\begin{aligned}
 v_C^{(V_C=1)} &= -\theta_B^{(V_C=1)} \times 25 + \frac{25}{EI} 25 \times 25 + \int_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} \frac{25 \cos \phi}{EI} 25 \cos \phi 25 d\phi = \\
 &= \frac{25^3}{EI} \left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{\pi}{4} \right) = 13,242 \times 10^{-3} \text{ m}
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, $V_C = -0,0708 \text{ t}$. Las leyes de esfuerzos se dan en las figuras 7.13d-f.

b) El punto D no tiene más movimiento que el giro:

$$\theta_D = \frac{22,5 \times 25}{3EI} + V_C \times \frac{25 \times 25}{6EI} = 0,072 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Enseñanzas:

- Hemos simplificado el análisis de una estructura simétrica con carga antisimétrica. Observamos que:
 - el momento exterior aplicado en el eje de simetría es una carga antisimétrica;
 - por estar aplicado en el eje tomamos la mitad;
 - el grado de hiperestatismo se redujo de 3 a 1.
- Los movimientos del punto C los hemos calculado a partir del apoyo más proximo, el B
 - teniendo en cuenta el giro θ_B en dicho apoyo,
 - que se calculaba como en una viga biapoyada.

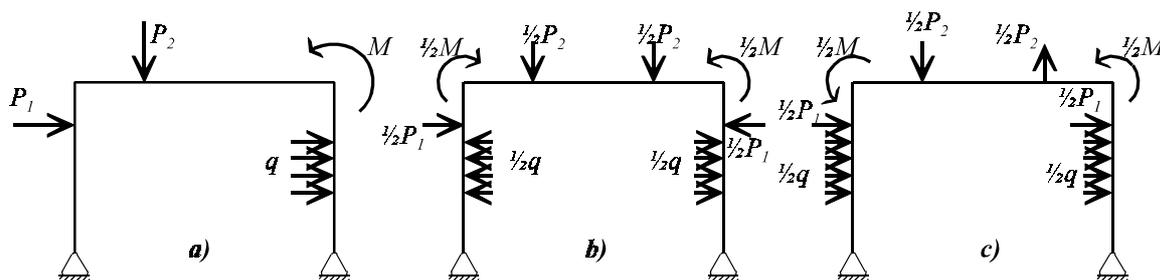


Figura 7.14
Descomposición de una carga cualquiera en suma de simétrica y antisimétrica

Carga cualquiera

Observaste en los ejemplos de las figuras 7.9 y 7.12 que su grado de hiperestatismo de 7 se reducía a 4 para carga simétrica, y a grado 3 para carga antisimétrica. Este es un resultado general: una estructura simétrica con carga simétrica reduce su grado de hiperestatismo a algo más de la mitad para carga simétrica, y a algo menos de la mitad, para carga antisimétrica, resultando siempre que la suma de estos grados iguala al original: $N_H = N_H^{(sim)} + N_H^{(ant)}$.

Además, cualquier carga se puede descomponer en suma de dos, una simétrica y otra, antisimétrica.¹² En la figura 7.14 se muestra un ejemplo de descomposición. Mediante este procedimiento se puede simplificar el cálculo de cualquier estructura geoméricamente simétrica.

Esta simplificación es muy efectiva para cálculo manual. En la estructura de nuestro ejemplo conseguimos pasar de un sistema de 7 ecuaciones a dos: uno de 4 y otro de 3. El ahorro es mayor del que se estima a primera vista: para formar el sistema de 7 ecuaciones necesitas calcular previamente 35 movimientos de la estructura isostática asociada; para el de 4, 14, y para el de 3, 9. El ahorro es tanto mayor cuanto más hiperestática es la estructura original. No obstante, en esta era del computador harás bien en olvidarte de esta simplificación tan pronto apruebes esta asignatura y sus clónicas.

Ejemplo 7.3.3: Marco volante

El marco de la figura 7.15a está formado por vigas de rigidez $EI = 10^5 \text{ t}\cdot\text{m}^2$. Se pide:

- a) Dibujar las leyes de momentos flectores y esfuerzos axiales.
- b) Determinar el movimiento de A respecto de B según la dirección AB.

a) Observa que la estructura está en equilibrio. El que carezca de apoyos no debe desorientarte: en cualquier estructura, en cuanto hayas calculado las reacciones, puedes borrar los apoyos. Internamente la estructura es hiperestática de grado 3. Descomponemos sus cargas en componentes simétrica y antisimétrica; la primera componente (figura 7.15b) no da más que esfuerzos axiales (dibujados sobre la propia figura 7.15b). La segunda componente es *doblemente antisimétrica* (figura 7.15c) respecto a ejes horizontal y vertical. Merced a esta doble antisimetría, el grado de hiperestatismo *efectivo* o de cálculo se reduce a cero, por lo que la ley de momentos flectores se dibuja directamente (figura 7.15d).

b) Para calcular el movimiento relativo entre A y B según la propia dirección AB, consideramos las leyes de momentos flectores entre ambos puntos:

$$u_{AB} = \frac{1}{EI} \int_A^B M(\xi) z(\xi) d\xi = -\frac{1}{2} \frac{15}{EI} 3 \times 1 \text{ sen } \gamma + \frac{1}{2} \frac{15}{EI} 3 \times 5 \text{ sen } \gamma + \frac{1}{2} \frac{15}{EI} 2 \left(4 - \frac{1}{3} \right) \text{ cos } \gamma - \frac{1}{2} \frac{15}{EI} 2 \times \frac{1}{3} 2 \text{ cos } \gamma = \frac{83,205}{EI} = 0,832 \times 10^{-3} \text{ m}$$

en donde $\gamma = 33,69^\circ$ es el ángulo de la diagonal con el lado mayor (utilizado para medir las distancias $z(\xi_g)$ de los c.d.g. de los triángulos de momentos flectores a dicha diagonal).

¹² Igual que en cálculo podías descomponer una función $f(x) = s(x) + a(x)$ en suma de una simétrica $s(x) = s(-x)$ más otra antisimétrica $a(x) = -a(-x)$: $f(x) = [f(x) + f(-x)]/2 + [f(x) - f(-x)]/2$.

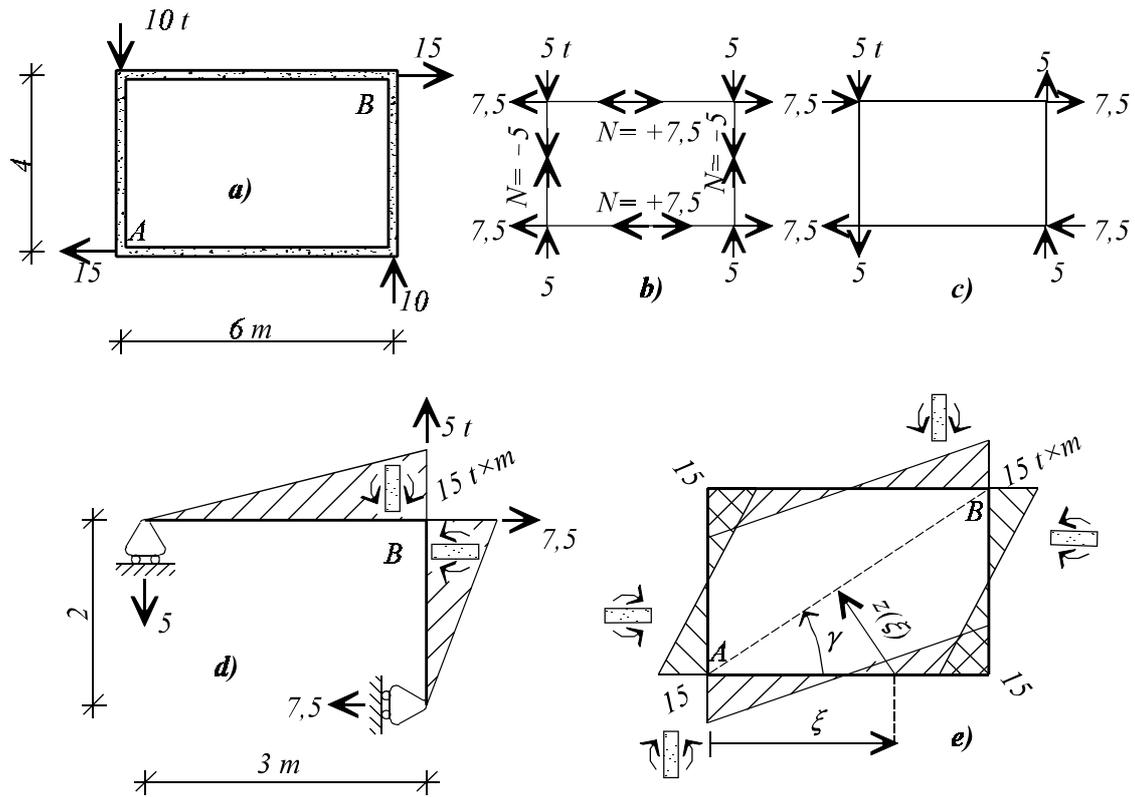


Figura 7.15
Estructura y diagramas del ejemplo 7.3.3

Enseñanzas:

- Hemos resuelto una estructura *volante*, en equilibrio sin apoyos externos. Esto no es ningún milagro: reemplazando los apoyos por sus reacciones correctamente calculadas, todas las estructuras son así.
- Descomponiendo en casos de carga simétrico y antisimétrico, hemos reducido a cero el grado efectivo de hiperestatismo de una estructura de grado 3.
- Observamos que, despreciando la deformación por esfuerzo axial, las cargas aplicadas en nudos producen sólo esfuerzos axiales.
- No pudiendo calcular movimientos absolutos, hemos calculado los movimientos relativos entre dos puntos de la estructura considerando el efecto de la ley de momentos flectores sobre las vigas que los unen.

Resumen:

- Las simplificaciones contempladas en este apartado se refieren tan sólo a estructuras **con simetría geométrica**.
- Si la carga exterior es *simétrica*, se puede reducir su hiperestatismo a *poco más de la mitad* de la siguiente manera:
 - Se considera la mitad de la geometría con deslizaderas en los puntos situados sobre el eje de simetría,
 - se consideran las mismas rigideces EA y EI de la estructura original, excepto que,
 - de los elementos resistentes dispuestos sobre el eje de simetría se toma la mitad de la rigidez axial, $EA/2$, y rigidez nula a flexión, $EI=0$.
 - Se aplican las cargas exteriores en su totalidad, excepto que
 - de las cargas que actúan según el eje de simetría se toma la mitad de su valor.
 - Una vez resuelta la estructura, se extienden los resultados a la otra mitad, simétricamente.
- Para la hipótesis de carga simétrica es suficiente que la estructura sea simétrica después de reemplazar los apoyos por las reacciones que proporcionan (simétrica en esfuerzos y deformaciones, aunque no, en movimientos).
- Si la carga exterior es *antisimétrica*, se puede reducir su hiperestatismo a *menos de la mitad*, de la siguiente manera:
 - Se considera la mitad de la geometría, y se colocan apoyos deslizantes en los puntos situados sobre el eje de simetría,
 - se consideran las mismas rigideces EA y EI de la estructura original, excepto que,
 - de los elementos resistentes dispuestos sobre el eje de simetría se toma la mitad de la rigidez a flexión, $EI/2$, y rigidez axial nula, $EA=0$.
 - Se aplican las cargas exteriores en su totalidad, excepto que:
 - de (i) los momentos aplicados sobre el eje de simetría, y (ii) de las cargas normales al eje de simetría se toma la mitad de su valor original.
 - Una vez resuelta la estructura, se extienden los resultados a la otra mitad, antisimétricamente.
- Si la carga no es simétrica ni antisimétrica se puede descomponer en suma de tales,
 - lo cual reduce el número de movimientos a calcular para los sistemas de ecuaciones.

7.4 Problemas de pórticos y arcos

Problema 7.4.1: Marco simétrico

El marco de la figura 7.16a es de sección constante de rigidez $EI=1 \times 10^6 \text{ t}\cdot\text{m}^2$ y está sometido a la carga puntual de 50 t aplicada en el punto M que se muestra en la figura. Se pide:

a) Dibujar las leyes de esfuerzos de todas las vigas que componen el marco.

b) Obtener el desplazamiento vertical del punto M. (Examen febrero 95.)

a) La estructura es simétrica en esfuerzos porque los apoyos A y A', aunque distintos, transmiten igual reacción vertical y ninguna horizontal (ver figura 7.10). Esta simetría garantiza que los nudos son intraslacionales; podemos aplicar el método de viga continua. Al descomponer en vigas simples (figura 7.16b) tomamos ventaja de la simetría especificando el mismo valor del momento flector incógnita en nudos situados simétricamente. Así, aunque la estructura es hiperestática de grado 3 (por la viga A-A' en exceso), la simetría reduce su grado a 2. Tomamos como incógnitas los momentos M_1 y M_2 de la figura 7.16b y escribimos las igualdades de giros:

$$\left. \begin{aligned} \theta_A^{(d)} &\equiv -\frac{50 \times 15 \times 15 \times 45}{6 \times 30 EI} - \frac{M_1 \cdot 30}{2 EI} = \frac{M_1 \cdot 15}{3 EI} + \frac{M_2 \cdot 15}{6 EI} \equiv \theta_A^{(i)} \\ \theta_B^{(i)} &\equiv -\frac{M_1 \cdot 15}{6 EI} - \frac{M_2 \cdot 15}{3 EI} = \frac{M_2 \cdot 30}{2 EI} \equiv \theta_B^{(d)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} M_1 &= -142,86 \text{ m}\cdot\text{t} \\ M_2 &= 17,86 \text{ m}\cdot\text{t} \end{aligned}$$

Las leyes de esfuerzos flectores, cortantes y axiles se dibujan en las figuras 7.16c-e. (Si el apoyo A' hubiera sido fijo, el axil de la viga A-A' habría sido nulo y ese esfuerzo, absorbido por los apoyos como reacciones horizontales.)

b) La flecha del punto M es debida a la carga puntual y al momento flector uniforme:

$$v_M = \frac{-50 \times 30^3}{48 EI} + \frac{142,86 \times 30^2}{8 EI} = -12,053 \times 10^{-3} \text{ m}$$

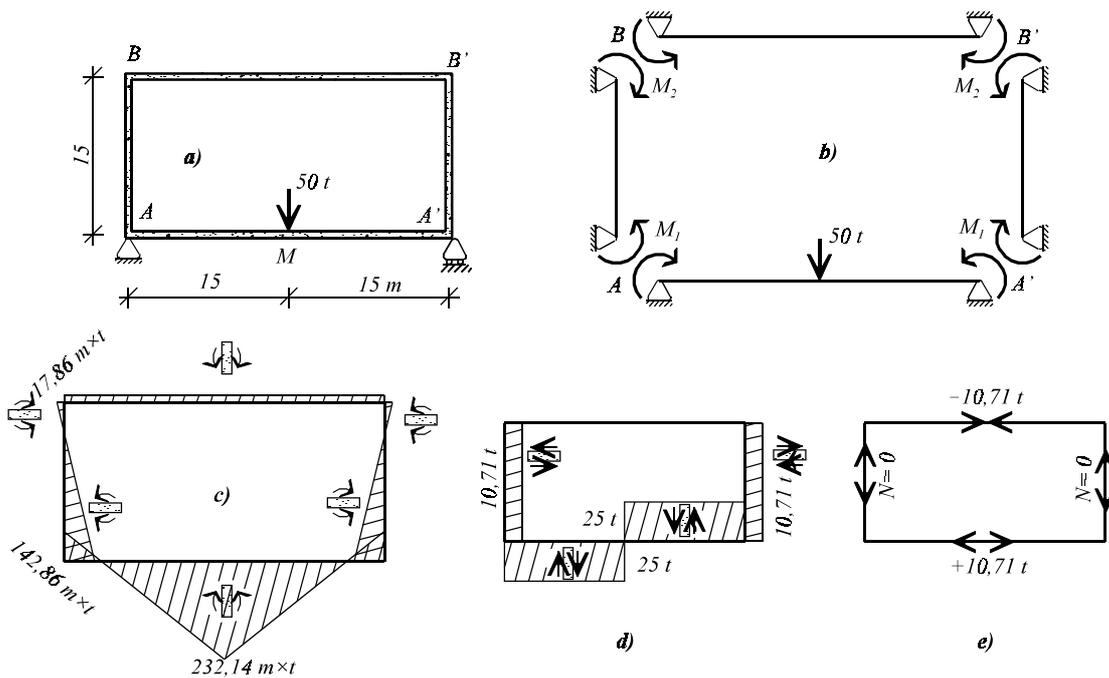


Figura 7.16 Estructura y diagramas del problema 7.4.1

Enseñanzas:

- La simetría (de geometría y cargas) del pórtico nos ha permitido:
 - analizarlo como intraslacional (método de viga continua) y
 - reducir el número de hiperestáticas de 3 a 2.
- No hemos analizado sólo media estructura porque perderíamos la ventaja del método de la viga continua.

Problema 7.4.2: Marco con carga general

El marco de la figura 7.17a está formado por cuatro vigas de sección constante, rectangular de 0,30 m de ancho por 0,60 m de canto. El módulo de elasticidad de su material es $E = 200.000 \text{ kp/cm}^2$. Sobre el marco actúan las cargas puntual y uniforme que se muestran en la propia figura. Se pide:

- a) Obtener los esfuerzos axiales en todas las vigas del marco.
- b) Determinar los movimientos horizontal y giro del punto M.

a) Como buen marco, es una estructura hiperestática de grado 3. (Si prescindieramos de la viga AB, que conduce tres esfuerzos, la estructura sería isostática.) Como la estructura es geoméricamente simétrica (excepto en sus movimientos horizontales), la resolveremos descomponiendo su carga en simétrica (figura 7.17b), con grado de hiperestatismo 2, y antisimétrica (figura 7.17c) con grado de hiperestatismo 1: total 3 como en el caso original.

Resolveremos el caso simétrico, intraslacional, por el método de viga continua (figura 7.17d):

$$\left. \begin{aligned} \theta_A^{(a)} &= -\frac{0,5 \times 8^3}{24EI} - \frac{M_1 \cdot 8}{2EI} = \frac{M_1 \cdot 4}{3EI} + \frac{M_2 \cdot 4}{6EI} \equiv \theta_A^{(a)} \\ \theta_C^{(a)} &= -\frac{M_1 \cdot 4}{6EI} - \frac{M_2 \cdot 4}{3EI} = \frac{M_2 \cdot 8}{2EI} - \frac{2 \times 2 \times 6 \times 14}{6 \times 8EI} - \frac{2 \times 6 \times 2 \times 10}{6 \times 8EI} \equiv \theta_C^{(a)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} M_1 &= -2,317 \text{ m} \times t \\ M_2 &= 2,540 \text{ m} \times t \end{aligned}$$

Con estos resultados y observando que los esfuerzos axiales en el extremo de una viga son los cortantes en los de la viga adyacente, se tiene, para la componente simétrica (figura 7.17d):

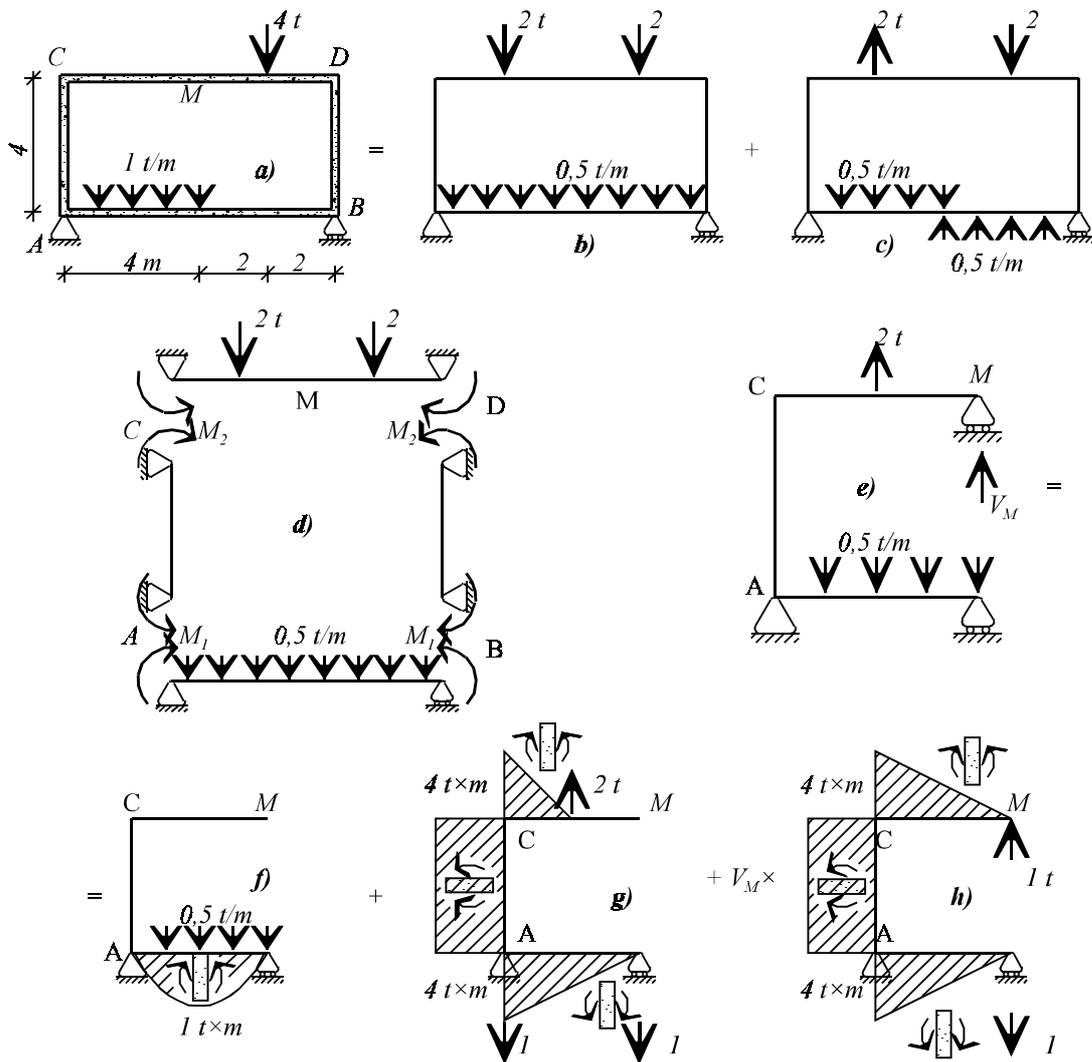


Figura 7.17 Estructura y diagramas del problema 7.4.2

$$N_{AB} = Q_A^{(AC)} = \frac{M_1 - M_2}{L_{AC}} = -1,214 t$$

$$N_{AC} = N_{BD} = Q_C^{(CD)} = -2 t$$

$$N_{CD} = -Q_C^{(AC)} = 1,214 t$$

El caso antisimétrico se resuelve con la simplificación de la figura 7.17e. Tomamos como incógnita hiperestática la reacción V_M . El movimiento v_M tiene tres componentes: la de la carga uniforme (figura 7.17f), la de la carga puntual (figura 7.17g) y la de $V_M = 1$ (figura 7.17h), con los siguientes valores:

$$v_M^{(q)} = \theta_A^{(q)} \times 4 = -\frac{0,5 \times 4^3}{24EI} \times 4 = -\frac{5,333}{EI} \text{ rad}$$

$$v_M^{(P)} = \frac{4 \times 4}{3EI} \times 4 + \frac{4}{EI} \times 4 \times 4 + \frac{1}{2EI} \times 4 \times 2 \left(4 - \frac{1}{3} \right) = \frac{98,667}{EI} \text{ rad}$$

$$v_M^{(V_M=1)} = \frac{4 \times 4}{3EI} \times 4 + \frac{4}{EI} \times 4 \times 4 + \frac{1}{2EI} \times 4 \times \frac{2}{3} \times 4 = \frac{106,667}{EI} \text{ rad}$$

Para que $v_M = 0$ deberá ser $V_M = -0,875 t$.

Los axiles en este caso antisimétrico son $N_{AB} = 0$, $N_{CD} = 0$, $N_{AC} = 2 - V_M = 1,125$, $N_{BD} = -1,125$. Para la carga total, los esfuerzos axiles resultantes serán: $N_{AB} = -1,214$, $N_{CD} = +1,214$, $N_{AC} = -0,875$, $N_{BD} = -3,125$.

b) Si nos hubieran pedido el movimiento v_M lo tendríamos que obtener del caso simétrico: de la viga CD de la figura 7.17d. Los movimientos horizontal u_M y giro θ_M , en cambio, se producen sólo en el caso antisimétrico:

$$\theta_M = -\frac{0,5 \times 4^3}{24EI} + \frac{4 \times 4}{3EI} + \frac{4}{EI} \cdot 4 + \frac{1}{2} \frac{4}{EI} \cdot 2 + V_c \left(\frac{4 \times 4}{3EI} + \frac{4}{EI} \cdot 4 + \frac{1}{2} \frac{4}{EI} \cdot 4 \right) = -\frac{1,667}{EI} = -0,154 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$u_M = \frac{0,5 \times 4^3}{24EI} \cdot 4 - \frac{4 \times 4}{3EI} \cdot 4 - \frac{4}{EI} \cdot 4 \times 2 - V_c \left(\frac{4 \times 4}{3EI} \cdot 4 + \frac{4}{EI} \cdot 4 \times 2 \right) = -\frac{1,333}{EI} = -0,123 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Enseñanzas:

- Hemos resuelto un marco simétrico con carga cualquiera empleando la simplificación de descomponer ésta en sus componentes simétrica y antisimétrica.
- No nos ha importado que los apoyos no fueran exactamente simétricos (el de la izquierda era fijo y el de la derecha, deslizante): al no haber reacciones horizontales, los dos podrían haber sido deslizantes.
- En el caso simétrico hemos preferido utilizar el método de viga continua, sin reducir la estructura a la mitad pero aprovechando la simetría de los momentos de nudo.
- En el caso antisimétrico hemos analizado solo media estructura, con apoyos deslizantes en los puntos de corte.
- Como siempre, el caso antisimétrico tenía menos incógnitas hiperestáticas que el simétrico, y la suma de ambos era igual al grado de hiperestatismo original.
- Ciertos esfuerzos y movimientos se manifestaron sólo en el caso simétrico y otros, sólo en el antisimétrico: conviene estudiar qué nos piden porque en ocasiones nos podremos ahorrar el análisis de algún caso.
- Hemos calculado los movimientos de un punto a partir de su apoyo más próximo, obteniendo antes el giro en ese apoyo.

Problema 7.4.3: Marco «Wankel»

La estructura de la figura 7.18a está formada por tres arcos de circunferencia cuyos centros son los vértices del triángulo equilátero ABC. Los tres arcos están unidos entre sí por rótulas. Su rigidez es $EI = 20.000 \text{ t} \times \text{m}^2$. Se pide:

a) Dibujar y acotar la ley de momentos flectores.

b) Calcular el movimiento relativo de B respecto de A en la propia dirección AB.

a) Se trata de una estructura isostática. Esto se pone claramente de manifiesto al aplicar la simplificación de la simetría respecto del eje vertical CD (figura 7.18b). La fuerza horizontal en C ha de ser tal que, junto con la carga puntual en ese punto, den momento nulo en B:

$$H_C = H = \frac{5 \times 4}{8\sqrt{3}/2} = 2,887 \text{ t}$$

Por equilibrio horizontal: $H_D = -H = -2,887 \text{ t}$. Anulando el momento flector en C: $M_D = H \times 8 = 23,094 \text{ m} \times \text{t}$.

Sobre el arco BC la ley de momentos flectores es:

$$M(\omega) = 2,887 \left(8 \frac{\sqrt{3}}{2} - 8 \text{sen} \omega \right) - 5(8 \text{cos} \omega - 4) = 40(1 - \text{cos} \omega) - 23,094 \text{sen} \omega$$

El máximo de esta expresión se tiene para $\omega = 30^\circ$ y es $M = -6,188 \text{ m} \times \text{t}$. Con los valores encontrados se dibuja la ley de momentos flectores de la figura 7.18c.

b) Sobre el arco DB la expresión de la ley de momentos flectores es:

$$M(\phi) = 2,887 \times 8 \text{cos} \phi - 5 \times 8 \text{sen} \phi$$

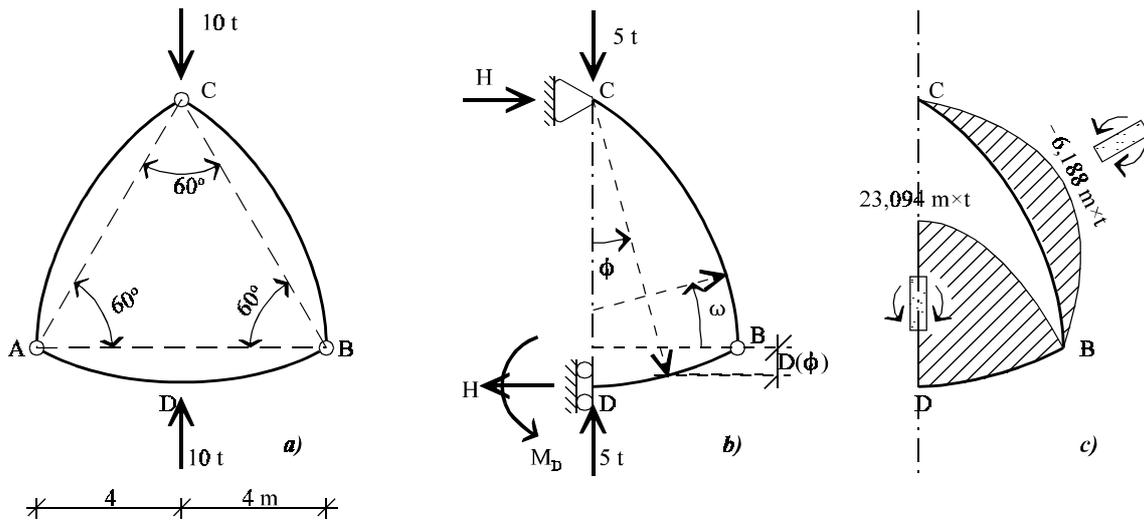


Figura 7.18
Estructura y diagramas del problema 7.4.3

Los puntos A y B se separan:

$$\begin{aligned} \delta_{AB} &= 2 \int_D^B \frac{M(\phi)}{EI} D(\phi) R d\phi = \frac{2}{EI} \int_0^{\pi/6} (23,094 \cos \phi - 40 \operatorname{sen} \phi) (8 \cos \phi - 4\sqrt{3}) 8 d\phi = \\ &= \frac{16}{EI} \left[184,75 \left(\frac{\pi}{16} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) + 80 \left(\cos \frac{\pi}{3} - 1 \right) - 160 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - 277,13 \left(\cos \frac{\pi}{6} - 1 \right) \right] = \\ &= \frac{87,926}{EI} = 4,39 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

Enseñanzas:

- Se trataba de una estructura isostática: la simplificación de la simetría no nos ha ahorrado ningún cálculo.
- El hecho de que la estructura no estuviera apoyada no ha introducido ninguna dificultad; podríamos haberla considerado empotrada en D.
- Al no tener apoyos respecto de los cuales medir desplazamientos absolutos, sólo hemos podido obtener desplazamientos relativos.

Problema 7.4.4: Aro multisimétrico

El anillo de la figura 7.19a es de directriz circular y su sección, cuadrada de 8 cm de lado. El material tiene un módulo de elasticidad de $2 \times 10^6 \text{ kp/cm}^2$. Se pide:

- a) Dibujar y acotar la ley de momentos flectores en el anillo.
- b) Determinar el movimiento radial del punto A respecto del centro.

Conviene intuir cómo va a ser la deformada de la estructura. En la propia figura 7.19a hemos dibujado de puntos la deformada que esperamos. De ella anticipamos momentos flectores negativos en el entorno de las cargas, y positivos, en las partes intermedias.

La estructura no tiene apoyos pero ya está en equilibrio. Podríamos suponer que en los puntos C y D hay apoyos deslizantes en la dirección tangencial, en vez de cargas; las reacciones en estos apoyos serían precisamente las cargas dadas.

a) El anillo es hiperestático de grado 3; sin embargo, sus múltiples simetrías permitirán reducirlo. Analizaremos 1/6 de anillo con condiciones de simetría en sus extremos, como muestra la figura 7.19b. Tenemos cuatro incógnitas (N_A , M_A , N_B , M_B) y tres ecuaciones de equilibrio; el grado efectivo de hiperestatismo es 1:

$$\left. \begin{aligned} N_A &= 5 \cos 30^\circ + N_B \operatorname{sen} 30^\circ \\ 0 &= 5 \operatorname{sen} 30^\circ - N_B \cos 30^\circ \\ M_A &= M_B + 5 \times 2 \operatorname{sen} 60^\circ - N_B 2(1 - \cos 60^\circ) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} N_A &= 5,774 \text{ t} \\ N_B &= 2,887 \text{ t} \\ M_A &= M_B + 5,774 \text{ m} \times \text{t} \end{aligned}$$

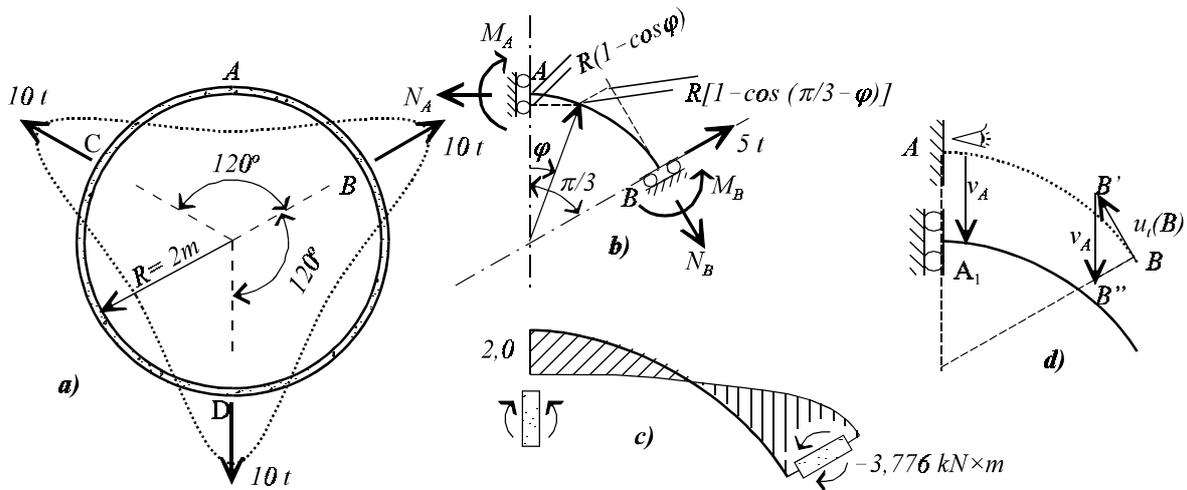


Figura 7.19
Estructura y diagramas del problema 7.4.4

Nuestra incógnita hiperestática será M_A . Su ecuación expresará que A no gira respecto de B . La ley de momentos flectores es:

$$M(\varphi) = M_A - N_A R(1 - \cos \varphi) = M_A - 11,547(1 - \cos \varphi)$$

El giro de B relativo a A es:

$$\theta_B = \frac{R}{EI} \int_0^{\pi/3} M(\varphi) d\varphi = 0$$

$$(a) \quad M_A \frac{\pi}{3} - 11,547 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0 \rightarrow M_A = 2,00 \text{ t}\cdot\text{m}$$

Entrando con este valor en la ley de momentos flectores anterior obtenemos su expresión final:

$$M(\varphi) = -9,547 + 11,547 \cos \varphi$$

Esta ley se dibuja en la figura 7.19c.

b) No tenemos ningún punto fijo desde el cual medir el movimiento radial de A ; emplearemos un *truco de astrónomo*: ponemos al observador fijo en A (lo consideramos empotrado) y calculamos el movimiento de B en su dirección tangencial $u_t(B)$ (figura 7.19d). Este movimiento debería salir nulo por imposición de la simetría; si no resulta nulo es porque A no está realmente quieto sino que se mueve en dirección radial. Haremos la corrección v_A necesaria para que $u_t(B)$ acabe siendo nulo. Calculemos el movimiento aparente:

$$u_t(B) = \frac{R^2}{EI} \int_0^{\pi/3} M(\varphi) [1 - \cos(\pi/3 - \varphi)] d\varphi = - \frac{R^2}{EI} \int_0^{\pi/3} M(\varphi) \cos(\pi/3 - \varphi) d\varphi$$

(Suprimimos la integral de $M(\varphi)$ porque es nula, según la ecuación hiperestática (a) anterior.) Continuamos:

$$u_t(B) = \frac{2}{EI} \int_0^{\pi/3} (9,547 - 11,547 \cos \varphi) (\cos \varphi + \sqrt{3} \sin \varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{2}{EI} \left\{ 9,547 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \right) \right] - 11,547 \left[\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) + \sqrt{3} \left(\frac{3}{8} \right) \right] \right\} = \frac{0,9798}{EI} = 14,35 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Decíamos que B únicamente se puede mover en dirección radial y que este valor tangencial es sólo aparente (para el observador situado en A) y es debido a que A no está realmente fijo. Corregiremos, por tanto, el valor de $u_t(B)$ encontrado (que resultó ser hacia arriba, hasta situarse en B') moviendo A (y toda la estructura rígidamente con él) hacia abajo v_A hasta volver a dejar B sobre su radio, en B'' (figura 7.19d). Por consiguiente:

$$v_A = \overline{B'B''} = \frac{BB'}{\cos 30^\circ} = 16,57 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Este es el movimiento vertical de A pedido, que resulta ser hacia abajo, acercándose al centro, como habíamos anticipado en la deformada del anillo.

Si nos hubieran pedido el movimiento radial de B , lo calcularíamos como el obtenido empotrando en A más la corrección BB'' inducida por v_A .

Enseñanzas:

- Hemos resuelto una estructura aprovechando sus múltiples simetrías. Éstas redujeron su grado de hiperestatismo de 3 a 1.
- La dificultad mayor fue la de no conocer ningún punto fijo desde el cual medir desplazamientos. Para resolverla procedimos como sigue:
 - colocamos el observador sobre —elegimos como fijo— el punto que tenía más movimientos coartados: sólo tenía uno libre;
 - desde él calculamos el desplazamiento de un punto que lo tenía conocido: nos salió un valor distinto del esperado;
 - corregimos el valor obtenido hasta hacerlo coincidir con el esperado dando un movimiento de sólido rígido a toda la estructura en la dirección que era permisible para el punto considerado fijo.

Problema 7.4.5: Multipórtico

La estructura de la figura 7.20a está formada por un pilar y dos arcos circulares de desarrollo $\frac{1}{4}$ de circunferencia. Los arcos están articulados en A y en C, y entre sí y al pilar, en B. La rigidez de los arcos es $EI = 10.000 \text{ t}\cdot\text{m}^2$ y la del pilar, $EI = 50.000 \text{ t}\cdot\text{m}^2$. El coeficiente de dilatación de todos los miembros de la estructura es $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Para la hipótesis de carga en la que el arco AB y el pilar BD sufren un calentamiento uniforme de 30°C , se pide:

- a) Calcular las reacciones en los apoyos.
- b) Calcular los movimientos horizontal y vertical del punto M.

a) La estructura es hiperestática de grado 2: +1 por la reacción horizontal en C; +3 por las reacciones en D, y -2 por las dos rótulas fundidas en una en B (articulando el primer arco al segundo, y el pilar a ellos). Es muy importante observar lo siguiente: si quitáramos el pilar BD, la estructura de arcos articulados sería isostática pero crítica (ver figura 2.5): el punto B se podría mover cantidades pequeñas v_B sin esfuerzos en los arcos, con solo giros $\theta_A = v_B/AB$, $\theta_C = -v_B/BC$. Esta propiedad hace que la dilatación del pilar no produzca esfuerzos en los arcos, sólo movimientos.

Para oponerse al libre desplazamiento horizontal $u_B^{(ext)} = 30 \times 10 \sqrt{2} \times 10^{-5} \text{ m}$ que tendría el punto B como perteneciente al arco AB, el arco BC proporcionará una fuerza horizontal H_1 y la ménsula, una H_2 (figura 7.20b). Éstas H_1, H_2 serán las incógnitas hiperestáticas. Las ecuaciones de compatibilidad serán $u_B^{(arco AB)} = u_B^{(arco BC)} = u_B^{(pilar)}$ (total dos):

$$4,243 \times 10^{-3} - (H_1 + H_2) \times u_B^{(H=1)} = H_1 \times u_B^{(H=1)} = \frac{H_2 \cdot 6^3}{3EI_p}$$

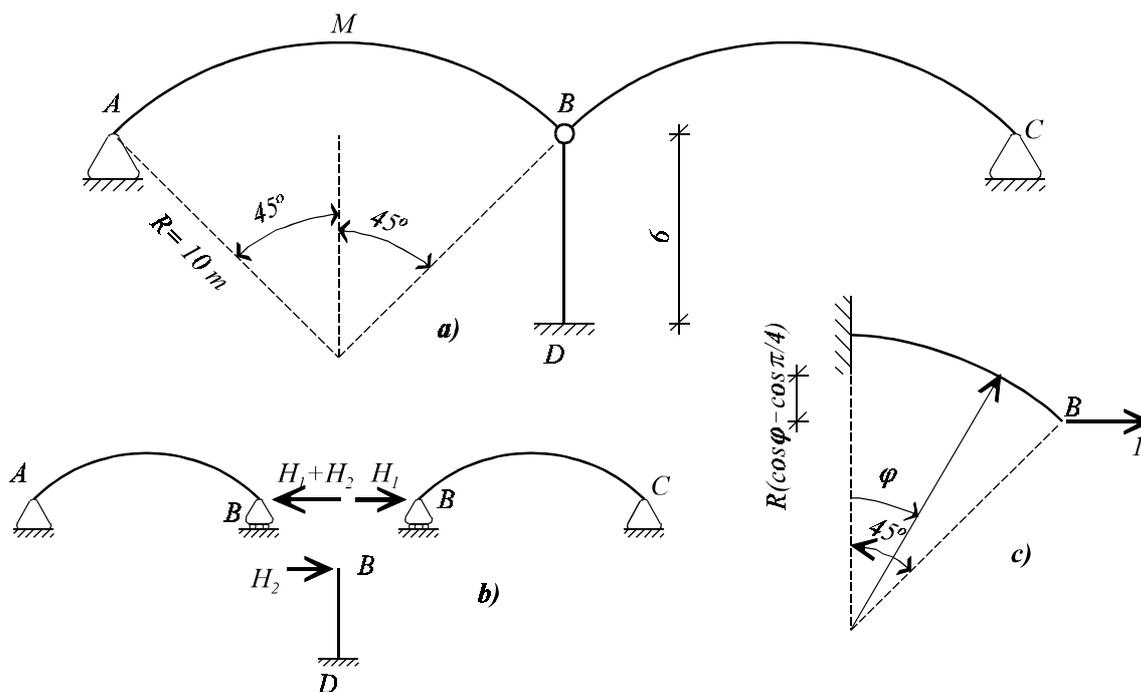


Figura 7.20 Estructura y diagramas del problema 7.4.5

siendo $u_B^{(H=1)}$ el doble del movimiento horizontal en el *semiarco* de la figura 7.20c:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_B^{(H=1)} &= \int_0^{\pi/4} \frac{1 \times 10 (\cos\phi - \sqrt{2}/2)}{EI_a} 10 (\cos\phi - \sqrt{2}/2) 10 d\phi = \\ &= \frac{1000}{EI_a} \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1 + \cos 2\phi}{2} - \sqrt{2} \cos\phi + \frac{1}{2} \right) d\phi = \\ &= \frac{1000}{EI_a} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = \frac{35,398}{EI_a} = 3,540 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

Las ecuaciones hiperestáticas quedan:

$$4,243 - 7,08(H_1 + H_2) = 7,08H_1 = 1,44 \times H_2 \rightarrow \begin{aligned} H_1 &= 0,0866 \text{ t} \\ H_2 &= 0,426 \text{ t} \end{aligned}$$

Por consiguiente $H_A = H_1 + H_2 = 0,513 \text{ t}$, $H_C = -H_1 = -0,0866 \text{ t}$, $H_D = -H_2 = -0,426 \text{ t}$, $M_D = H_2 \times 6 = 2,556 \text{ m} \times \text{t}$. No hay reacciones verticales.

b) Debido a la dilatación del pilar se produce $v_B = 1,8 \times 10^{-3} \text{ m}$, el cual movimiento exige $\theta_A = v_B/10\sqrt{2} = 0,127 \times 10^{-3} \text{ rad}$, el cual giro a su vez produce $v_M = 0,9 \times 10^{-3} \text{ m}$, $u_M = -0,373 \times 10^{-3} \text{ m}$.

Debido a la dilatación del arco tendremos $u_M = 5\sqrt{2} \times 30 \times 10^{-5} = 2,221 \times 10^{-3} \text{ m}$, $v_M = 10(1 - \sqrt{2}/2) \times 30 \times 10^{-5} = 0,879 \times 10^{-3}$, más los movimientos que corresponden a una fuerza horizontal en el arco de $-0,513 \text{ t}$: $-0,513 \times \hat{u}_B^{(H=1)} = -1,816 \times 10^{-3}$. Para el cálculo de v_M necesitamos el $v_B^{(H=1)}$:

$$\begin{aligned} v_B^{(H=1)} &= \int_0^{\pi/4} \frac{1 \times 10 (\cos\phi - \sqrt{2}/2)}{EI_a} 10 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sen}\phi \right) 10 d\phi = \\ &= \frac{1000}{EI_a} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{64,4}{EI_a} = 6,44 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

En el arco completo $H_B = 1$ haría bajar $v_M = -6,44 \times 10^{-3} \text{ m}$. La reacción de $-0,513$ lo hará subir $v_M = 3,304 \times 10^{-3} \text{ m}$.

Los movimientos totales serán:

$$\begin{aligned} u_M &= -0,373 + 2,221 - 1,816 = 0,032 \text{ mm} \\ v_M &= 0,9 + 0,879 + 3,304 = 5,083 \text{ mm} \end{aligned}$$

Enseñanzas:

- La dificultad principal del problema consistía en observar que el calentamiento del pilar no produce esfuerzos: sólo movimientos de sólido rígido en los dos arcos. Si el punto *B* hubiera estado por encima o por debajo de la horizontal que pasa por *A*, el calentamiento del pilar sí habría producido esfuerzos de tracción o compresión (respectivamente) en los arcos.
- El dilatación de un arco era coaccionada por el otro arco y por la ménsula (2 hiperestáticas)
- Los movimientos del punto *M* se calcularon como suma de:
 - los de sólido rígido causados por el calentamiento del pilar,
 - los de *homotecia* por dilatación libre del arco,
 - los de la hiperestática que coacciona estos últimos.

8 Reciprocidad y líneas de influencia

8.0 Importancia, objetivos y contenido

El ingeniero estructural se pregunta a menudo cuáles serán los máximos esfuerzos, reacciones o movimientos que van a sufrir las secciones clave de su estructura. Para responder a estas preguntas necesita obtener las líneas de influencia correspondientes.

Muchas veces, más que la ecuación de la línea de influencia, lo que necesitamos es su aspecto. El teorema de la reciprocidad nos permite dibujar y estimar las líneas de influencia con toda facilidad. El teorema de la reciprocidad tiene, además, otras aplicaciones, secundarias pero importantes en el análisis estructural; su ámbito no se reduce a la Resistencia de Materiales.

Objetivos	Contenido
Generales: <ul style="list-style-type: none"> — Saber obtener y usar líneas de influencia. — Conocer el significado y los usos del teorema de la Reciprocidad. 	
Específicos: <ul style="list-style-type: none"> — Conocer el teorema de la Reciprocidad: §8.1 <ul style="list-style-type: none"> • enunciado, • implicaciones, • aplicaciones — Aprender a deducir ciertos movimientos de una estructura a partir de otros. §8.2 — Aprender a resolver problemas mediante la técnica de subestructuras. §8.3 — Adquirir los conceptos fundamentales de líneas de influencia: §8.4 <ul style="list-style-type: none"> • qué son, <li style="padding-left: 40px;">▶ qué no son, • para qué sirven, • qué tipos consideramos en este estudio, • cómo se obtienen. — Aprender a obtener líneas de influencia por el método directo. §8.5 — Aprender a obtener y dibujar líneas de influencia por el método indirecto: §8.6 <ul style="list-style-type: none"> • de movimientos, • de reacciones, y de • esfuerzos. — Aprender el doble uso de las líneas de influencia: §8.7 <ul style="list-style-type: none"> • fundamental: encontrar las posiciones más dañinas de las cargas exteriores, • secundario: evaluar el daño producido. 	
Adicional: <ul style="list-style-type: none"> — Adquirir soltura en la obtención y el empleo de las líneas de influencia. §8.8 	

8.1 Reciprocidad y celestinas

Enunciado

El llamado teorema de la reciprocidad es una historia de amor —y de celestinas—. En su forma más legible dice:

$$(8.1-1) \quad \vec{P} \cdot \vec{u}_p^{(Q)} = \vec{Q} \cdot \vec{u}_q^{(P)}$$

Se trata de productos escalares de vectores. Empleamos la siguiente notación:

- P y Q son dos cargas (fuerzas o momentos) que actúan sobre sendos puntos (que pueden coincidir) de una misma estructura
- $u_p^{(Q)}$ es el movimiento del punto sobre el que actúa P (con la dirección y el sentido de la propia P) causado por la carga Q
- $u_q^{(P)}$ es el movimiento del punto sobre el que actúa Q (con la dirección y el sentido de la propia Q) causado por la carga P .

Es decir: si P es una carga vertical actuando sobre el punto A , $u_p^{(Q)}$ debe ser el movimiento vertical v_A producido por la carga Q (cualquiera que ésta sea). Recíprocamente: si Q es un momento, $u_q^{(P)}$ debe ser el giro de su "asiento" producido por P .

Un enunciado rosa y verde del teorema de la reciprocidad es el siguiente: *la carga P hace con su novio, el desplazamiento que le proporciona Q , el mismo trabajo físico que la carga Q hace con su novio, el desplazamiento que le proporciona P .*

Utilidad

En el apartado 4.3 tienes la fórmula c de la tabla 4.2 del giro en el apoyo de una viga sometida a una carga puntual. La Reciprocidad te va a permitir usar *la misma fórmula* para obtener algo tan distinto —y tan importante— como es la elástica de una viga biapoyada sometida a un momento en un extremo. En efecto: aplicando la fórmula anterior entre los estados de carga a y b de la (misma) viga de la figuras 8.1a y b :

$$(8.1-2a) \quad P \cdot v(x) = M_A \cdot \theta_A$$

$$v(x)^{(M_A=1)} = \frac{x(L-x)(2L-x)}{6LEI}$$

De igual manera se obtiene la elástica para el caso del momento sobre el apoyo B :

$$(8.1-2b) \quad v(x)^{(M_B=1)} = \frac{x(L-x)(L+x)}{6LEI}$$

Estas dos fórmulas las vas a emplear mucho en problemas de líneas de influencia.

Demostración

El teorema de la reciprocidad o *de Betti* se demuestra haciendo uso del principio de linealidad: el trabajo realizado aplicando primero una carga P y a continuación una segunda Q es el mismo que actuando en orden inverso.

Con la notación del enunciado, el trabajo realizado al aplicar P (figura 8.2) será $\frac{1}{2}P \cdot u_p^{(P)}$. Si a continuación se aplica Q , esta segunda carga realizará el trabajo $\frac{1}{2}Q \cdot u_q^{(Q)}$, y la P que ya estaba, el nuevo trabajo

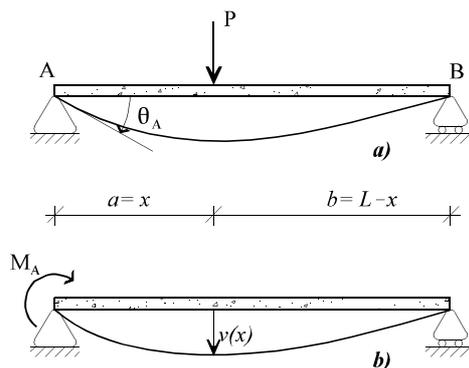


Figura 8.1
Aplicación de la reciprocidad
para matar dos pájaros de un tiro

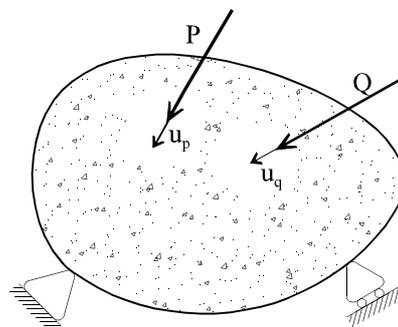


Figura 8.2
Demostración del principio de reciprocidad

¹ El factor de $\frac{1}{2}$ aparece como consecuencia de que P aumenta progresivamente desde cero a su valor final P , y el desplazamiento correspondiente, a la vez (figura 8.3). El trabajo es el área bajo la recta $P(u)$.

$P \cdot u_p^{(Q)}$. Este último término es debido a que, por efecto de aplicación de Q , el asiento de P se desplaza la cantidad $u_p^{(Q)}$. Total:

$$\frac{1}{2}P \cdot u_p^{(P)} + \frac{1}{2}Q \cdot u_q^{(Q)} + P \cdot u_p^{(Q)}$$

Si las cargas se aplican en orden inverso tendremos: por efecto de Q , $\frac{1}{2}Q \cdot u_q^{(Q)}$; por efecto de P posterior, $\frac{1}{2}P \cdot u_p^{(P)} + Q \cdot u_q^{(P)}$. El segundo sumando de nuevo tiene en cuenta que el punto de aplicación de Q se desplaza $u_q^{(P)}$ por causa de P . Total:

$$\frac{1}{2}Q \cdot u_q^{(Q)} + \frac{1}{2}P \cdot u_p^{(P)} + Q \cdot u_q^{(P)}$$

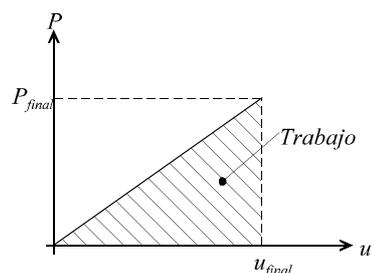


Figura 8.3
Por qué aparece el factor 1/2 en el trabajo $P \cdot u$

Igualando ambos trabajos se obtiene la expresión (8.1-1).

Corolario: las matrices de flexibilidad son simétricas

Es una propiedad de la cual ya hemos hecho uso extensivo; vamos a comprobar su veracidad. Sean u_1, v_2, θ_3 tres posibles movimientos de una estructura: horizontal de un cierto punto 1, vertical de otro punto designado por 2 y giro del llamado 3. (En realidad estas direcciones llamadas "horizontal" y "vertical" pueden ser cualquiera.) Podemos escribir la relación:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ V_2 \\ M_3 \end{pmatrix}$$

entre los movimientos anteriores y sus cargas "novias" H_1, V_2, M_3 . Haciendo, por ejemplo, $H_1 = 0, V_2 = 1, M_3 = 0$, se tiene $u_1 = c_{12}, v_2 = c_{22}, \theta_3 = c_{32}$. Esto muestra el significado físico de los coeficientes de influencia de la matriz de flexibilidad: c_{ij} es el desplazamiento u_i causado por la actuación en solitario de la carga unitaria $F_j = 1$ (novia del desplazamiento u_j):

(8.1-3)
$$c_{ij} = u_i^{(F_j=1)}$$

Como por el teorema de la reciprocidad resulta que el desplazamiento u_i debido a $F_j = 1$ es igual al desplazamiento u_j debido a $F_i = 1$, se tiene que $c_{ij} = c_{ji}$.

Aplicaciones

Veremos que el teorema de la reciprocidad nos va a permitir dibujar líneas de influencia a estima con gran facilidad —lo cual es lo primero que debe hacer un alumno al enfrentarse a un problema relacionado con ellas—. Ésta es su aplicación más importante. Además, permite la resolución de algunos problemas especiales que aquí llamaremos *de detective* y *de subestructuras*.

Resumen:

- El teorema de la reciprocidad:
 - establece $P \times u_p^{(Q)} = Q \times u_q^{(P)}$;
 - nos permite obtener dos movimientos por el precio de uno: $u_p^{(Q=1)} = u_q^{(P=1)}$;
 - ▶ y nos asegura la simetría de las matrices de flexibilidad (y rigidez).
- El teorema de la reciprocidad tiene importantes aplicaciones en:
 - dibujo a estima de líneas de influencia,
 - resolución de problemas de los tipos:
 - ▶ de detective,
 - ▶ de subestructuras y
 - ▶ de obtención de las ecuaciones de las l.i.'s.

² Ahora, contrariamente, P mantiene su valor final mientras se produce el nuevo desplazamiento $u_p^{(Q)}$.

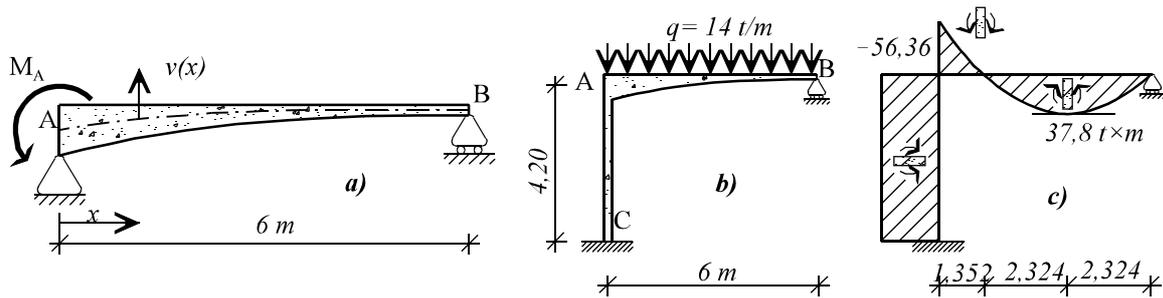


Figura 8.4
Estructura y resultados del problema 8.1

8.2 Problemas de detective

Qué son

Son problemas en los que aparentemente nos dan datos innecesarios mientras nos ocultan otros imprescindibles; éstos se obtienen a partir de los primeros aplicando el principio de reciprocidad.

Problema 8.1: Pórtico de canto variable

En la viga de canto variable AB de la figura 8.4a se sabe que si se construye biapoyada y se introduce un momento $M_A = 400 \text{ m}\times\text{t}$ en el apoyo A , su deformada, medida en metros, tiene la siguiente expresión:

$$v(x) = 0,12 \left[\left(\frac{x}{6} \right)^3 - 4 \left(\frac{x}{6} \right)^2 + 3 \left(\frac{x}{6} \right) \right]$$

El pórtico de la figura 8.4b está formado por un dintel AB , cuyas características son las mismas de la viga descrita, y un pilar AC de sección constante con rigidez $EI = 120.000 \text{ t}\times\text{m}^2$. Se pide determinar la ley de momentos flectores en el pórtico de la figura 8.4b cuando sobre él actúa la sobrecarga uniforme de $q = 14 \text{ t/m}$ que se muestra en la propia figura. (Examen septiembre 93.)

Comentarios

1) Este problema es semejante al 6.5.6 y lo resolveremos de igual manera que aquél: por el método de viga continua, separando en dos vigas. Ello a pesar de ser una estructura traslacional, porque, curiosamente, su traslacionalidad afecta al cálculo pero no influye cuantitativamente. Si quisiéramos resolverlo por el método general (tomando una reacción exterior como incógnita hiperestática) probablemente fracasaríamos porque la información $v(x)$ perdería su relevancia.

2) Teóricamente al menos, a partir de la información dada se podría obtener la ecuación de la rigidez variable del dintel AB , utilizando $v''(x) = M(x)/EI$. Podría suceder, no obstante, que no alcanzáramos los resultados correctos bien porque la $v(x)$ dada no corresponda a ninguna rigidez real $EI(x)$ (por ejemplo, si $v(x)$ se obtuvo experimentalmente) o por la dificultad del cálculo subsiguiente con la $EI(x)$ encontrada. Este problema está pensado para resolver por reciprocidad y así debe hacerse.

Solución

Separamos en dos vigas como en el problema 6.5.6 y tomamos como incógnita hiperestática el momento flector M en el nudo A . La ecuación hiperestática correspondiente resulta de igualar los giros a ambos lados de dicho nudo. El giro en la ménsula AC será $M \times h/EI$. El giro en el dintel se compondrá de dos términos: el debido al propio momento M y el debido a la carga uniforme. El primero **no** es $ML/3EI$ porque la viga es de sección variable; resulta ser $M \times v'(x=0)/400$ por una regla de tres, ya que $v'(x=0)$ es el giro debido a un momento de $400 \text{ m}\times\text{t}$. El término debido a la carga uniforme $q(x)$ se obtiene por reciprocidad, como sigue.

Si un momento unidad en A produce una flecha vertical en x de valor $v(x)/400$, una carga unidad en x producirá en A un giro de igual valor. Como la carga que actúa sobre x vale en realidad $q(x)dx$, el giro que produce en A valdrá $d\theta_A = q(x)v(x)dx/400$. El giro producido por toda la carga que actúa sobre AB será la suma o integral de la expresión anterior:

$$\theta_A^{(ext)} = \int_A^B q(x) \frac{v(x)}{400} dx = 14 \frac{0,12}{400} 6 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{x}{6} \right)^4 - \frac{4}{3} \left(\frac{x}{6} \right)^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{x}{6} \right)^2 \right]_0^6 = 0,0105 \text{ rad}$$

La ecuación hiperestática resulta finalmente:

$$-\frac{M \times 4,2}{1,2 \times 10^5} = M \frac{0,12^3}{400} - 0,0105 \Rightarrow M = 56,76 \text{ m} \times t$$

La ley de momentos flectores final se da en la figura 8.4c.

Enseñanzas:

- Recordamos que si conocemos la elástica $v(x)$ de una viga, conocemos también el giro en cualquier punto $\theta(x) = v'(x)$.
- La reciprocidad nos ha permitido calcular el giro θ_A debido a una sobrecarga $q(x)$ cualquiera, a partir de la elástica $v(x)$ producida por un momento M_A ,
 - a pesar de no conocer la rigidez $EI(x)$ de la estructura.

Problema 8.2: Arco de sección variable

El arco de la figura 8.5a es una parábola de segundo grado y su sección es variable. Se sabe que al aplicar en el extremo B una carga horizontal de 25 t hacia la derecha se produce un movimiento vertical $v(x)$ hacia abajo en todos los puntos del arco de valor, en metros:

$$v(x) = 0,0125 \left[\left(\frac{x}{10} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{10} \right)^3 + \left(\frac{x}{10} \right) \right]$$

a la vez que un movimiento horizontal en B de $u_B = 0,005$ m. En el mismo arco se quiere colocar posteriormente un tirante entre los apoyos A y B cuyo módulo de elasticidad sea de $E = 2 \times 10^6$ kp/cm² y someter el arco a una carga vertical uniforme hacia abajo de $q = 4$ t/m que ocupe la mitad de la luz (figura 8.5b). Se pide:

- a) Calcular el área que ha de tener el tirante para que el esfuerzo axial en la clave del arco sea de 5 t de compresión.
- b) Obtener la ley de momentos flectores en el arco. (Examen febrero 93)

Comentarios

1) No se debe buscar la $EI(x)$ del arco a partir de $v''(x) = M/EI$. (Ver el comentario 2º del problema anterior.)

2) Se trata de una estructura hiperestática de grado 1 "afinada", porque nos dicen cuánto queremos que valga la incógnita hiperestática (ver ejemplo 7.1.2). Sin embargo, no nos libramos de escribir —y cumplir— la ecuación hiperestática.

Solución

Para que el esfuerzo axial en la clave del arco alcance las -5 t es preciso que la fuerza en el tirante tenga ese mismo valor $T = 5$ t.

La ecuación hiperestática es

$$\left[u_B^{(H=1)} + \frac{1}{k} \right] \{ H_B \} = - \{ u_B^{(ext)} \}$$

con $H_B = -T = -5$ t. Expresa que el movimiento horizontal del cable, por los conceptos de carga exterior y reacción $H_B = -5$ del tirante, es igual al alargamiento del tirante. Los términos u_B corresponden al arco y el $1/k$ es el coeficiente de flexibilidad del cable, L/EA .

El movimiento horizontal correspondiente a $H_B = 1$ t es, por proporción con el del dato, $u_B^{(H=1)} = 0,005/25 = 0,2 \times 10^{-3}$ m. El cálculo de $u_B^{(ext)}$ se hace invocando el principio de superposición como sigue.

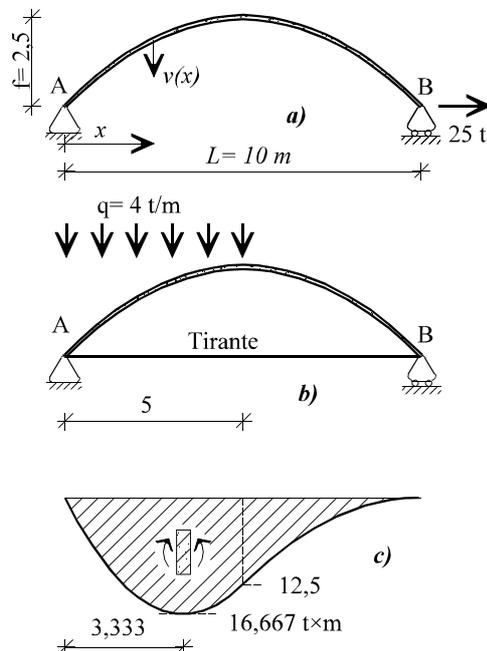


Figura 8.5 Estructura y resultados del problema 8.2

Si una fuerza $H_B = 1$ en B produce en x una flecha vertical de valor $v(x)/25$, una carga unidad en x producirá en B un $u_B = v(x)/25$. Si en vez de una carga unidad en x aplicamos una de valor $q(x)dx$, en B tendremos un movimiento de valor $d(u_B) = v(x)q(x)dx/25$. El desplazamiento total debido a toda la carga repartida será:

$$u_B^{(ext)} = \frac{1}{25} \int_{x=0}^{x=5} v(x)q(x)dx = 4 \frac{0,0125}{25} \left[5 \left(\frac{x}{10} \right)^5 - \frac{2}{4} \left(\frac{x}{10} \right)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{10} \right)^2 \right]_0^5 = 0,002 \text{ m}$$

Con $H_B = -5 \text{ t}$, el movimiento horizontal del apoyo B del arco será:

$$u_B = -5 \times u_B^{(H=1)} + u_B^{(ext)} = -0,001 + 0,002 = 0,001 \text{ m}$$

Para que el cable de $L = 10 \text{ m}$, $E = 2 \times 10^7 \text{ t/m}^2$, $T = 5 \text{ t}$ se alargue esta misma cantidad es preciso que su área sea de $25 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 25 \text{ cm}^2$. (Esta igualdad es la misma escrita en la ecuación hiperestática de más arriba.)

Las reacciones horizontales son $H_A = -H_B = 5 \text{ t}$. La reacción vertical V_A será los 3/4 de la carga vertical total, 15 t, y la V_B , el 1/4 restante, 5 t, como en una viga biapoyada. La ley de momentos flectores tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 5 \quad M(x) &= 15x - 5y - 4 \frac{x^2}{2} \\ 5 \leq x \leq 10 \quad M(x) &= 5(10-x) - 5y \end{aligned}$$

con

$$y = \frac{4f}{L^2} x(L-x) = x - 0,1x^2$$

El aspecto aproximado de esta ley se muestra en la figura 8.5c.

Enseñanzas:

- Hemos recordado que en las estructuras *afinadas* (en las cuales se conoce *a priori* el valor de la(s) incógnita(s) hiperestática(s)) también es preciso escribir y satisfacer las ecuaciones hiperestáticas;
 - éstas nos servirán para determinar la rigidez adecuada de los elementos estructurales.
- La reciprocidad nos ha permitido calcular el u_B debido a $q(x)$ a partir de la $v(x)$ producida por H_B , sin conocer la rigidez $EI(x)$ del arco.

Resumen:

- Se han presentado problemas en los que:
 - el cálculo convencional habría sido muy difícil por la inercia variable, y
 - el cálculo por reciprocidad resultaba atractivo,
 - suponiendo conocidas las deformadas para cargas distintas de las necesarias,
 - que podrían obtenerse experimentalmente.

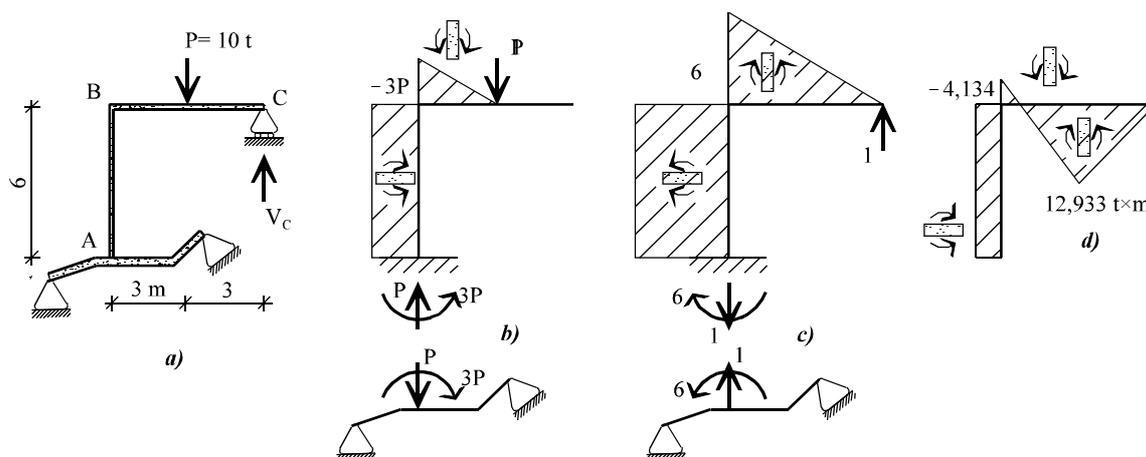


Figura 8.6 Estructura y resultados del problema 8.3

8.3 Problemas de subestructuras

Para predecir los movimientos de una antena colocada en un punto *A* del *Empire State* no necesitamos conocer con detalle toda la estructura del rascacielos, afortunadamente: nos basta con conocer la matriz de flexibilidad (o de rigidez) que relaciona fuerzas con movimientos en el punto de unión:

$$\begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ \cdot & c_{22} & c_{23} \\ \cdot & \cdot & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ M_A \end{Bmatrix}$$

Ni siquiera necesitamos la matriz completa, porque es simétrica.

Esta propiedad se aprovecha a menudo para reducir el cálculo de estructuras complejas al de subestructuras más simples que se conectan entre sí únicamente en unos pocos puntos. Para ello necesitamos determinar las matrices de flexibilidad (o rigidez) que relacionan entre sí todos los movimientos de los puntos de conexión de dos subestructuras.

En estos problemas la reciprocidad la usas sólo al invocar la simetría de la matriz, para completar la *media* matriz que habitualmente te dan.

Problema 8.3.1: Pórtico apoyado en otra estructura

La estructura de la figura 8.6a consta de dos subestructuras: el pórtico ABC, de rigidez constante $EI = 120.000 \text{ t}\cdot\text{m}^2$, apoyado verticalmente en C y unido rigidamente en A a la otra subestructura.

De la subestructura inferior (antes de colocar el pórtico ABC) sólo conocemos las siguientes características elásticas referidas al punto A: (i) que aplicando una carga vertical de 1 t se obtiene una flecha de $0,54 \times 10^{-3} \text{ m}$, y (ii) que aplicando un momento de 1 m·t en sentido antihorario se obtiene un giro de $0,12 \times 10^{-3} \text{ rad}$ y una flecha hacia abajo de $0,04 \times 10^{-3} \text{ m}$.

Después de unir el pórtico ABC a la subestructura inferior, se aplica la carga P de 10 t que se muestra en la figura. Se pide determinar la ley de momentos flectores en el pórtico ABC. (Examen febrero 92.)

Comentarios

1) No nos dicen cuánto gira el punto A al aplicarle la carga vertical; no obstante, sería un error interpretar que el punto no gira. Este dato se deduce, por reciprocidad, de la flecha debida al momento.

2) Omiten, también, indicarnos los sentidos de la carga vertical, de su movimiento "novio" y del giro debido al momento. Estos signos nos vienen forzados por la necesidad de que los desplazamientos lleven el sentido de la fuerza "novia", la cual necesidad se traduce en que los términos de la diagonal principal de la matriz de flexibilidad han de ser positivos. En cambio, se nos da información precisa para determinar el signo del término "cruzado" flecha debida al momento.

Solución

Si prescindieramos del apoyo horizontal en C , la subestructura ABC sería un apéndice isostático que colgaría libremente de la subestructura inferior. Al tener impedido el movimiento v_C , el pórtico ABC es hiperestático de grado 1. Tomaremos como incógnita hiperestática la propia reacción V_C , que será tal que hará nulo su desplazamiento novio.

En el cálculo de v_C intervienen la carga exterior P y la propia reacción hiperestática V_C . La ecuación hiperestática es en apariencia tan sencilla como siempre:

$$[v_C^{(V_C=1)}]V_C = -v_C^{(ext)}$$

La complejidad surge de que cada uno de los movimientos anteriores se compone del movimiento relativo (como si A fuera realmente inmóvil) más los *términos de arrastre* correspondientes, debidos a los movimientos v_A y θ_A de la subestructura inferior aislada. La ecuación hiperestática se convierte en:

$$\left[v_{C,rel}^{(V_C=1)} + v_A^{(V_C=1)} + 6\theta_A^{(V_C=1)} \right] V_C = - \left(v_{C,rel}^{(ext)} + v_A^{(ext)} + 6\theta_A^{(ext)} \right)$$

Los movimientos relativos se obtiene de las leyes de momentos flectores de las figuras 8.6b y 8.6c, y resultan:

$$v_C^{(ext)} = -130,5 \frac{P}{EI} = -10,875 \text{ mm}$$

$$v_C^{(V_C=1)} = \frac{288}{EI} = 2,4 \text{ mm}$$

Para calcular los movimientos de arrastre escribimos con cuidado la matriz de flexibilidad de la subestructura inferior en el punto A a partir de los movimientos dados:

$$\begin{Bmatrix} v_A \\ \theta_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} v_A^{(V_A=1)} = 0,54 & v_A^{(M_A=1)} = -0,12 \\ \theta_A^{(V_A=1)} = -0,12 & \theta_A^{(M_A=1)} = 0,04 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \begin{Bmatrix} V_A \\ M_A \end{Bmatrix}$$

referida a los ejes cartesianos habituales. Entrando en la ecuación anterior con las parejas de fuerzas correspondientes a la reacción hiperestática y a la carga exterior se obtienen los siguientes movimientos de arrastre:

$$\begin{Bmatrix} V_A = 1 \\ M_A = 6 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} v_A^{(V_C=1)} &= -0,18 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \theta_A^{(V_C=1)} &= 0,12 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} V_A = -P \\ M_A = -3P \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} v_A^{(ext)} &= -1,80 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \theta_A^{(ext)} &= 0,00 \text{ rad} \end{aligned}$$

Entrando con los movimientos relativos y de arrastre en la ecuación hiperestática se obtiene $V_C = 4,311 \text{ t}$. La ley de momentos flectores que resulta se muestra en la figura 8.6d.

Enseñanzas:

- Hemos aprendido a construir la matriz de flexibilidad en un punto de una estructura a partir de datos de movimientos, haciendo uso de sus propiedades:
 - de simetría y
 - de términos positivos en la diagonal principal.
- Hemos recordado que los movimientos absolutos de un punto se componen de los relativos más los de arrastre.
- Hemos aprendido a utilizar la matriz de flexibilidad de los puntos de empalme de dos subestructuras para obtener los movimientos de arrastre.
- Hemos generalizado la construcción automática de las ecuaciones hiperestáticas al caso de una subestructura, incorporando los movimientos de arrastre de la subestructura subyacente.

8.4 Líneas de influencia

Qué son

Supongamos que queremos saber cuánto *daño* (momento flector, por ejemplo) hace en una cierta sección S una carga puntual que puede actuar en cualquier punto de la estructura que nos ocupa. Para ello colocamos una carga puntual *unidad* en la posición genérica x , medimos el *daño* en S y a su magnitud le llamamos $i(x)$. Esta curva $i(x)$ es entonces la *línea de influencia* del *daño* que produce en la sección S una carga unidad colocada sobre cualquier punto x de la estructura. En la definición de línea de influencia intervienen:

- el tipo de *daño* que se mide (esfuerzo, reacción o movimiento),
- la sección S donde se mide, y
- la clase de carga unidad (vertical, horizontal, momento...) que lo produce.

Qué no son

Conviene no confundir una línea de influencia de un esfuerzo o movimiento con su prima la ley de esfuerzo o movimiento que produce un sistema de cargas exteriores. Las diferencias fundamentales son dos: lo que variamos y lo que mantenemos fijo. Pensemos que tenemos un instrumento de carga y un instrumento de medida. Para dibujar la ley, fijamos el instrumento de carga y movemos el de medida. Para dibujar la línea de influencia, fijamos el instrumento de medida y movemos el de carga. Ver tabla 8.1

En ocasiones una ley de esfuerzos y una línea de influencia tienen aspectos muy semejantes; no obstante, *es imprescindible saber diferenciarlas*. Así, la curva de la figura 8.7a es la ley de momentos flectores para una carga en la sección $x = a$ mientras que la de la figura 8.7b es la línea de influencia del momento flector en la misma sección $x = a$ para una carga vertical unidad. El aspecto es el mismo pero la forma de obtenerlas, muy distinta:

- Para obtener la ley de esfuerzos se ha colocado una carga fija en la sección $x = a$ y se ha medido el momento flector en *todas las secciones*. Aparato de carga, en posición fija; aparato de medida, moviéndose por doquier.
- Para obtener la línea de influencia se ha colocado una carga unidad alternativamente en todas las secciones³ y se ha medido el momento flector sólo en la sección fija $x = a$. Aparato de medida en posición fija; aparato de carga moviéndose.

Derivando la ley de momentos flectores de la figura 8.7a obtendremos la ley de esfuerzos cortantes correspondiente; en cambio, derivando la línea de influencia de la figura 8.7b obtendremos cualquier cosa⁴ menos la línea de influencia de esfuerzos cortantes.

Para qué sirven

Las líneas de influencia:

- son ayuda indispensable para encontrar las posiciones más peligrosas de las cargas para una sección de una estructura. Para esto, muchas veces basta con un dibujo a estima de la línea de influencia.
- pueden servir también para cuantificar el *daño* sufrido por *esa* sección bajo *esa* hipótesis de carga. Sin embargo, para esto último es preciso:
 - que tengamos la expresión analítica $i(x)$ de la línea de influencia (que muchas veces no vale la pena obtener), y
 - que estemos dispuestos a hacer unos cálculos con dicha $i(x)$ que casi siempre son más complejos que los que hemos venido utilizando hasta aquí (una vez que sabemos dónde colocar las cargas para lograr el efecto pésimo).

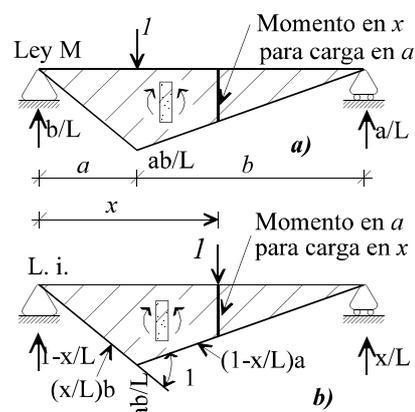


Figura 8.7
Semejanza casual entre una ley de esfuerzos y una línea de influencia

³ Colocar la carga móvil en "todas" las posiciones consiste en la práctica en colocarla en una o varias posiciones genéricas x . Aquí las posiciones genéricas deben ser dos, una en $x \in (0, L/2)$ y otra en $x \in (L/2, L)$.

⁴ Lo que obtendremos será la línea de influencia del mismo momento flector cuando la carga que se pasea es un *momento unidad* (en vez de la carga vertical unidad), pero sobre esto no vamos a insistir aquí.

Qué tipos consideramos

Vamos a considerar tres tipos de líneas de influencia:

- de movimiento
- de esfuerzos,
- de reacciones en apoyos

siempre para *carga unidad* que se pasea por la directriz de la estructura. No vamos a considerar, pues, las líneas de influencia para *momento* unidad; diremos sólo que éstas son las derivadas de las otras.

Cómo se obtienen

Las líneas de influencia se pueden obtener de dos maneras:

- por el *método directo*, aplicando su definición: colocando una carga en cuantas posiciones genéricas sean precisas y calculando el efecto buscado en la sección prescrita, o
- por el *método indirecto*, aplicando propiedades de la reciprocidad que veremos enseguida. Este método:
 - no suele ser el idóneo para el cálculo analítico, pero:
 - *es el método indispensable para pintar a estima la línea de influencia, que es lo primero que se debe hacer siempre, porque muchas veces es todo lo que se necesita de ella;* y por tanto
 - sirve también para saber de antemano en cuántas posiciones genéricas hemos de colocar la carga móvil en el cálculo por el método directo.

Resumen:

- Una línea de influencia $i(x)$ envuelve tres datos:
 - el *tipo* de línea buscado, que puede ser
 - ▶ de movimiento,
 - ▶ de reacción, o
 - ▶ de esfuerzo;
 - el *lugar* o *sección* para el/la que se obtiene y
 - la clase de *carga* puntual unidad (horizontal, vertical, inclinada o momento) que la produce.
- Se diferencia de una ley en que da resultados:
 - en una sección solamente,
 - para todas las posiciones posibles de una carga.
- Se puede obtener de dos maneras:
 - por el método directo (que suele ser el mejor para la obtención analítica) o
 - por el método indirecto, que es indispensable para obtener su aspecto gráfico.

Tabla 8.1
Comparación entre *leyes* y líneas de influencia

Curva	Carga(s) que la produce(n)		Sección(es) donde se mide el daño	La variable x es la ordenada de
	Cantidad	Situación		
Ley de daño (movimiento o esfuerzo)	todas las cargas exteriores reales	en sus posiciones fijas	todas , x	la sección que sufre el daño
Línea de influencia de daño (movimiento, reacción o esfuerzo)	una carga única ficticia	móvil (en todas las posiciones x)	una	la posición de la carga que produce el daño

8.5 Método directo

Uso

El método directo es casi siempre el más eficiente para obtener la expresión analítica $i(x)$ de una línea de influencia. Sin embargo, sólo debe usarse cuando es imprescindible determinar dicha expresión analítica, y siempre *después* de haber dibujado antes a estima el aspecto de la línea de influencia por el método *indirecto*. No obstante, describimos primero este método *directo* por dos razones: (i) porque es el procedimiento *pedagógico* que ayuda a entender qué es una línea de influencia y (ii) porque es el procedimiento *inmediato* que se le ocurre a cualquiera que no haya profundizado en el tema. De hecho, en capítulos anteriores hemos obtenido ya algunas líneas de influencia por este método sin llamarlas por su nombre.

Ejemplo de l.i. de un giro

En el apartado 4.3, tabla 4.3 obtuvimos las fórmulas de los giros en los apoyos de una viga para una carga situada en $x = a$. Si hacemos $P = 1$ y reemplazamos en aquellas fórmulas a por x y b por $(L - x)$ tendremos la expresión de las *líneas de influencia de los giros* en los apoyos de una viga biapoyada para carga vertical hacia abajo:

$$\theta_A(x) = \frac{x(L-x)(2L+x)}{6LEI} \quad (8.5-1)$$

$$\theta_B(x) = \frac{x(L-x)(L+x)}{6LEI}$$

Ejemplo de l.i. de una reacción

También, en el apartado 6.2, fórmula (6.2-1), obtuvimos las *líneas de influencia de las reacciones horizontales* en una viga biapoyada de sección constante para una carga horizontal unidad:

$$H_A(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (8.5-2)$$

$$H_B(x) = \frac{x}{L}$$

Allí mismo explicamos que éstas podían ser también las expresiones de las *líneas de influencia de reacciones verticales* en una viga biapoyada (cualesquiera que fuera su sección) para una carga vertical unidad.

Ejemplo de l.i. de un esfuerzo

Nos falta ver un ejemplo sencillo de la tercera clase, línea de influencia de esfuerzos. Justifiquemos que la función de la figura 8.7b es realmente la *línea de influencia del momento flector* en la sección $x = a$ de la viga biapoyada. Si colocamos una carga vertical unidad en la posición x de una viga biapoyada, Las reacciones en los apoyos serán $V_A = 1 - x/L$ y $V_B = x/L$. El momento flector en la sección $x = a$ vendrá dado por $V_B \cdot (L - x)$ cuando $0 \leq x \leq a$ y por $V_A \cdot x$ cuando $a \leq x \leq L$. Resulta:

$$M(a) = \begin{cases} \frac{x}{L} b = x \left(1 - \frac{a}{L} \right) & 0 \leq x \leq a \\ \left(1 - \frac{x}{L} \right) a & a \leq x \leq L \end{cases} \quad (8.5-3)$$

que son las ecuaciones de las dos rectas de la figura 8.7b

Dificultades

Este ejemplo nos alerta de que en general habrá varios *tramos con distintas expresiones analíticas* de una única línea de influencia. Por esta razón es tan importante saber dibujarla antes a estima, para no dejarnos olvidado ningún tramo.

En los problemas que se resuelvan en el apartado siguiente se completará el estudio de este método empleándolo abundantemente una vez dibujada la l.i. por el método indirecto.

Resumen:

- El método directo consiste en
 - colocar una fuerza unidad en posiciones genéricas x ,
 - y determinar analíticamente a continuación el efecto buscado (movimiento, reacción o esfuerzo) en el lugar indicado en función de x .
- La dificultad que puede aparecer es la de determinar cuántos tramos tienen expresiones algebraicas distintas. Por ello lo mejor es empezar dibujándola a estima, lo cual exige conocer el método *indirecto*.
- La expresión analítica de una línea de influencia sólo debe obtenerse cuando sea estrictamente necesario;
 - si es necesario determinar la expresión analítica, probablemente sea más fácil hacerlo por el método directo.

8.6 Método indirecto

Reciprocidad sí, reciprocidad no

A este método se le denomina frecuentemente *de reciprocidad*. Efectivamente, para demostrar las *reglas prácticas* que daremos más abajo tendremos que hacer uso de ese teorema. No obstante, una vez establecidas las *recetas apropiadas*, el alumno podrá aplicarlas sin hacer alusión alguna al bonito teorema.⁵

8.6.1 Movimientos

Obtención

En el apartado 8.1, fórmulas (8.1-2), aplicamos ya el teorema de la reciprocidad para encontrar —lo que entonces no sabíamos que era— la línea de influencia de un giro. Vimos que coincide con la deformada de la estructura cuando se aplica sobre ella un momento exterior unidad (ver fórmula (8.1-1)). Hagámoslo general: en la figura 8.8a queremos obtener la línea de influencia del movimiento vertical v_C para carga vertical. En lugar de hacerlo por el método directo como sugiere la propia figura, aplicamos reciprocidad entre los dos estados de carga que afectan a la misma estructura de las figuras 8.8a y b; resulta:

$$1 \times v(x)^{(P_{C=1})} = 1 \times v_C(x)$$

$$v_C(x) = v(x)^{(P_{C=1})}$$

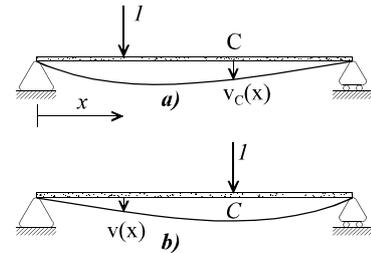


Figura 8.8
Línea de influencia de un movimiento y deformada para carga novia unidad

El resultado anterior muestra que la línea de influencia de la flecha en C coincide con la deformada para una carga vertical unidad en C . De igual manera, la línea de influencia del giro θ_C coincidirá con la deformada $v(x)$ causada por $M_C = 1$. La conclusión es:

Regla práctica

La l.i. de un movimiento coincide con la deformada debida a la carga unidad "novia" del movimiento.

Distinta raza pero igual aspecto

Es importante que distingamos entre línea de influencia y deformada. En el caso de giro, las unidades de la línea de influencia son *radianes/kN* mientras que las de la deformada producida por el momento son *metros*. $i(x)$, *radianes/kN*, coincide con $v(x)$, *metros*, aunque obviamente no son la misma cosa. Por el método directo calculas la línea de influencia con sus unidades correctas; por el método indirecto calculas *otra cosa* que da el pego: una deformada con la misma expresión analítica que la línea de influencia pero con distintas unidades.

Convenio de signos

Las líneas de influencia obtenidas por el método indirecto resultan con un convenio de signos un tanto particular. En la figura 8.8b pusimos la carga vertical positiva hacia abajo; ello hizo que resultaran positivos los trabajos de cargas hacia abajo con flechas hacia abajo (y de cargas hacia arriba por flechas hacia arriba). Por lo tanto: *allí donde la carga exterior y la deformada $v(x)$ lleven el mismo sentido, el movimiento buscado llevará el sentido que le dimos a la carga "novia" utilizada para hallar $v(x)$* . Así, para la línea de influencia de un giro θ_C (positivo antihorario) hallaremos la deformada producida por $M_C = 1$ (positivo antihorario). En los tramos donde la deformada sea hacia abajo, la carga vertical hacia abajo producirá giro positivo, y viceversa. Como normalmente las cargas exteriores son hacia abajo, la zona de movimiento positivo suele ser la de deformada hacia abajo.

8.6.2 Reacciones

Obtención

Veamos cómo obtener la línea de influencia de una reacción. En las figuras 8.9a y b se tiene una misma estructura. En la primera de ellas se busca la reacción $V_B(x)$ causada por una carga vertical unidad en la posición genérica x . En la segunda figura, la 8.9b, se ha dibujado la

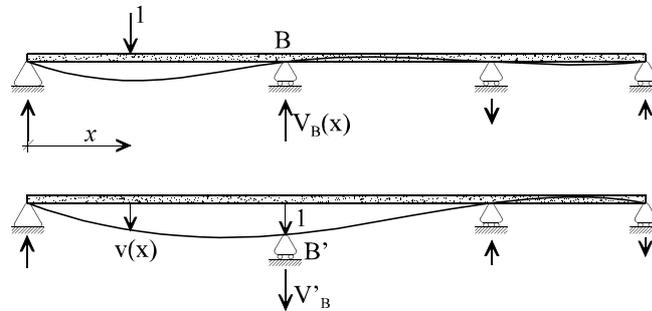


Figura 8.9
Línea de influencia de una reacción y deformada para un desplazamiento -1 de su coacción

⁵ Esto es, sin necesidad de hacer una demostración de la *receta* cada vez que se aplica; igual que aplicamos los teoremas de Tales y de Pitágoras de forma rutinaria.

deformada que resulta de dar un movimiento $v_B = -1$ a la coacción correspondiente (el signo menos es porque hemos tomado como positiva la reacción hacia arriba). La reciprocidad establece:

$$1 \times v(x)^{(v_B = -1)} + V_B(x) \times (-1) = V_B \times 0 = 0$$

$$V_B(x) = v(x)^{(v_B = -1)}$$

El segundo sumando conviene entenderlo como el trabajo de la fuerza $V_B(x)$ que está suplantando al apoyo en mantener v_B nulo. V_B es la fuerza que en ausencia de apoyo en B haría $v_B = -1$.

Regla práctica

La l.i. de una reacción coincide con la deformada que se produce al mover su coacción una unidad en sentido contrario al de la propia reacción.

8.6.3 Esfuerzos

Obtención

Demostrar mediante la reciprocidad la regla práctica que se da a continuación es mucho más complicado que en los casos anteriores. Recomendamos al alumno interesado que busque la demostración en los libros de los autores serios, porque muchas de las que se ofrecen habitualmente son un *camelo*.

Regla práctica

La l.i. de un esfuerzo en una sección coincide con la deformada que se produce en la estructura cuando se la mutila de la siguiente manera: se corta la estructura por la sección y se impone un movimiento relativo novio unidad entre los dos labios del corte, manteniendo nulos simultáneamente los movimientos relativos no-novios.

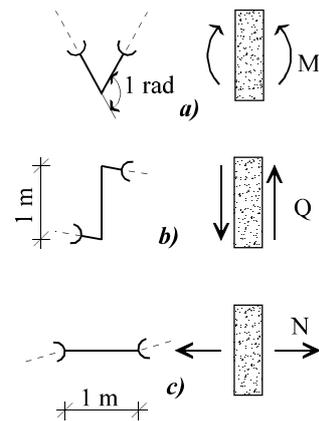


Figura 8.10 Kit de prótesis para la obtención de líneas de influencia de esfuerzos

Para materializar un movimiento relativo unidad manteniendo nulos los otros, conviene imaginar que *injeramos* la prótesis adecuada del juego de la figura 8.10. Ve a la figura 8.7b y comprueba que coincide con la deformada que se obtendría cortando por la sección *a* e instalando la primera prótesis del kit de la figura 8.10.

Movimientos pequeños

Es preciso convenir que los movimientos relativos impuestos por las prótesis son muy pequeños, aunque el de la primera sea de 1 radián y los demás de 1 m. Conviene pensar que son todos del orden de 10^{-6} unidades y que la magnitud de la deformada se multiplicará *a posteriori* por 10^6 ; de lo contrario tendríamos escrúpulos en mantener que $\text{sen } \theta = \theta$ para ángulos de 1 radián.

Propiedad importante

Cuando se corta una estructura isostática por una sección, resulta un mecanismo inestable que nos permite colocar cualquier prótesis con entera libertad: no hay que deformar nada, sólo producir movimientos de traslación y giro que resultan en expresiones lineales. Ello nos indica la importante propiedad de que *las líneas de influencia de esfuerzos en estructuras isostáticas se componen de segmentos rectos*.

Ejemplos importantes

La figura 8.11 contiene ejemplos de líneas de influencia del momento flector y del esfuerzo cortante en una viga biapoyada que usarás con frecuencia para obtener los de estructuras de vigas más complicadas. La prótesis para la obtención de la primera exige que los ángulos $|\theta_A|$ y $|\theta_B|$ sumen $\theta_C = 1$. Para que v_C sea el mismo por ambos lados, $|\theta_A| x_C = |\theta_B| (L - x_C)$. Por consiguiente $|\theta_A| = 1 - x_C/L$, $|\theta_B| = x_C/L$. La expresión de la línea de influencia del momento flector en la sección $x = x_C$ es:

$$i(0 \leq x \leq x_C) = \left(1 - \frac{x_C}{L}\right) x$$

$$i(x_C \leq x \leq L) = \frac{x_C}{L} (L - x)$$

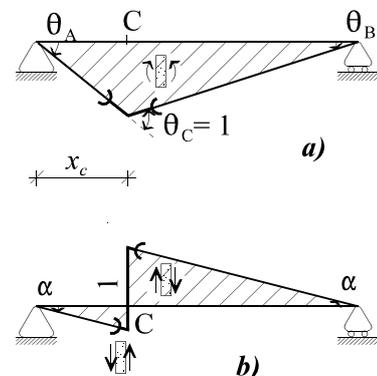


Figura 8.11 Líneas de influencia del flector y del cortante en C (signos para carga vertical hacia abajo)

Recuerda que la l.i. del esfuerzo cortante **no** se obtiene derivando la expresión anterior. La prótesis de la figura 8.10b exige que la pendiente

α en los dos tramos rectos de la figura 8.11b sea la misma y que $\alpha x_c + \alpha(L - x_c) = 1$. Por lo tanto $\alpha = 1/L$. Las expresiones de la l.i. buscada son:

$$i(0 \leq x < x_c) = \frac{x}{L}$$

$$i(x_c < x \leq L) = -\frac{L-x}{L}$$

En los dos casos anteriores hemos tomado como positivas las flechas hacia abajo, para que las l.i.'s buscadas correspondan a carga unidad hacia abajo. Así, en los tramos en que $v(x)$ es hacia abajo, la carga vertical hacia abajo producirá esfuerzos como los de la figura 8.10, y viceversa.

Resumen:

- Para pintar una l.i. a estima, el método indirecto propone las siguientes reglas prácticas (ver tabla 8.2):
 - para *movimientos*: pintar la deformada que produce una fuerza (o momento) novia unidad aplicada sobre el lugar correspondiente de la estructura intacta;
 - para *reacciones*: pintar la deformada que se produce al imponer a la coacción novia un desplazamiento -1 (esto es, en sentido opuesto al de la reacción positiva);
 - para *esfuerzos*: pintar la deformada de la estructura *mitilada* de la siguiente manera:
 - ▶ cortando la estructura por la sección dada e
 - ▶ imponiendo un movimiento relativo novio unidad entre los dos labios del corte (el que impone la *prótesis* correspondientes),
 - manteniendo nulos los demás movimientos relativos.
- Además de para pintar, las reglas anteriores sirven también para encontrar las expresiones analíticas correspondientes.
- El *convenio de signos* resultante es el de que si la carga exterior y la deformada pintada llevan el mismo sentido, los movimientos, reacciones o esfuerzos buscados son del mismo signo que los de los novios que produjeron la deformada.
- En estructuras isostáticas las l.i.'s de reacciones y esfuerzos están compuestas por segmentos rectos;
 - las l.i.'s de movimientos son curvas en todos los casos

Tabla 8.2
Procedimientos de obtención de líneas de influencia

Procedimiento	Línea de influencia de:	Aplicar:	Sobre estructura:
Directo ¹	lo que sea	carga unidad en posición x	intacta
Indirecto o de reciprocidad ²	movimiento u, v, θ	carga novia unidad	intacta
	reacción H, V, M	movimiento novio -1	sin coacción
	esfuerzo N, Q, M	movimiento relativo novio unidad	mutitada ³ con prótesis

¹ Obtener *lo que sea* (movimiento, reacción o esfuerzo) en la sección S en función de x . La función $i(x)$ obtenida es la *genuina* l.i.

² La *deformada* $v(x)$ que resulta es *semejante* a la l.i., $i(x)$.

³ La estructura *mutitada* ha sido cortada por la sección S para intercalar la *prótesis* apropiada (figura 8.10) que imponga un movimiento relativo novio unidad entre las dos labios del corte sin permitir otros movimientos relativos.

8.7 Usos de una línea de influencia

Dos usos

Una línea de influencia sirve para dos cosas:

- Su uso *fundamental* es el de encontrar las *posiciones* más peligrosas de las cargas exteriores. Para este fin es indispensable.
- Un uso *secundario* puede ser el de *cuantificar* el daño que esas cargas hacen desde esas posiciones. Sin embargo, para esto suele ser más fácil el método convencional.

$i(x)$ no, $i(x)$ sí

Para cumplir su primer servicio basta a menudo con un dibujo a estima de la l.i. Para cuantificar el daño, en cambio, es necesario (i) conocer la expresión analítica $i(x)$ y (ii) integrarla, lo cual muchas veces no compensa.

Cargas P y q

El *daño* (movimiento, reacción, esfuerzo) que cargas puntuales P_i desde posiciones x_i y cargas distribuidas $q(x)$ en intervalos $x \in [a, b]$ producen en la sección S para la que se obtuvo la línea de influencia $i(x)$ viene dado por:

$$(8.7-1) \quad \text{Daño} = \sum_j P_j i(x_j) + \int_a^b q(x) i(x) dx$$

Si la carga $q(x)$ es uniforme q_0 , su expresión sale fuera de la integral y ésta se convierte en el área bajo la curva $i(x)$. Por consiguiente:

- Para encontrar la posición más peligrosa de una carga puntual, se busca la máxima ordenada de $i(x)$.
- Para encontrar la posición más peligrosa de una carga uniforme, se busca la mayor área bajo la curva $i(x)$.

Muy a menudo, las cargas puntuales pueden actuar en grupos de dos o más, separadas por intervalos fijos a (figura 8.12). Si tales cargas puntuales caen sobre tramos curvos de la línea de influencia $i(x)$, para encontrar sus posiciones pésimas no hay más remedio que encontrar los valores extremos de:

$$\text{Daño}(x) = P_1 i(x) + P_2 i(x+a) + P_3 i(x+2a) + \dots$$

mediante el viejo truco de derivar e igualar a cero. Para esto no hay más remedio que disponer de la expresión analítica de $i(x)$. La dificultad es mucho menor si las cargas caen sobre intervalos rectos de la l.i. En tal caso la regla es *colocar una de las cargas puntuales sobre el vértice* de la l.i., y las otras a derecha o izquierda, donde se obtenga más efecto.

Así, para obtener el máximo momento flector en una sección C de una viga biapoyada con dos cargas puntuales separadas a y una sobrecarga uniforme q_0 , la l.i. de la figura 8.11a pide:

- que se coloque una carga puntual sobre C y la otra a su derecha,⁶
- que se coloque la carga uniforme sobre *toda* la viga.

El valor así conseguido será:

$$M(x_C) = P \cdot i(x_C) + P \cdot i(x_C + a) + q_0 \int_{x=0}^{x=L} i(x) dx = P \left[\frac{x_C}{L} (L - x_C) + \frac{x_C}{L} (L - x_C - a) \right] + q_0 \frac{1}{2} L \frac{x_C}{L} (L - x_C)$$

y corresponderá al máximo momento flector positivo en C (porque cargas e $i(x)$ llevan el mismo sentido). El máximo momento flector negativo será cero puesto que $i(x)$ muestra la imposibilidad de producir momento flector negativo.

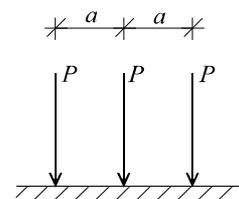


Figura 8.12
Tren de cargas
de algunas instrucciones

⁶ Porque en la figura 8.11a se observa que $i(x)$ decrece menos hacia la derecha que hacia la izquierda del vértice.

Si queremos obtener el máximo esfuerzo cortante en C nos fijamos en la l.i. de la figura 8.11b. En ella observamos:

- Que el valor extremo del esfuerzo cortante será el negativo, que se obtiene cargando:
 - con una carga puntual P sobre el punto C y otra a su derecha, y
 - con una carga uniforme q_o en el intervalo $x_c \leq x \leq L$:

$$Q_C^- = -P \left[\left(1 - \frac{x_C}{L} \right) + \left(1 - \frac{x_C + a}{L} \right) \right] - q_o \frac{1}{2} L \left(1 - \frac{x_C}{L} \right)$$

- Que el máximo cortante positivo en C (que probablemente no tendrá interés) se obtendrá:
 - colocando una carga puntual sobre C ,
 - la otra carga puntual, a su izquierda (suponiendo $a \leq x_C$),
 - y la sobrecarga uniforme, en $[0, x_C]$:

$$Q_C^+ = P \left[\frac{x_C}{L} + \frac{x_C - a}{L} \right] + q_o \frac{1}{2} x_C \frac{x_C}{L}$$

Observación *muy importante*

Muchas veces es preferible realizar el cálculo de los valores extremos de forma convencional (sin emplear la $i(x)$), tras colocar las cargas en las posiciones pésimas detectadas con sólo un esquema de la $i(x)$.

Resumen:

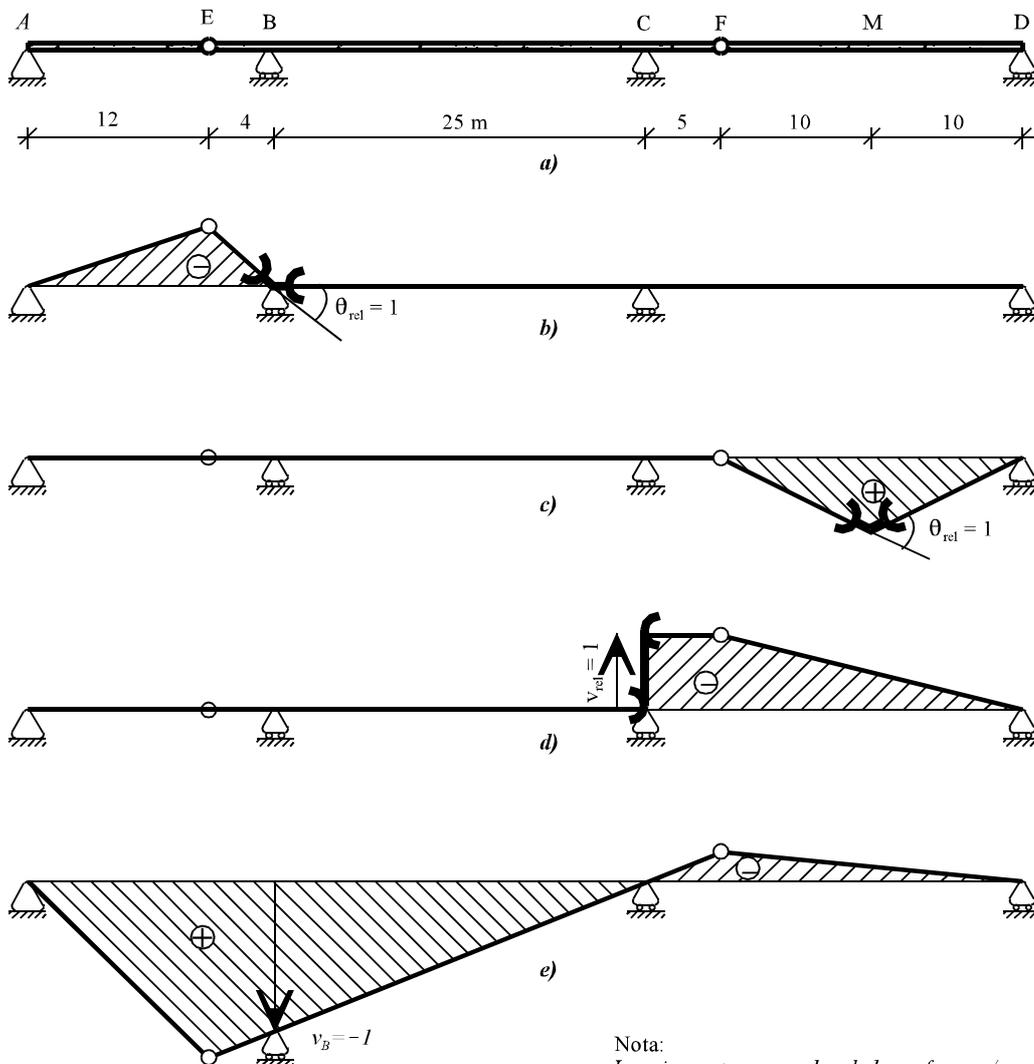
- El uso *fundamental* de las l.i.'s es el de encontrar las posiciones pésimas de las cargas exteriores.
 - Cuando se presenta este problema se debe pintar la l.i. a estima (método indirecto) inmediatamente;
 - casi siempre basta con esta representación gráfica y no se precisa la expresión analítica $i(x)$.
- Antes de hacer el cálculo analítico de $i(x)$ conviene asegurarse de que es imprescindible
 - porque sin él no sabemos colocar las cargas con precisión, o
 - porque nos lo exigen *tasativamente* en el problema.
- Si basta con el aspecto de $i(x)$ para colocar las cargas, puede ser más simple evaluar el daño por el método convencional.
- El uso *secundario* de las l.i.'s es el de evaluar el *daño* que las cargas producen desde ciertas posiciones:
 - Este *daño* viene dado por (8.7-1).
 - Si la $i(x)$ es recta, las cargas puntuales conviene ponerlas:
 - una, sobre el vértice
 - las demás, a izquierda o derecha, donde $i(x)$ valga más.
 - Si la $q(x)$ es uniforme, la integral es q_o por el área de $i(x)$ bajo la carga.

8.8 Problemas de líneas de influencia

Problema 8.8.1: L.i.s de esfuerzos y reacciones en viga continua isostática

Sobre la viga continua de la figura 8.13a, que tiene rótulas en las secciones E y F, pueden actuar las siguientes sobrecargas: (i) un tren de cargas móviles formado por 2 cargas puntuales de 20 t cada una separadas 2 metros entre sí, y (ii) una sobrecarga uniforme de 2 t/m que puede cubrir cualquier zona de la viga. Se pide obtener:

- Los momentos flectores extremos (máximo positivo y máximo negativo) en B.
- Los momentos flectores extremos en M.
- El máximo esfuerzo cortante a la derecha de C, con su signo.
- La máxima reacción en B, con su signo.



Nota:
Los signos + y - son los de los esfuerzos/reacciones que resultan para carga vertical unidad hacia abajo!

Figura 8.13
Estructura y líneas de influencia del problema 8.8.1

Se trata de una viga isostática. Las l.i.'s de sus esfuerzos y reacciones nos han de salir compuestas por tramos rectos.

a) En efecto: Al cortar en B para colocar la prótesis del momento, el tramo izquierdo se convierte en un mecanismo que se deforma a voluntad mientras que el tramo BD ofrece resistencia. La deformada que se obtiene es la de la figura 8.13b. El ángulo a la izquierda de B vale 1 "radián-muy-pequeño" y la ordenada sobre E vale 4 "metros muy pequeños."⁷ Se observa (i) que sólo es posible obtener momento flector *negativo* cargando *contra* la $v(x) \equiv i(x)$ en el tramo AB , y (ii) que (paradójicamente a primera vista) las cargas sobre BD no afectan al momento flector en B ⁸. Para maximizar el momento flector negativo, la l.i. pide colocar una carga puntual sobre E , la otra a su izquierda, y la carga uniforme, extendida sobre AB . El valor resultante será:

$$M_{C, \text{máx}}^- = P \left(v_E + \frac{10}{12} v_E \right) + q_o \frac{1}{2} v_E \overline{AB} = 210,67 \text{ m}\times\text{t}$$

b) Cortando en M y colocando la prótesis del momento se obtiene la deformada de la figura 8.13c sin resistencia. Por simple inspección se detecta que con cargas hacia abajo no es posible generar momento flector negativo en M . Al valer 1 radián-muy-pequeño el giro relativo en la prótesis de M , los giros relativos en F y D valdrán $\mp \frac{1}{2}$ radián-muy-pequeño, y $v_M = 5$ metros-muy-pequeños. Colocaremos las cargas puntuales una sobre M y la otra a cualquier lado de ella, y la carga uniforme, extendida sobre FD . El momento flector resultante será:

$$M_{M, \text{máx}}^+ = P \left(v_M + \frac{8}{10} v_M \right) + q_o \frac{1}{2} v_M \overline{FD} = 280 \text{ m}\times\text{t}$$

c) La razón por la que se especifica que el cortante se mida "a la derecha" de C es que en ese apoyo hay aplicada una carga puntual (su reacción) y por ello hay un salto en el valor de este esfuerzo. Cortando "a la derecha" de C e instalando la prótesis del esfuerzo cortante se obtiene la l.i. de la figura 8.13d. El tramo CF ha de ser horizontal porque la prótesis exige que la deformada a la izquierda de C y a la derecha de C sean paralelas (giro relativo nulo entre los labios del corte). Resulta $v_C = v_F = -1$ metro-muy-pequeño. Se ve inmediatamente que no hay posibilidad de causar un cortante positivo en ese lugar; el máximo negativo se alcanzará colocando las cargas puntuales en cualquier lugar entre C y F , y la repartida, extendida sobre CD :

$$Q_{C^+, \text{máx}}^- = 2P v_C + q_o \left(v_C \overline{CF} + \frac{1}{2} v_F \overline{FD} \right) = 70 \text{ t}$$

d) Para obtener la l.i. de la reacción en B (positiva hacia arriba), hacemos descender 1 metro-muy-pequeño este apoyo. Con ello la estructura adopta la deformada de la figura 8.13e. Recuérdese que no debe haber quiebro en B , sólo descenso. Resulta $v_B = 1$, $v_E = 29/25$, $v_F = -5/25$, todas ellas en "metros-muy-pequeños." Para producir reacción hacia abajo cargaríamos en CD . La mayor se obtendrá hacia arriba cargando en AC . Colocaremos una carga puntual sobre E , la otra, a su derecha, y la carga repartida, extendida sobre AC . Resulta:

$$V_B^+ = P \left(v_E + \frac{27}{29} v_E \right) + q_o \frac{1}{2} v_E \overline{AC} = 92,36 \text{ t}$$

Enseñanzas:

- Las líneas de influencia de esfuerzos y reacciones en estructuras isostáticas están compuestas por tramos rectos.
- En vigas isostáticas el método indirecto permite no sólo dibujar la l.i. con toda facilidad sino también obtener su ordenadas $i(x)$ de forma inmediata.
- Hemos obtenido los efectos pésimos usando la línea de influencia (uso secundario de ella) sin necesidad de escribir la expresión analítica $i(x)$.

⁷ Para cubrir las apariencias se sugiere imaginar multiplicados por 10^{-3} todos estos valores y luego desmultiplicar los resultados finales.

⁸ Efectivamente, una carga en el tramo BC se *escapará* por los apoyos en B y C . Los tramos laterales son como *apéndices* que *cuelgan* de la estructura principal transmitiéndole sus cargas pero no resistiendo ninguna.

Problema 8.8.2: L.i.s de reacciones y esfuerzos en arco isostático

El arco triarticulado de la figura 8.14a tiene por directriz una parábola de 2º grado. Se desean obtener las siguientes líneas de influencia para carga vertical unidad:

- a) De la reacción horizontal en A.
- b) Del esfuerzo axil en C.
- c) Del momento flector en B.

Se desea saber también:

d) Cuánto valdrán los momentos flectores máximos positivo y negativo en B causados por un tren de cargas compuesto por dos cargas verticales de 20 t cada una, separadas 2,5 m entre sí. (Examen septiembre 89.)

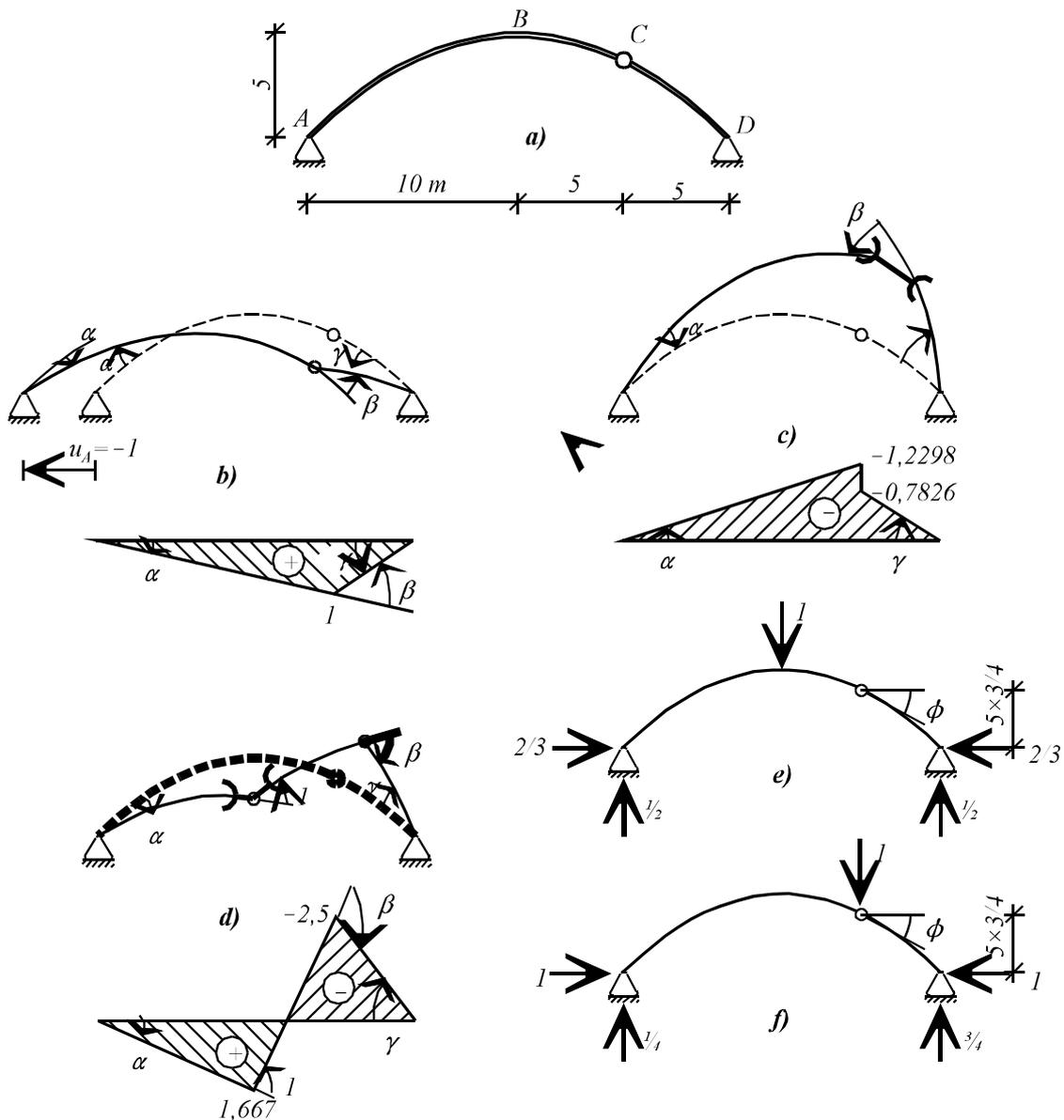


Figura 8.14
Estructura y líneas de influencia del problema 8.8.2

Solución 1: método indirecto (desaconsejado)

a) Si consideramos positivos la reacción y el movimiento en A hacia la derecha, daremos un movimiento $u_A = -1$ y la deformada resultante será la línea de influencia. Ésta consistirá en los movimientos verticales originados por los giros α (absoluto) en A , β (relativo) en C y γ (absoluto) en D . Si la deformada se parece, como esperamos, a la de la figura 8.14b, α será negativo y los demás, positivos. No obstante, los supondremos a todos positivos y el cálculo nos dará sus valores con signo. Escribimos las siguientes ecuaciones: suma de ángulos girados, cero; desde D , $v_A = 0$ y $u_A = -1$:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\gamma 20 + \beta 15 = 0 \\ -\beta \frac{3}{4} 5 = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha = -\frac{1}{15} \\ \beta = \frac{4}{15} \\ \gamma = \frac{1}{5} \end{array}$$

La l.i. pedida, dibujada sobre el eje de abscisas y no sobre la directriz de la estructura, tiene el aspecto que se muestra en la parte inferior de la propia figura 8.14b. Observa los significados físicos de los ángulos α , β y γ . El valor en el pico es $i(x=15) = -v_C = -15\alpha = 1$. (El cambio de signo es para adecuarlo con el convenio de signos de las líneas de influencia, positivo si lleva el sentido de la carga exterior.)

b) Para la l.i. del esfuerzo axil en C , cortamos en este punto y obligamos a que los dos labios del corte se separen una unidad en la dirección de su tangente (para colocar la prótesis correspondiente); sin embargo, no debe haber giro entre ellos, pero sí lo habrá en la rótula C (figura 8.14c). Sean α , β y γ los ángulos girados en A , C y D . La inclinación de la directriz en C es de $\phi = \text{arc tg}(1/2)$ (cálculo analítico o aplicación de la regla de la figura 2.32), por lo que la separación entre los labios del corte será $u = \cos \phi = 0,894$ m, $v = -\text{sen } \phi = -0,447$ m. Escribimos las siguientes tres ecuaciones: giro total, nulo; desde A , $u_D = 0$, y $v_D = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 0,894 + \beta \frac{3}{4} 5 = 0 \\ \alpha 20 - 0,447 + \beta 5 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 0,08195 \\ \beta = -0,2384 \\ \gamma = -0,1565 \end{array}$$

La l.i. pintada sobre el eje de abscisas se muestra en la figura 8.14c inferior. En ella, $i(x=15-\epsilon) = -v_C^- = -15\alpha = -1,229$ m, $i(x=15+\epsilon) = -v_C^+ = -5\gamma = -0,782$ m. En la solución 2ª de este mismo problema encontrarás el significado físico del salto $v = -0,447$ en el punto C .

c) Para dibujar la l.i. del momento flector en B , cortamos en este punto y colocamos la prótesis correspondiente. La estructura nos quedará contrahecha, con el aspecto de la figura 8.14d. Para calcular los giros α , β y γ (que supondremos positivos y el cálculo nos confirmará si se parecen a nuestra intuición de la figura) planteamos las siguientes tres ecuaciones: ángulo total girado, cero; desde A , $u_D = 0$ y $v_D = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + 1 + \beta - \gamma = 0 \\ 1 \times 5 + \beta \frac{3}{4} 5 = 0 \\ \alpha 20 + 1 \times 10 + \beta 5 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha = -0,1667 \\ \beta = -1,3333 \\ \gamma = -0,5000 \end{array}$$

La l.i., dibujada sobre el eje de abscisas, se da bajo la propia figura 8.14d. Las ordenadas de los puntos de quiebro serán: $i(x=10) = 10 \times \alpha = 1,667$ m, $i(x=15) = -\gamma \times 5 = 2,5$ m.

d) Para obtener el máximo momento positivo en B se colocarán las cargas puntuales de la siguiente manera: una sobre el propio B y la otra 2,5 m a su izquierda. Para obtener el máximo negativo, una sobre C y la otra a su derecha (sobre el tramo de menor pendiente). Los valores resultantes son:

$$M_{B,máx}^+ = P \left(v_B + \frac{7,5}{10} v_B \right) = 58,33 \text{ m} \times t$$

$$M_{B,máx}^- = P \left(v_C + \frac{2,5}{5} v_C \right) = 75 \text{ m} \times t$$

Solución 2: método ecléctico (recomendado)

Al dibujar las deformadas por el método indirecto se observa que están compuestas por segmentos rectos, porque son productos de giros α , β , γ por distancias, movimientos de sólidos rígidos. El aspecto de cada una de las líneas se puede dibujar a estima; todo lo que queda por conocer son las ordenadas en los puntos de quiebro. Estos valores aislados se calculan con gran facilidad por el método *directo*.

Todas nuestras l.i.'s tienen sus vértices sobre los puntos B y/o C . Todo lo que necesitamos, pues, es encontrar sus valores para cargas unidad sobre estos puntos. Resolvemos las estructuras isostáticas de las figuras 8.14e y f. Las reacciones verticales se calculan por proporción inversa a su distancia a la carga puntual, como en una viga biapoyada, y las reacciones horizontales, anulando el momento flector en la rótula C . La figura 8.14e indica que la l.i. del momento flector en B debe tener en B una ordenada de

$$\frac{1}{2} \times 10 - \frac{2}{3} \times 5 = 1,667$$

La figura 8.14f permite determinar:

- Que la l.i. de la reacción horizontal en A deberá tener en C una ordenada de 1.
- Que la l.i. del esfuerzo axil en C deberá tener en C una ordenada de:

$$N_{C^-} = -1 \cos \phi - \frac{3}{4} \operatorname{sen} \phi = -1,2298$$

$$N_{C^+} = -1 \cos \phi - \left(\frac{3}{4} - 1 \right) \operatorname{sen} \phi = -0,7826$$

siendo ϕ la inclinación de la tangente en C , sobre la que proyectamos para obtener los esfuerzos axiles. El primer valor sale de considerar que la carga está un poquito a la izquierda de C , por lo que el axil resulta sólo de proyectar las reacciones en D . El segundo valor resulta de considerar la carga actuando un poquito a la derecha de C , por lo que la carga vertical *total* a proyectar sobre la tangente es la suma de la reacción vertical en D y la carga unitaria exterior. El significado físico del salto es, pues, $1 \times \operatorname{sen} \phi$, el seno del ángulo de inclinación de la tangente.

- Que la l.i. del momento flector en B ha de tener en C una ordenada de:

$$\frac{1}{4} \times 10 - 1 \times 5 = -2,5$$

Enseñanzas:

- Hemos comprobado otra vez que las l.i.'s de esfuerzos y reacciones en estructuras isostáticas son funciones lineales por tramos como consecuencia de *coincidir* con deformadas compuestas por movimientos de sólido rígido.
- Hemos observado que en arcos isostáticos la aplicación del método indirecto no es tan sencilla como lo fue en el problema anterior, de viga continua.
- El procedimiento más sencillo ha resultado ser uno ecléctico. En él hemos dibujado a estima (por el método indirecto) los tramos rectos de que se componían las l.i.'s y hemos calculado por el método directo los pocos valores *concretos* que necesitamos.
- Con la l.i. definida por los vértices de la poligonal, resulta muy fácil hallar los valores extremos de las reacciones y esfuerzos (sin necesidad de acudir al método *convencional*).

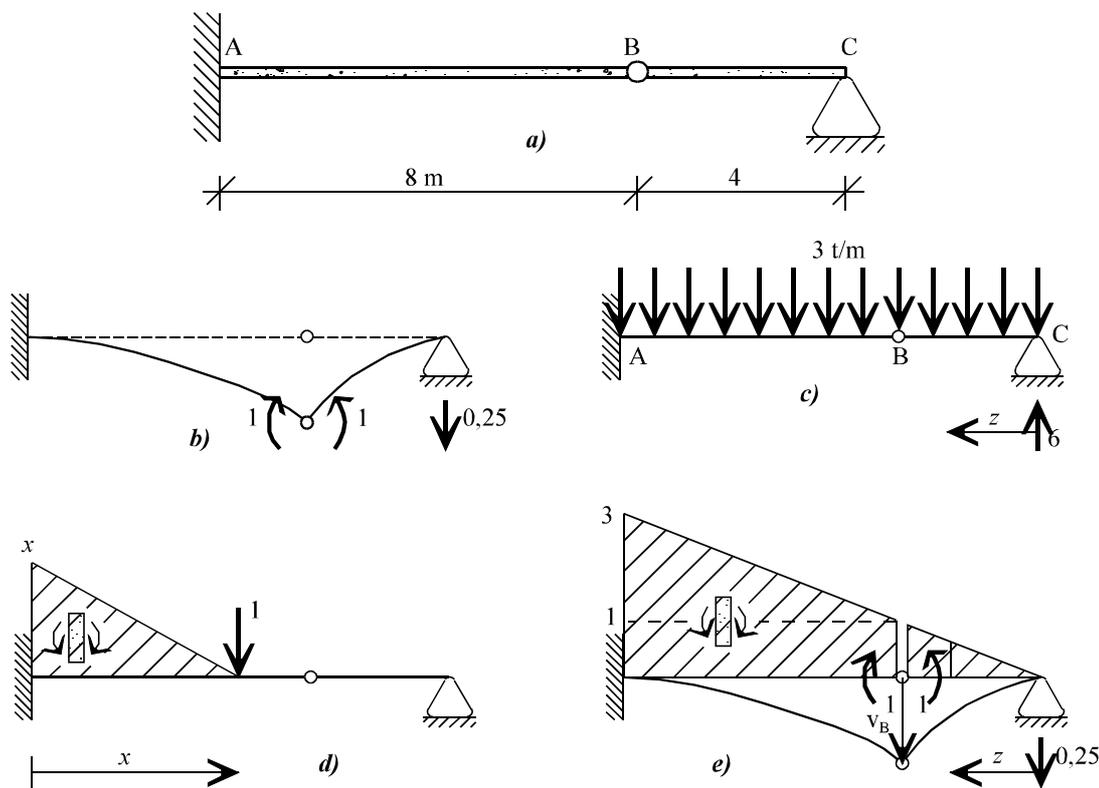


Figura 8.15 Estructura y soluciones del problema 8.8.3

Problema 8.8.3: L.i. de giro relativo en rótula

La estructura de la figura 8.15a consiste en una viga empotrada en su extremo A, apoyada en su otro extremo C y que tiene una rótula en el punto intermedio B. Su sección es constante, con rigidez $EI = 100.000 \text{ t}\cdot\text{m}^2$. Se pide:

- a) Obtener la línea de influencia del giro relativo en la rótula B para una carga vertical hacia abajo. Se darán sus ecuaciones analíticas y su representación gráfica.
- b) Determinar los valores máximo y mínimo del giro mencionado causados por una carga uniforme de 3 t/m que puede extenderse sobre cualquier parte de la viga. (Examen febrero 96.)

Conviene recordar que las l.i.'s de movimientos **no** son rectas ni siquiera en una estructura isostática, como es la que tenemos. La regla para pintar la línea de influencia de un giro es pintar su equivalente, la deformada debida a un momento unidad. Como aquí necesitamos la de $\theta_B^+ - \theta_B^-$, la deformada buscada será la debida a una pareja de momentos $M_B^+ = 1$ con $M_B^- = -1$ (figura 8.15b). Su aspecto será el de la propia figura 8.15b.

b.) Encontrado su aspecto, podemos afirmar: (i) que no hay posibilidad de producir un θ_B negativo; su valor máximo es, pues, cero; y (ii) que el máximo positivo se obtiene cargando toda la viga. En un examen pasaríamos a resolver la segunda parte por el método convencional; no correríamos el riesgo de que un error en la determinación analítica nos estropeará el resultado. Y eso también vamos a hacer aquí.

La reacción $V_C = 6$ (figura 8.15c) se calcula con la condición de momento flector nulo en B. Llamando z a la abscisa medida desde C, se tiene:

$$v_C = \theta_B \times 4 + \frac{1}{EI} \int_A^C M(z) z dz = 0$$

$$\theta_B = -\frac{1}{4EI} \int_0^{12} (6z - 1,5z^2) z dz = 10,8 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

a.) Para calcular la expresión de la l.i. entre A y B elegimos el método directo. Colocamos una carga unidad en la posición x , dibujamos la ley de momentos flectores que resulta (figura 8.15d) y calculamos el giro en la rótula imponiendo flecha nula en el extremo C :

$$v_C \equiv -\frac{1}{2} \frac{x}{EI} x \left(12 - \frac{1}{3} x \right) + \theta_B \times 4 = 0$$

$$\theta_B (0 \leq x \leq 8) = \frac{36x^2 - x^3}{24EI}$$

Cuando la carga está entre B y C , dibujamos su ley de flectores y usamos la coordenada z para escribir la ecuación de la flecha en C :

$$v_C \equiv \frac{-2z}{2EI} 8 \left(12 - \frac{1}{3} 8 \right) + \theta_B 4 + \frac{1}{2} \frac{z}{EI} \left(1 - \frac{z}{4} \right) (4-z) \left(4 - \frac{2}{3} (4-z) \right) + \frac{1}{2} \frac{z}{EI} \left(1 - \frac{z}{4} \right) z \frac{2}{3} z = 0$$

a.) La última expresión algebraica resulta bastante complicada. Probemos el método indirecto. La ley de momentos flectores para la carga de la figura 8.15b es la que se muestra en la figura 8.15e. La extensión del *cero* sobre la rótula tiende a cero y puede ser ignorada. La deformada del tramo BC puede considerarse que es la de una viga biapoyada con un descenso v_B del apoyo izquierdo más un momento $M_B = I$ sobre el mismo apoyo. Calculemos primero el descenso de B partiendo de A :

$$v_B = \frac{1}{2} \frac{2}{EI} 8 \frac{2}{3} 8 + \frac{1}{EI} 8 \times 4 = \frac{224}{3EI}$$

(Comprueba que este valor coincide con el valor $\theta_B(x=8)$ encontrado antes.) Usando la misma coordenada z del caso anterior y la fórmula (8.1-2b), la deformada es:

$$v(z) = \frac{224}{3EI} \frac{z}{4} - \frac{1 \times z(4-z)(4+z)}{6 \times 4EI} = \frac{432z + z^3}{24EI}$$

$$\theta_B (0 \leq z \leq 4) = \frac{432z + z^3}{24EI}$$

El primer término corresponde al descenso de apoyo, y el segundo a la flecha por el momento $M_B = I$. Si se precisa escribir la expresión en función de x , no hay más que reemplazar $z \rightarrow 12 - x$. Puedes comprobar numéricamente que esta expresión da los mismos valores que la fórmula para calcular θ_B encontrada más arriba.

b.) Con las expresiones analíticas de la l.i. podemos recalculamos el giro producido por la sobrecarga uniforme extendida sobre toda la viga:

$$\theta_{B, \text{máx}} = \frac{3}{24EI} \left[\int_{x=0}^{x=8} (36x^2 - x^3) dx + \int_{z=0}^{z=4} (432z + z^3) dz \right] =$$

$$= \frac{3}{24EI} (5120 + 3520) = 10,8 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Enseñanzas:

- Hemos comprobado que las l.i.'s de movimientos *no* son rectas ni siquiera en estructuras isostáticas.
- Con sólo el croquis de la línea de influencia, hemos podido determinar la distribución pésima de la carga
- Conocida la distribución pésima de la carga, hemos calculado su efecto por el método convencional sin necesidad de obtener la expresión analítica de la l.i.
- Hemos determinado las expresiones analíticas de la l.i. sólo porque nos lo exigían. En el ejercicio profesional no lo habríamos hecho.
- Para determinar las diferentes expresiones analíticas de la l.i. hemos alternado los métodos directo e indirecto, buscando en cada caso el más eficiente.
- Al emplear el método indirecto, hemos calculado la deformada sumando las contribuciones de un movimiento de sólido rígido (tramo recto) con la de un momento en el extremo de la viga. Es conveniente aplicar con soltura estas fórmulas (8.1-2) porque se usan muy a menudo en estas *lides*.
- Hemos recalculado el efecto pésimo de la carga integrando las expresiones analíticas de la l.i.

Problema 8.8.4: L.i. de cortante en viga continua

La viga de dos vanos de la figura 8.16a es de sección constante. Para ella se pide:

a) Obtener la línea de influencia del esfuerzo cortante en la sección A para una carga vertical hacia abajo.

b) Determinar el máximo valor del esfuerzo cortante negativo en A que puede causar una carga puntual móvil de 25 t.

c) Determinar el máximo valor del esfuerzo cortante positivo en A que puede causar una sobrecarga uniforme de 8 t/m que se puede extender sobre cualquier parte de la viga.

b.) El aspecto de la l.i. del esfuerzo cortante en A se muestra en la figura 8.16b. De ella se desprende que la respuesta del apartado b) se obtiene colocando la carga puntual justo a la derecha del propio punto A. El momento flector negativo en B se calculará por las ecuaciones de compatibilidad de viga continua:

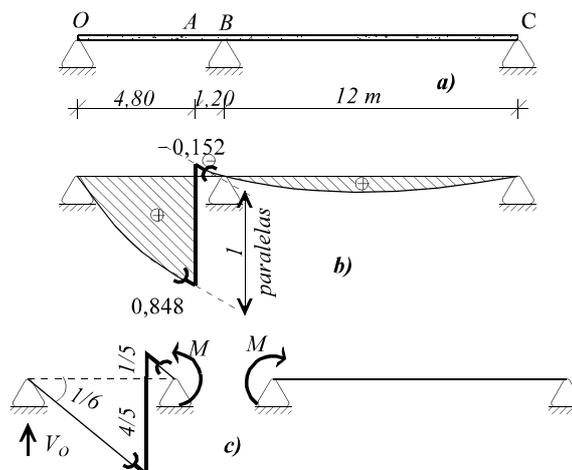


Figura 8.16 Estructura y solución del problema 8.8.4

$$\frac{25 \times 4,8 \times 1,2 \times 10,8}{6 \times 6EI} - \frac{M \times 6}{3EI} = \frac{M \times 12}{3EI}$$

$$M = 7,20 \text{ m} \times t$$

El cortante negativo en A coincide con la reacción en el apoyo O:

$$Q_A = V_O = 25 \frac{1,2}{6} - \frac{7,2}{6} = 3,8 \text{ t}$$

(La ordenada de la l.i. será 3,8/25). Este resultado nos servirá de comprobación más abajo. El valor que solicita el apartado c) se alcanza colocando la sobrecarga uniforme sobre OA y sobre BC. El cálculo de la incógnita hiperestática M es ahora más complejo, por lo que dejamos este apartado para calcularlo usando las expresiones de $i(x)$ que nos exigen.

a.) Resolveremos por el método indirecto para mostrar cómo se genera la l.i. de un esfuerzo en una estructura hiperestática. Como en el cálculo de vigas continuas, independizamos ambas (figura 8.16c). Así podemos dibujar con toda sencillez la l.i. del esfuerzo cortante en A en el tramo isostático. El otro vano queda sin deformar. Sin embargo, el hiperestatismo exige dar continuidad mediante un momento en B. Este momento deformará ambos tramos hasta producir una deformada-l.i. con el aspecto de la figura 8.16b. El valor M del momento flector positivo en B será:

$$-\frac{1}{6} + \frac{M \times 6}{3EI} = -\frac{M \times 12}{3EI} \Rightarrow M = \frac{EI}{36}$$

Las ecuaciones de la l.i. serán:

— En OA:

$$i_1(0 \leq x \leq 4,8) = \frac{1}{6}x + \frac{Mx(6-x)(6+x)}{6 \times 6EI} = \frac{252x - x^3}{1296}$$

— En AB:

$$i_2(4,8 \leq x \leq 6) = -1 + i_1(x) = \frac{-1296 + 252x - x^3}{1296}$$

— En BC:

$$i_3(0 \leq x \leq 12) = \frac{x(12-x)(24-x)}{2592}$$

b₂) Colocando la carga a la derecha de A , el cortante negativo será $25 \times i_2(x=4,8) = -3,8 t$.

c) Extendiendo la sobrecarga uniforme en OA y BC se obtiene:

$$Q_A^+ = 8 \left(\int_0^{4,8} i_1(x) dx + \int_0^{12} i_3(x) dx \right) = 8(2,1376 + 2,0000) = 33,1 t$$

a₂) Las $i(x)$'s se obtienen también con facilidad por el método directo. En él colocamos una carga unidad en OB a la distancia x de O , calculamos el momento hiperestático $M(x)$ (supuesto negativo) en B de la siguiente manera:

$$\frac{1 \times x(6-x)(6+x)}{6 \times 6EI} - \frac{M(x) \times 6}{3EI} = \frac{M(x) \times 12}{3EI}$$

$$M(x) = \frac{x(36-x^2)}{216}$$

(Ésta sería la primera expresión de la l.i. del momento flector en B .) El cortante en A buscado coincide con $V_o - I$ cuando la carga unitaria está en $[0, A^-]$ y con V_o para $x \in [A^+, B]$:

$$(0 \leq x < 4,8) \quad Q_A(x) = - \left[\left(1 - \frac{x}{6} \right) - \frac{M(x)}{6} - 1 \right] = \frac{252x - x^3}{1296}$$

$$(4,8 < x \leq 6) \quad Q_A(x) = - \left[\left(1 - \frac{x}{6} \right) - \frac{M(x)}{6} \right] = \frac{-1296 + 252x - x^3}{1296}$$

Cuando la carga está en el vano de la derecha, se tiene:

$$M(x) = \frac{x(12-x)(24-x)}{432}$$

$$(0 \leq x_2 \leq 12) \quad Q_A = \frac{M(x)}{6} = \frac{x(12-x)(24-x)}{2592}$$

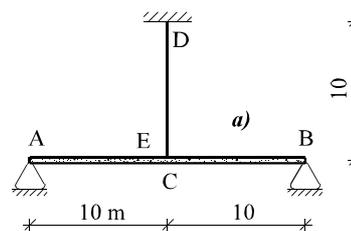
Enseñanzas:

- Un croquis a estima de la l.i. ha sido suficiente para encontrar las posiciones pésimas de las cargas.
 - El croquis de la l.i. se realiza siempre con las reglas prácticas del método indirecto.
- Hemos hallado las expresiones de la l.i. de un esfuerzo en una viga continua hiperestática por los dos métodos:
 - el método directo parece más *comprensible*;
 - para el método indirecto hemos aplicado el truco de:
 - ▶ independizar los tramos,
 - ▶ obtener la l.i. deformando el tramo isostático, y
 - ▶ corregirla para darle la continuidad necesaria
- Una vez obtenidas las expresiones analíticas de la l.i. (que nos exigían) el cálculo de los esfuerzos pésimos ha resultado más sencillo aprovechando dichas expresiones.

Problema 8.8.5: L.i. de axil en tirante

La viga biapoyada AB de la figura 8.17a, de rigidez $EI = 10^5 \text{ t}\cdot\text{m}^2$ está atirantada en C con un tirante CD (figura 8.17a) de rigidez $EA = 6000 \text{ t}$. Se pide:

- a) Obtener la ecuación de la línea de influencia del esfuerzo axil en el tirante para una carga vertical hacia abajo que recorra la viga.
- b) Comprobar la ecuación anterior poniendo una fuerza unidad en C.
- c) Calcular el valor máximo del axil en el tirante cuando recorre la viga un tren de tres cargas de 10 t separadas 1 m entre sí. (Examen febrero 95.)



La viga es hiperestática de grado 1 como consecuencia de tener la redundancia del cable, cuyo alargamiento (por esfuerzo axil) ha de ser compatible con la flecha por flexión de la viga en el centro.

c.) En la vida profesional haríamos el croquis de la línea de influencia como en la figura 8.17b, obtenida cortando el cable en C y aplicando una fuerza P que consiga que, comprimiendo el cable y flectando la viga, los puntos C del cable y C de la viga se separen 1 metro-muy-pequeño. (No hay inconveniente en suponer comprimido el cable: es sólo un artificio de cálculo para obtener una *supuesta deformada que coincidirá con la l.i. verdadera.*)

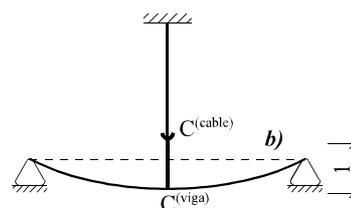


Figura 8.17 Estructura y diagrama del problema 8.8.5

A la vista del croquis, colocaríamos las cargas puntuales centradas en C y obtendríamos el esfuerzo axil en el tirante de la manera convencional. Con trucos de profe repelente, se abreviaría de la siguiente manera.

Tomamos como incógnita hiperestática el esfuerzo axil en el cable, $V_C \equiv T$, supuesto de tracción en el cable y hacia arriba en la viga. Para ser consistentes tomaremos como positivas las flechas hacia arriba:

$$\left[v_c^{(T=1)} + \left(\frac{L}{EA} \right)_{\text{cable}} \right] T = -v_c^{(ext)}$$

Calculamos las flechas en C y en E (1 m a su izquierda) para una carga unidad hacia arriba en C (en seguida verás para qué nos va a servir la segunda):

$$v_C = \frac{1 \times 10 \times 10 \times 30}{6 \times 20 EI} 10 - \frac{1}{2} \frac{5}{EI} 10 \frac{1}{3} 10 = 1,6667 \times 10^{-3} \text{ m} \quad \left(= \frac{PL^3}{48 EI} \right)$$

$$v_E = \frac{1 \times 10 \times 10 \times 30}{6 \times 20 EI} 9 - \frac{1}{2} \left(\frac{9}{10} \frac{5}{EI} \right) 9 \frac{1}{3} 9 = 1,6425 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Por reciprocidad, la flecha calculada en E para una carga puntual en C (que no necesitábamos) es igual que la flecha en C para una carga puntual en E (que sí necesitamos). Por consiguiente, para las tres cargas puntuales de 10t separadas un metro y centradas en C, se tiene $v_c^{(ext)} = -10 \times (v_c^{(T=1)} + 2v_E^{(T=1)})$. La ecuación hiperestática es:

$$(1,6667 + 1,6667)T = 10(1,6667 + 2 \times 1,6425) \Rightarrow T = 14,855 \text{ t}$$

El cable queda con un esfuerzo axil de tracción de 14,855 t.

a.) Por el *método indirecto* necesitamos calcular la hiperestática $V_C \equiv T$ (hacia abajo en la viga, hacia arriba en el cable) que separa los labios de C 1 metro-muy-pequeño. (Ahora, por consistencia, los desplazamientos positivos se miden hacia abajo). Con los cálculos anteriores, resulta:

$$(1,6667 + 1,6667) \times 10^{-3} V_C = 1 \Rightarrow V_C = 300 \text{ t}$$

La línea de influencia coincide con la deformada de la viga inferior para una carga puntual en C de 300 t hacia abajo. Ésta es (con flechas positivas hacia abajo):

$$i(x) = \frac{300 \times 10 \times 10 \times 30}{6 \times 20 EI} x - \frac{1}{2} \frac{150x}{EI} x \frac{1}{3} x = (75x - 0,25x^3) 10^{-3}$$

a.) Por el *método directo* la línea de influencia es la $T(x)$ calculada como en el preámbulo del problema. La flecha en C debida a una carga unidad en x coincide con la flecha en x debida a una carga en C , esto es, el $-1/300$ del valor anterior:

$$(1,6667+1,6667)T(x) = \frac{75x-0,25x^3}{300}$$

$$T(x) = (75x-0,25x^3) \times 10^{-3}$$

b) Poniendo una fuerza unidad en C , la tensión en el cable resulta de la ecuación:

$$(1,6667+1,6667)T = -1,6667 \Rightarrow T = 0,5 \text{ t}$$

que coincide, naturalmente, con $i(x=10)$.

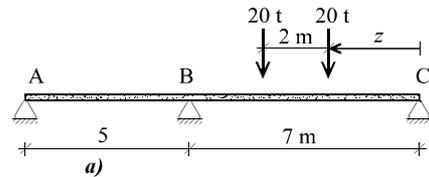
c.) Empleando la ecuación de la l.i., el esfuerzo axil máximo será $10 \times [i(x=9) + i(x=10) + i(x=11)] = 10 \times [i(x=10) + 2i(x=9)] = 10 \times (500 + 2 \times 492,75) \times 10^{-3} = 14,855 \text{ t}$.

Enseñanzas:

- Para instalar la prótesis de esfuerzo axil en un cable es preciso imaginarlo trabajando a compresión. No hay inconveniente en ello: es sólo un truco de cálculo.
- Fue fácil dibujar a estima la l.i. usando la regla práctica del método indirecto
- El croquis de la l.i. ha bastado para poder
 - encontrar la posición pésima de las cargas y así
 - calcular el esfuerzo pésimo en la estructura por el método convencional
 sin determinar la expresión analítica de la l.i. Por ello recomendamos determinar la $i(x)$ sólo en los casos de necesidad ineludible (como era la exigencia explícita del problema).
- Hemos visto los dos métodos de cálculo de la l.i. para el caso de un esfuerzo axil en una estructura hiperestática.
- Hemos aprovechado el teorema de la reciprocidad para simplificar algunos cálculos.

Problema 8.8.6: L.i. de momento flector en viga continua

Determinar el máximo momento flector negativo que puede aparecer sobre la viga continua de la figura 8.18a (de rigidez constante) cuando la recorre un tren de cargas formado por dos fuerzas verticales de 20 t cada una separadas 2 m entre sí.



Solución profesional

El máximo momento flector negativo deberá aparecer sobre el apoyo intermedio. Por ello en la figura 8.18b dibujamos la l.i. del momento flector sobre el apoyo intermedio instalando la prótesis correspondiente. La deformada consiguiente ha de cumplir, pues, que $\theta_B^d - \theta_B^i = 1$ radián-muy-pequeño. Esto lo conseguirán los vanos ayudándose mutuamente, prestándose un momento flector M que haga efectiva dicha *malformación*.

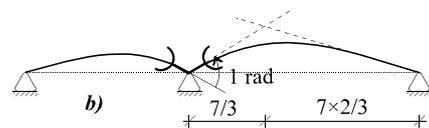


Figura 8.18
Estructura y l.i. del problema 8.8.6

El vano más peligroso será el más largo. En éste, el giro sobre el apoyo izquierdo que recibe M será el doble que el giro sobre el apoyo derecho. Esta consideración permite estimar que la máxima flecha no estará en el centro del vano sino a su izquierda. Decidimos colocar las cargas a 3 y 5 m a la derecha del apoyo central. Tomando como incógnita hiperestática el momento flector M^b sobre dicho apoyo, igualando giros a la izquierda y a la derecha de B , resulta:

$$-\frac{M^b \times 5}{3} = \frac{M^b \times 7}{3} - \frac{20 \times 2 \times 5 \times 12}{6 \times 7} - \frac{20 \times 4 \times 3 \times 10}{6 \times 7} \Rightarrow M^b = 28,57 \text{ m} \times \text{t}$$

⁹ Queremos diferenciar claramente este momento, que será el real para las cargas en las posiciones escogidas, del anterior, que es el que usaremos más adelante para determinar las $i(x)$ de la l.i.

Solución académica

Para hallar el máximo valor analítico (y no una aproximación al mismo, como en el apartado anterior) necesitamos conocer la ecuación de la l.i. para encontrar los extremos de $i(x)+i(x+2)$. Conociendo el aspecto de la l.i., que dibujaremos lo primero, como en la solución anterior, y sabiendo que el vano más peligroso es el derecho, hallamos la ecuación en este vano. El valor de M que hace cumplir la condición de prótesis $\theta_B^d - \theta_B^i = 1$, es:

$$\frac{M \times 7}{3EI} + \frac{M \times 5}{3EI} = 1 \Rightarrow M = 0,25EI$$

La ecuación de la deformada del tramo derecho bajo el efecto de este momento es (tomando como variable z la distancia al apoyo derecho, que hace la ecuación más simple):

$$i_2(z) = -\frac{0,25EIz(7-z)(7+z)}{6 \times 7EI} = -\frac{z(49-z^2)}{168}$$

Colocando una carga del tren en la posición $z = a$ y la otra en $z = a+2$, el valor del momento flector negativo máximo será:

$$-\frac{20}{168} [a(49-a^2) + (a+2)(49-(a+2)^2)]$$

El máximo del valor entre corchetes se tiene para $6a^2 + 12a - 86 = 0$, lo que resulta $a = 2,916 \text{ m}$, (cargas a 2,084 y 4,084 m a la derecha del apoyo central). El máximo correspondiente es $M = -28,59 \text{ m} \times t$.¹⁰

Enseñanzas:

- En problemas de encontrar valores pésimos es siempre necesario realizar un croquis de la l.i. apropiada, tanto si se busca una solución satisfactoria como una solución exacta.
- Cuando se busca una solución exacta puede ser necesario determinar la ecuación $i(x)$ de la l.i. para encontrar con precisión académica las posiciones pésimas de las cargas. En el ejercicio profesional esta exactitud puede no ser necesaria.
- Hemos obtenido la l.i. de un momento flector en una estructura hiperestática intraslacional. Lo hemos hecho con facilidad:
 - utilizando el método indirecto para dibujarla,
 - utilizando el método de viga continua para obtener su ecuación (también por el método indirecto), y
 - midiendo la abscisa de la ecuación desde el lado opuesto al que actúa el momento deformante.

Problema 8.8.7: L.i.s de momento flector y flecha en viga continua

La viga continua de la figura 8.19a, de sección constante $EI = 50.000 \text{ t} \times \text{m}^2$, puede estar sometida a una carga repartida de 4 t/m que puede actuar en cualquier zona(s) de la misma. Se pide:

a) Razonar qué zona(s) debe ocupar la carga para que produzca el máximo momento flector positivo en el centro del vano BC, y determinar su valor.

b) Razonar qué zona(s) debe ocupar la carga para que se produzca la máxima flecha hacia arriba en el vano AB. Se determinará además, el valor de dicha flecha máxima y el punto en el que se produce. (Examen junio 95.)

a) En la figura 8.19b se hace un dibujo a estima de la l.i. del momento flector en el centro del vano BC, como deformada de la estructura cuando se fuerza la colocación de la prótesis correspondiente en dicho punto central. Este croquis es suficiente para encontrar que el máximo momento en el punto medio del vano central se obtendrá cargando sólo este vano. Hacemos esto y calculamos el momento flector en el centro de la manera convencional, resolviendo la viga continua. Tomamos como incógnita hiperestática el momento flector sobre un apoyo intermedio (son iguales, por simetría). La ecuación hiperestática resulta de igualar los giros a izquierda y derecha del apoyo intermedio:

¹⁰ En la solución profesional fuimos sospechosamente afortunados en la colocación de las cargas. Es interesante, sin embargo, notar que si en un problema de máximo (o mínimo) nos alejamos Δx de la abscisa correcta, el resultado será erróneo en una cantidad del orden de $(\Delta x)^2$. Así, tomando $a = 3,5 \text{ m}$, con un error del 20%, sale un momento de $M = -27,59 \text{ m} \times t$, con un error del 3,5 %, eso sí: del lado contrario a la seguridad. En cualquier caso, conociendo el aspecto de la l.i., dos o tres hipótesis de carga —que en el ejercicio profesional nos resolverá el computador con toda rapidez— serán suficientes si se tiene idea clara del aspecto de la l.i.

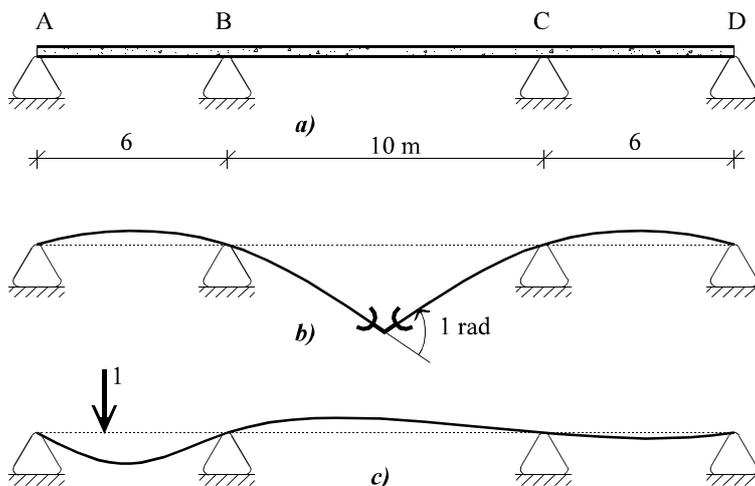


Figura 8.19
Estructura y l.i.'s del problema 8.8.7

$$-\frac{M6}{3EI} = \frac{M10}{3EI} + \frac{M10}{6EI} - \frac{4 \times 10^3}{24EI} \rightarrow M = 23,81 \text{ m} \times t$$

El momento flector en el medio del vano central es $qL^2/8 - M = 26,19 \text{ m} \times t$.

b) En la figura 8.19c se hace un dibujo a estima de la línea de influencia de la flecha en "algún punto" del tramo lateral izquierdo como la deformada de la estructura cuando se aplica una carga vertical unidad en "ese algún punto". Este croquis es suficiente para determinar que la máxima flecha hacia abajo se obtendrá cargando hacia abajo en los vanos laterales, y la máxima flecha hacia arriba, cargando hacia abajo en el vano central.

La hipótesis de carga es, pues, la misma del apartado a) anterior. La deformada del vano lateral se deberá al momento M sobre el apoyo, calculado antes. La ecuación de esta deformada se dió en (8.1-2). El máximo está en $x = L/\sqrt{3}$ y vale $ML^2/9\sqrt{3EI} = 1,10 \text{ mm}$.

Enseñanzas:

- Para calcular efectos pésimos hemos tenido que usar las líneas de influencia correspondientes.
- Para hallar las posiciones pésimas de las cargas, esta vez ha bastado con croquis a estima de las l.i.'s.
- Los croquis a estima de las l.i.'s resultaron, como siempre, de aplicar las reglas prácticas del método indirecto.
- Una vez encontradas las posiciones pésimas de las cargas, las magnitudes de los efectos pésimos se determinaron mediante el método convencional, sin emplear las ecuaciones algebraicas de la línea de influencia. ¡Nos hemos ahorrado de calcular dos funciones $i(x)$!
- Para obtener la deformada debida a un momento en un extremo, usamos la misma fórmula que para obtener el giro debido a una carga puntual.

9 Métodos energéticos

9.0 Preámbulo, objetivos y contenido

Tres vías

Los problemas de Mecánica del sólido, sea éste rígido o deformable, los podemos resolver de tres maneras distintas:

- Mediante ecuaciones:
 - de equilibrio newtoniano de fuerzas, más
 - de compatibilidad en deformaciones.
 Lo malo es que estas ecuaciones son vectoriales.

- Mediante el principio de los trabajos virtuales, que se aplica de dos maneras distintas:
 - si el equilibrio de fuerzas está garantizado, la compatibilidad se impone mediante *desplazamientos virtuales* compatibles con los enlaces exteriores;
 - si la compatibilidad está garantizada, el equilibrio se fuerza mediante *variaciones arbitrarias de las fuerzas*.

- Mediante principios energéticos, como el de conservación y otros de mínimo, que veremos; los cuales conducen a ecuaciones escalares. Este tercer método es el que nos ocupa en este capítulo.

Objetivos	Contenido
General: — Aprender a resolver problemas estructurales mediante métodos energéticos	
Específicos: — Saber evaluar la energía de deformación de una viga tanto en términos de <ul style="list-style-type: none"> • tensiones o esfuerzos: <ul style="list-style-type: none"> ▶ energía elástica complementaria, como de • deformaciones o movimientos: <ul style="list-style-type: none"> ▶ energía elástica. 	§9.1
— Saber usar el principio de conservación de la energía para calcular algunos movimientos.	§9.1
— Conocer el segundo teorema de Castigliano y saber usarlo para calcular movimientos.	§9.2
— Conocer el teorema de la fuerza unidad y saber usarlo para calcular movimientos.	§9.3
— Conocer el Principio de la Mínima Energía Elástica Complementaria, <ul style="list-style-type: none"> • saber a qué ecuaciones sustituye y • saber en qué problemas se puede aplicar, • saber usarlo para calcular reacciones hiperestáticas. 	§9.4
— Conocer el Principio de la Mínima Energía Potencial Total, <ul style="list-style-type: none"> • saber qué términos tiene, • saber a qué ecuaciones sustituye, • saber en qué problemas se puede aplicar, y • saber usarlo para calcular los movimientos de cualquier estructura. 	§9.5
— Conocer el método de Rayleigh-Ritz para cálculo de estructuras: <ul style="list-style-type: none"> • saber en qué problemas se puede aplicar; • conocer sus ingredientes: <ul style="list-style-type: none"> ▶ funciones aproximantes y ▶ criterio de optimización; • saber cómo se traducen a fórmulas las energías: <ul style="list-style-type: none"> ▶ elástica y ▶ potencial; • conocer de antemano el aspecto del sistema de ecuaciones resultante; • conocer el grado de aproximación de los distintos resultados (movimientos, tensiones, ...) 	§9.6

9.1 Energías elástica y elástica complementaria

Ejemplo1: Energía en barra

Empecemos por una barra de rigidez axial constante EA y longitud L sometida a una carga P en la punta. Calculemos el desplazamiento de su extremo mediante conservación de la energía. El trabajo externo es $T_e = \frac{1}{2}P \cdot u_B$. (Ya se dijo en §8.1 que el factor $\frac{1}{2}$ resulta de que aplicamos la carga P lentamente, creciendo desde cero hasta su valor final P y por consiguiente u_B varía también lentamente desde cero a su valor final u_B .) El trabajo interno es el que realizan en cada rebanada los esfuerzos axiales $N = P$:

$$(9.1-1) \quad T_i = \frac{1}{2} \int_0^L N \Delta(dx) = \frac{1}{2} \int_0^L N \epsilon dx = \frac{1}{2} \int_0^L N \frac{\sigma}{E} dx = \frac{1}{2} \int_0^L N \frac{N}{EA} dx = \frac{1}{2} \frac{P^2 L}{EA}$$

Igualando este trabajo al externo resulta $u_B = PL/EA$.

Enseñanzas:

- Hemos obtenido u_B sin hacer ninguna consideración sobre la relación cinemática entre él y las deformaciones ϵ .
- El movimiento calculado con extrema facilidad ha sido el *novio* de la fuerza aplicada. Para otros movimientos el cálculo no es tan sencillo.

Energía por unidad de volumen

El ejemplo nos dice que la energía elástica acumulada en una rebanada elemental de volumen $A \cdot dx$ es $\frac{1}{2} N^2 dx / EA$. La energía por unidad de volumen será

$$\text{Energía por unidad de volumen} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA^2} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2} \epsilon \sigma$$

Parece natural escribir que la energía interna almacenada en un cuerpo será:

$$(9.1-2) \quad \text{Energía interna} = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma \epsilon + \tau \gamma) d\text{Vol}$$

Aquí, según reemplacemos σ por $E\epsilon$ ó ϵ por σ/E (y $\tau = \gamma G$ o $\gamma = \tau/G$) resulta:

$$(9.1-3a) \quad \text{Energía elástica} = \frac{1}{2} \iiint_V (E\epsilon^2 + G\gamma^2) d\text{Vol}$$

o

$$(9.1-3b) \quad \text{Energía elástica complementaria} = \frac{1}{2} \iiint_V \left(\frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{G} \right) d\text{vol}$$

Para material lineal (E y G constantes) los dos valores de la energía elástica son iguales; la diferencia es académica; sin embargo, sus usos son distintos. La primera se formula en términos de movimientos; la segunda, en términos de fuerzas.

Expresiones $\frac{1}{2}f^2/k$ o $\frac{1}{2}ku^2$

En un muelle elástico de constante k , la energía $\frac{1}{2}f \cdot u$ se puede expresar en función del movimiento (reemplazando f por ku) como $\frac{1}{2}k \cdot u^2$; o en función de la fuerza (reemplazando u por f/k) como $\frac{1}{2}f^2/k$. En ambos casos son expresiones cuadráticas, como corresponde a escalares esencialmente positivos. Esperamos que las expresiones en función de los esfuerzos M y N sean del mismo aspecto, *esfuerzo al cuadrado partido por rigidez*.

Energía en la rebanada elemental

En Resistencia no trabajamos con tensiones y deformaciones «al por menor» sino con paquetes de tensiones N , M y sus correspondientes deformaciones ϵ , χ . Y siempre despreciamos las deformaciones por tensión tangencial, γ . Veamos cómo resultan las expresiones de la energía en función de los esfuerzos:

$$EEC = \frac{1}{2} \iint \frac{\sigma^2}{E} dx dy b(y) = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=L} \left[\int_{y=-c_i}^{y=+c_s} \frac{1}{E} \left(\frac{N}{A} - \frac{M}{I} y \right)^2 b(y) dy \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N^2}{EA^2} A + \frac{M^2}{EI^2} I \right) dx$$

En donde hemos hecho uso de que la integral de $b(y) dy$ es el área A ; la de $b(y)y^2 dy$ es el momento de inercia I , y la de $b(y)y dy$, nula porque es el momento estático de la sección respecto de su c.d.g., por consiguiente:

$$(9.1-4) \quad EEC = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EI} \right) dx$$

Observa: (i) que nos reafirma en el término del esfuerzo axial encontrado antes, y (ii) que sale suma simétrica de términos cuadráticos, como conviene a una cantidad que es esencialmente positiva. Si consideráramos energía consumida en deformar por cortante o por torsor, añadiríamos términos del mismo estilo, Q^2/GA_c y M_t^2/GJ , respectivamente.

Paralelamente, la energía elástica (propiamente dicha, en función de movimientos), será:

$$(9.1-5) \quad EE = \frac{1}{2} \int_0^L (EA \epsilon_g^2 + EI \chi^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + EI \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right] dx$$

Ejemplo 2: flecha en viga

Usemos los conocimientos adquiridos para calcular la flecha en el punto medio de una viga con una carga P en el punto medio M . Los trabajos son:

$$(9.1-6) \quad T_e = \frac{1}{2} P v_M$$

$$T_i = \frac{1}{2EI} 2 \int_0^{L/2} M(x)^2 dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{2} \right)^2 \int_0^{L/2} x^2 dx = \frac{P^2 L^3}{96EI}$$

Igualando ambos valores se encuentra el valor correcto de v_M .

Enseñanzas:

- Hemos obtenido v_M sin hacer ninguna consideración sobre la relación cinemática entre él y las curvaturas χ ,
 - ni siquiera hemos tenido que empezar calculando el giro en el apoyo.
- Sin embargo, este procedimiento solo nos vale para calcular el movimiento novio de una carga dada. No tenemos ni idea de cómo calcular, p.e., el giro en el apoyo. Para esto pasamos al siguiente apartado.

Resumen

- Hemos mostrado que ciertos desplazamientos se pueden calcular mediante la ecuación de la conservación de la energía,
 - pero esta es una única ecuación escalar
 - ▶ y solo nos permite calcular el movimiento novio de una única carga actuante.
- Hemos encontrado las fórmulas de la energía de deformación:
 - de una partícula elemental:
 - ▶ en función de las tensiones
 - ▶ o en función de las deformaciones
 - de una rebanada de viga:
 - ▶ en función de los esfuerzos
 - ▶ o en función de sus paquetes de deformaciones:
 - curvatura
 - alargamiento medio o del c.d.g.

9.2 Teorema de Castigliano

Energía elástica complementaria

Una forma alternativa de calcular la energía elástica almacenada es a partir del trabajo exterior. Consideremos una estructura sometida a n cargas puntuales P_i que producen bajo sus pies los movimientos novios v_i . (Estos movimientos no serán verticales en general, sino coincidentes en direcciones y sentidos con las cargas P_i ; serán giros en aquellos puntos en que las cargas aplicadas sean momentos.) La energía elástica es:

$$(9.2-1) \quad EEC = \frac{1}{2} P_i v_i = \frac{1}{2} \langle P \rangle \{ v \}$$

Piensa en la derivada de EEC con relación a una cierta P_k . No es $1/2 v_k$ en contra lo que pudiera parecer porque los movimientos v_i son funciones de todas las cargas P_1, P_2, \dots, P_n , $v_i = v_i(P_j)$ y esto hay que tenerlo en cuenta al derivar. Estas funciones serán unas relaciones lineales de flexibilidad $v_i = c_{ij} P_j$, o en lenguaje matricial:

$$(9.2-2) \quad \{ v \} = [c] \{ P \}$$

o siendo $[c]$ una matriz de flexibilidad, simétrica por razones de reciprocidad. Resulta:

$$(9.2-3) \quad EEC = \frac{1}{2} P_i c_{ij} P_j = \frac{1}{2} \langle P \rangle [c] \{P\}$$

Igual que al derivar la función $y = 1/2 x \cdot c \cdot x$ resulta $y' = c \cdot x$, al derivar el escalar $E = 1/2 \langle x \rangle [c] \{x\}$ con respecto a cada una de las componentes x_i del vector $\{x\}$ resultan las n derivadas $\{E'\} = 1/2 [c + c^T] \{x\}$. Si la matriz $[c]$ es simétrica resulta $\{E'\} = [c] \{x\}$. Sabiendo esto y (9-3-2) resulta:

$$(9.2-4) \quad \left\{ \frac{\partial EEC}{\partial \{P\}} \right\} = [c] \{P\} = \{v\}$$

Cada componente del vector de la izquierda igual a cada componente del vector de la derecha, es decir

$$(9.2-5) \quad \frac{\partial EEC}{\partial P_k} = v_k$$

que nos da la valiosa **regla de Castigliano para calcular un movimiento: derivar la energía elástica con respecto a su carga novia**. Si no tienes carga novia, te la inventas con todo el morro, como veremos en seguida.

Ejemplo 3, igual al 2

En la ecuación (9.1-6), para obtener v_M , en vez de igualar el T_i a la EEC , podemos aplicar $v_M = \partial EEC / \partial P$, y ¡obtenemos lo mismo!

Castigliano nos da mucho más

Igualando los trabajos externo e interno obtenemos una única ecuación. Si contiene muchas cargas exteriores, Fuente Ovejuna: no podemos separar la influencia de cada una. Castigliano, en cambio, nos da tantas ecuaciones como cargas exteriores: todas las que acertáramos a desear.

Ejemplo 4, sobrepasa al 2

Queremos calcular el giro θ_A en el apoyo de la viga con carga P en el punto medio, que antes nos inquietaba. Para ello nos inventamos una carga novia M_A , y mantenemos la carga real P en el centro. A la ley de momentos flectores de antes tenemos que añadirle la correspondiente a este momento fantasma:

$$M(x \leq L/2) = \frac{PLx}{2L} - M_A \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$M(x \geq L/2) = \frac{PL}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) - M_A \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

La energía elástica resulta:

$$EEC = \frac{1}{2EI} \int_0^{1/2} \left[\frac{PL}{2} \xi - M_A (1 - \xi) \right]^2 L d\xi + \frac{1}{2EI} \int_{1/2}^1 \left[\frac{PL}{2} (1 - \xi) - M_A (1 - \xi) \right]^2 L d\xi$$

Aquí tenemos dos opciones: derivar con relación a M_A antes de integrar o después de integrar. Resulta mucho mejor derivar antes porque inmediatamente después vamos a hacer $M_A = 0$ y nos cargamos unos cuantos términos que de otro modo integraríamos inútilmente:

$$\theta_A = \frac{\partial EEC}{\partial M_A} = -\frac{1}{EI} \int_0^{1/2} \left[\frac{PL}{2} \xi - M_A (1 - \xi) \right] (1 - \xi) L d\xi - \frac{1}{EI} \int_{1/2}^1 \left[\frac{PL}{2} (1 - \xi) - M_A (1 - \xi) \right] (1 - \xi) L d\xi$$

Esta fórmula separa cuánto giro proviene de la carga real P y cuánto de la virtual M_A . Prescindiendo de esta última:

$$\theta_A = -\frac{PL^2}{2EI} \left[\int_0^{1/2} \xi (1 - \xi) d\xi + \int_{1/2}^1 (1 - \xi)^2 d\xi \right] = -\frac{PL^2}{2EI} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{24} \right) = -\frac{PL^2}{16EI}$$

Resumen

- Castigliano nos da más ecuaciones para calcular movimientos que la simple de conservación de la energía
 - que sólo nos permitía calcular el movimiento:
 - ▶ novio
 - ▶ para una única carga actuante.
- El teorema 2º de Castigliano nos permite calcular:
 - cualquier movimiento,
 - ▶ novio o no;
 - para cualquier conjunto de cargas actuantes,
 - ▶ pero es necesario introducir una carga novia virtual del movimiento buscado,
 - ▶ y minimizar la energía elástica para esa carga.

9.3 Teorema de la fuerza unidad

Sistematización

Necesitamos aprender a efectuar estos cálculos de manera automática para no errarlos. Veamos la fórmula general. Tenemos una estructura con unas ciertas cargas exteriores que le producen una ley de momentos flectores $M(x)^{(ext)}$. En esta estructura queremos calcular un cierto movimiento v_C de un punto C . Para ello añadimos a las cargas exteriores la carga novia de v_C a la que llamaremos V_C . Una carga $V_C = 1$ produce sobre la estructura una ley de momentos flectores $M(x)^{(V_C=1)}$. La carga total V_C producirá $M(x)^{(V_C)} = V_C M(x)^{(V_C=1)}$. Esta ley, sumada a la de las cargas exteriores, da la ley total: $M^{(ext)}(x) + V_C M(x)^{(V_C=1)}$. De acuerdo con Castigliano:

$$v_C = \left. \frac{\partial EEC}{\partial V_C} \right|_{V_C=0} = \frac{1}{2EI} \frac{\partial}{\partial V_C} \left[\int (M(x)^{(ext)} + V_C M(x)^{(V_C=1)})^2 dx \right] \Big|_{V_C=0} =$$

$$\frac{1}{EI} \int (M(x)^{(ext)} + V_C M(x)^{(V_C=1)}) M(x)^{(V_C=1)} dx \Big|_{V_C=0} = \frac{1}{EI} \int M(x)^{(ext)} M(x)^{(V_C=1)} dx$$

Nos quedamos con el final:

$$(9.3-1) \quad v_C = \frac{1}{EI} \int M(x)^{(ext)} M(x)^{(V_C=1)} dx$$

Y esta receta final (en vez de todo el montaje del ejemplo 4) es la que necesitas saber para calcular movimientos: *un cierto movimiento de una estructura se calcula como la integral, dividida de EI, de dos leyes de momentos flectores: (i) la de las cargas reales por (ii) la de carga ficticia unidad que es novia del movimiento buscado.*

Interpretación física

En el plano físico, si conocemos el movimiento real de un punto C , vector v_C , hallamos su componente sobre una cierta dirección u , vector unitario, mediante un producto escalar $v_C \cdot u$. En el plano energético, la cargas exteriores vienen representadas por su ley $M(x)^{(ext)}$; queremos calcular cuánto movimiento dan sobre el vector v_C , representado por la ley $M(x)^{(V_C=1)}$. El producto escalar de ambas funciones nos resuelve el problema:

$$v_C = \frac{1}{EI} \langle M(x)^{(ext)} \odot M(x)^{(V_C=1)} \rangle$$

Rigor

En rigor utilizamos la ley de curvaturas $\chi(x)$ de la carga exterior, que vale, por ejemplo, para curvaturas térmicas (que no provienen de $M(x)^{(ext)}$):

$$v_C = \langle \chi(x)^{(ext)} \odot M(x)^{(V_C=1)} \rangle$$

Otras acciones

Si se trata de esfuerzos axiales o dilataciones térmicas, la expresión paralela será:

$$v_C = \langle \epsilon_g(x)^{(ext)} \odot N(x)^{(V_C=1)} \rangle$$

Ejemplo 5: Pasamos de la rótula

Recalculamos los movimientos del ejemplo 4.3.7:

$$\theta_C = \frac{M_C}{EI} \int_A^C (M^{(M_C=1)}(x))^2 dx =$$

$$= \frac{M_C L}{EI} \left[\int_0^1 (-\xi)^2 d\xi + \int_0^1 (-1+2\xi)^2 d\xi \right] =$$

$$= \frac{M_C L}{EI} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{2M_C L}{3EI}$$

calculado sin necesidad de pasar por la odisea de obtener el giro en la rótula.

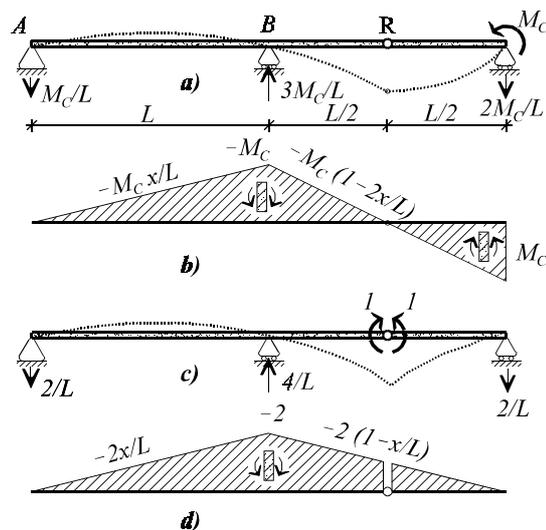


Figura 9.1
Cálculo de movimientos en viga con rótula

Para calcular el giro en la rótula es preciso tener inspiración para encontrar que su carga novia unidad es la pareja de momentos de la figura 9.1c, cuya ley de momentos se da en la figura 9.1d.

$$\theta_R = \frac{M_C L}{EI} \left[\int_0^1 (-2\xi)(-\xi) d\xi + \int_0^1 (-1+2\xi)(-2+2\xi) d\xi \right] = \frac{M_C L}{EI} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{M_C L}{EI}$$

Resumen

- El teorema de la fuerza unidad:
 - da la receta final del cálculo de un movimiento por el método de Castigliano,
 - como el producto escalar generalizado (integral de dos funciones)
 - ▶ de las deformaciones de rebanada que producen las cargas actuantes
 - ▶ por los esfuerzos novios de la carga novia unidad del movimiento buscado

9.4 En fuerzas, teorema de la mínima EEC

Hiperestática reinterpretada

La estructura con reacciones hiperestáticas de la figura 9.2a puede ser reinterpretarse como la isostática de la figura 9.2b si bien afectada por dos grupos de cargas bien distintos: las P's, conocidas, y las hiperestáticas H_A, V_B y M_C, desconocidas. Para determinar éstas, calcularíamos la energía elástica complementaria con sus magnitudes como incógnitas y resolveríamos:

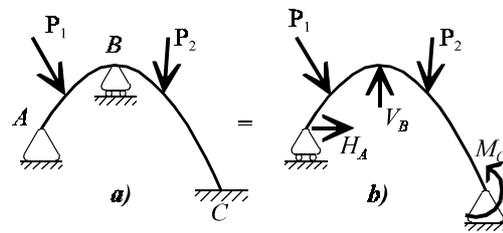


Figura 9.2 Estructura hiperestática e isostática asociada

$$(9.4-1) \quad \left. \begin{aligned} u_A = \frac{\partial EEC}{\partial H_A} = 0 \\ v_B = \frac{\partial EEC}{\partial V_B} = 0 \\ \theta_C = \frac{\partial EEC}{\partial M_C} = 0 \end{aligned} \right\}$$

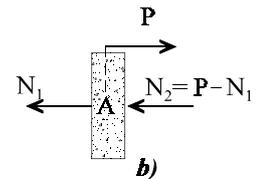
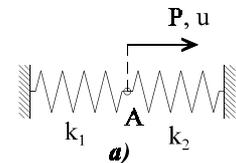


Figura 9.3 Ejemplos 6 y 8

Cualquiera que te vea resolver el sistema anterior dirá que estás buscando un máximo o un mínimo de la función EEC. Los sabios dicen que *de entre todas las formas en que una estructura puede estar en equilibrio, la verdadera (la que cumple además las condiciones de compatibilidad en movimientos con sus enlaces exteriores) hace mínima la energía elástica complementaria*. Recuerda: para aplicar este principio el equilibrio tiene que estar garantizado.

Hagamos una porra

Una fuerza P= 100 kN actúa sobre dos muelles de rigideces k₁= 25.000 y k₂= 35.000 kN/m. No tenemos ni idea de cuanta fuerza N_i se lleva cada uno pero el sentido común nos dice que la suma será 100; si uno se lleva 60 el otro se llevará 40, etc. (que es la ecuación de equilibrio implícita en la figura 9.3b) . Entre varios alumnos hacen una porra para ver quién se acerca más a la solución verdadera. En la tabla 9.1 tienes sus apuestas; la mayoría ha comprendido, correctamente, que el muelle más rígido se llevará más. No saben cómo calcular el resultado correcto y, sin embargo, saben quién se aproximó más: aquél que dio la energía elástica menor.

Tabla 9.1 Porra de las fuerzas en los muelles

Alumno/a	Apuesta		1000.EEC = 1/2 Σ N _i ² /k _i × 10 ³
	N ₁	N ₂	
1	40	60	83,429
2	30	70	88
3	45	65	100,857
4	55	65	120,857
5	50	50	85,714

El resultado correcto habría sido 41,667 y 58,333 kN con una EEC de 83,333×10⁻³ kN×m. Pero no es preciso saberlo para dar el premio al alumno/a 1.

Ejemplo 6: muelles en serie

Si en el problema anterior sabes plantear el equilibrio pero no, la compatibilidad, acudes a minimizar la *EEC*:

$$EEC = \frac{1}{2} \frac{N_1^2}{k_1} + \frac{1}{2} \frac{(P-N_1)^2}{k_2}$$

minimización que te da la ecuación de compatibilidad:

$$\frac{N_1}{k_1} = \frac{P-N_1}{k_2}$$

que expresa que el movimiento u del extremo común de los muelles ha de ser el mismo (y te confirma que debes repartir la fuerza en partes proporcionales a la rigidez de cada muelle).

Resumen

- En los problemas planteados en fuerzas, partimos de una estructura isostática
 - cuyo equilibrio está garantizado, y
 - tratamos de imponer la compatibilidad hiperestática anulando ciertos movimientos
 - ▶ absolutos o
 - ▶ relativos
 - mediante reacciones exteriores o esfuerzos internos hiperestáticos.
- La compatibilidad de movimientos con las coacciones se puede imponer de dos maneras:
 - anulando los movimientos incompatibles con los enlaces mediante reacciones hiperestáticas,
 - ▶ que conduce a ecuaciones vectoriales, o
 - minimizando la energía elástica complementaria
 - ▶ que nos da las necesarias ecuaciones escalares.

9.5 En movimientos, principio de la EPT mínima**Ejemplo 7: el mismo 1 con otras incógnitas**

Volvamos sobre la barra fija en su extremo A y con una carga P en su extremo B del *ejemplo 1*. Ahora no le pondremos una carga P sino un movimiento u_B a este extremo. La barra se alargará uniformemente $\epsilon = u_B/L$. Hagamos un cómputo de los trabajos:

$$(9.5-1) \quad T_e = \frac{1}{2} P u_B$$

$$T_i = \frac{1}{2} \int_0^L EA \epsilon^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{u_B}{L} \right)^2 dx = \frac{1}{2} EA \frac{u_B^2}{L}$$

Igualando los trabajos se obtiene el valor de u_B en el equilibrio. Observa que en ningún lugar hemos hecho uso de ecuación alguna de equilibrio $f_e = f_i$.

Variación del movimiento

A partir de esa posición de equilibrio demos una variación pequeña Δu_B al movimiento sin variar la carga P . El nuevo trabajo externo total será $T_e + \Delta T_e = \frac{1}{2} P u_B + P \Delta u_B$. En el nuevo término no aparece el factor $\frac{1}{2}$ porque la carga ha permanecido constante. El nuevo trabajo interno será:

$$(9.5-2) \quad T_i + \Delta T_i = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{u_B + \Delta u_B}{L} \right)^2 dx = \frac{1}{2} EA \frac{u_B^2}{L} + EA \frac{u_B \Delta u_B}{L}$$

Como antes teníamos $T_e = T_i$, ahora se tendrá que verificar $\Delta T_e = \Delta T_i$. Efectivamente igualando estas variaciones se vuelve a obtener el valor de u_B :

$$(9.5-3) \quad EA \frac{u_B \Delta u_B}{L} = P \Delta u_B$$

que vuelve a darte el valor correcto de u_B en el equilibrio. Es muy importante observar cómo hemos llegado a esta ecuación. Acabamos de decir $\Delta T_e = \Delta T_i$ y no $dT_e = dT_i$. Sí se verifica $\Delta T_i = dT_i$, pero $\Delta T_e = 2 \cdot dT_e$ porque en buena lógica si $T_e = \frac{1}{2} P u_B$ se tendría $dT_e = \frac{1}{2} P \cdot du_B$ cuando realmente se obtiene $\Delta T_e = P \cdot du_B$.

Principio de la energía potencial total mínima

La ecuación anterior dice que en la vecindad del equilibrio $dEE = dEP$ entendiéndose por EE la energía elástica y por EP la energía potencial, producto de la fuerza por su desplazamiento, sin el factor $1/2$. Si llamamos EPT , energía potencial total, a $EE - EP$, en el equilibrio se tiene $\delta EPT = 0$, o sea máxima o mínima. Los sabios demuestran que es mínima. El principio se enuncia de la siguiente manera: *de entre todas las configuraciones deformadas de una estructura compatibles con los enlaces producidas por unas ciertas cargas, la verdadera, la que satisface también el equilibrio, hace mínima la energía potencial total*. Este principio permite una teoría unificada de todas las ecuaciones de la Mecánica de sólido; por eso los programas de elementos finitos, que emplean este principio, valen para vigas, placas, láminas, vigas flotantes, pandeo, no linealidades, ..., lo que busques.

Interpretación gráfica

El trabajo externo de la ecuación (9.5-1) crece linealmente con u_B ; el interno (en la misma ecuación), según una parábola de 2º grado. En la intersección A de ambas curvas alcanzamos el equilibrio. Pero ésta no es la única relación que encontramos en el equilibrio. Si miramos a la variación de ambas curvas en el entorno de A , observamos que la pendiente de T_i es doble de la de T_e (recuerda que la tangente MA a la parábola tiene el doble de pendiente que la secante OA ; M está en el punto medio entre O y u_B ; propiedad en la figura 2.32). En A la variación $dT_i = 2dT_e = d(EP)$. En la figura se observa que $EP - EE$ es máxima en A ; lo contrario sucederá para $EE - EP$, como decían los sabios.

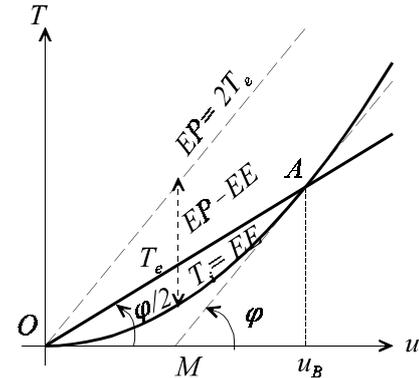


Figura 9.4
Relaciones entre los términos de la energía en el entorno del punto de equilibrio

Excelencias de las condiciones de mínimo

¿Por qué buscamos condiciones de mínimo de $T_i - 2T_e$ —te preguntarás— cuando nos podríamos arreglar con la condición de igualdad $T_i = T_e$? Porque esta última es una ecuación única, independientemente del número de variables del problema (que en nuestro ejemplo era una, convenientemente). La condición de mínimo, en cambio, te da tantas ecuaciones como variables independientes tienes. La condición de mínimo te da además un criterio para estimar la bondad de una aproximación.

Otra porra

Si ahora hiciéramos una porra estimando el movimiento u , no nos valdría el criterio de la EEC mínima (que valía para equilibrio garantizado); tenemos que aplicar el de la EPT mínima (una vez que el valor común de u garantiza la compatibilidad).

Tabla 9.2
Porra del movimiento en los muelles

Alumno/a	Apuesta $u \times 10^3$	$EPT = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \cdot u^2 - Pu \times 10^3$
1	2	-80
2	1	-70
3	1,5	-82,5
4	2,5	-62,5

Ejemplo 8: el mismo 6 en movimientos

Si tratamos de resolver el problema de los muelles (figura 9.3) por el método de los movimientos, forzosamente hemos de partir de que el movimiento u del extremo común de los muelles es el mismo. Imponemos, pues, la compatibilidad y vamos luego tras el equilibrio:

$$N_1 + N_2 = P$$

o lo que es lo mismo,

$$k_1 u + k_2 u = P$$

que son ecuaciones vectoriales (aunque aquí, de una sola componente). Si no queremos (o no sabemos) escribir las ecuaciones vectoriales de equilibrio, acudimos a minimizar la EPT :

$$EPT = EE - EP = \frac{1}{2} k_1 u^2 + \frac{1}{2} k_2 u^2 - Pu$$

Al minimizar esta ecuación (que engloba energías de las fuerzas internas y de las externas) se obtiene la ecuación de equilibrio que nos faltaba. De ella sacamos $u = P / (k_1 + k_2)$ y con éste calculamos $N_1 = k_1 \cdot u$, $N_2 = k_2 \cdot u$.

Enseñanzas:

- Hay dos grandes métodos de cálculo de estructuras:
 - por el método de las fuerzas (visto antes):
 - partimos de estructura en equilibrio,
 - forzamos compatibilidad de dos maneras posibles:
 - anulando movimientos incompatibles con los enlaces, de manera vectorial, o
 - minimizando la energía elástica complementaria, escalar en el que sólo intervienen fuerzas internas;
 - por el método de los movimientos:
 - partimos de estructura con movimientos compatibles con los enlaces y
 - forzamos equilibrio de dos maneras posibles:
 - equilibrio de fuerzas en nudos (ecuación vectorial), o
 - minimización de la energía potencial total, escalar que pone en escena tanto a las fuerzas internas como a las externas.

9.6 Método de Rayleigh-Ritz

Ejemplo 9

Queremos calcular la flecha de una viga biapoyada con una carga uniforme. No sabemos ni obtener leyes de momentos flectores ni —mucho menos aún— integrar curvaturas y aplicar la fórmula de Bresse. Sólo sabemos evaluar energías elásticas (9.1-5) y potenciales $\sum P_i v_i$ (sin el factor $1/2$). Imaginamos una elástica compatible con los enlaces $v(0) = 0$, $v(L) = 0$ y con aspecto sensato. Tomamos la $v = A \cdot \text{sen } \pi x/L$ que tiene más de las dos derivadas imprescindibles para (9.1-5). Le dejamos un parámetro arbitrario para que el método encuentre su mejor valor posible. Calculamos:

$$EE = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} EIA^2 \frac{\pi^4}{2L^4} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right) dx = \frac{1}{2} EIA^2 \frac{\pi^4}{2L^3}$$

$$EP = \int_0^L q_0 v(x) dx = q_0 A \int_0^L \text{sen} \frac{\pi x}{L} dx = q_0 A \frac{2L}{\pi}$$

Minimizamos, pues, con relación a A :

$$\frac{\partial EPT}{\partial A} = EIA \frac{\pi^4}{2L^3} - q_0 \frac{2L}{\pi} = 0 \Rightarrow A = \frac{4 q_0 L^4}{\pi^5 EI}$$

Con este valor, la flecha en el centro sale $v(L/2) = A = 0,01307 q_0 L^4/EI$ y la verdadera $0,01302 q_0 L^4/EI$, el error es del 0,4%.

Pero no todos los resultados son tan buenos. El giro obtenido en el apoyo es $v'(0) = A \pi/L = 0,04106 q_0 L^3/EI$ y el verdadero $0,04167 q_0 L^3/EI$ (error del 1,4%). El momento flector en el medio es $EI v''(L/2) = EIA \pi^2/L^2 = 0,1290 q_0 L^2$ y el exacto, $0,1250 q_0 L^2$ (3,2% de error); y el cortante $EI v'''(0) = EIA \pi^3/L^3 = 0,4053 q_0 L$ frente a $0,5 q_0 L$ (19% de error).

Estos resultados ilustran (i) que los métodos aproximados como el de los elementos finitos aproximan muy bien los movimientos; pero también (ii) que esta aproximación se degrada con cada derivación, por lo que esfuerzos, tensiones, etc., que resultan de ellos son cada vez menos fiables. Después de derivar tres veces, la diferencia entre las funciones aproximada y exacta se muestra en la figura 9.

Enseñanzas

- Con muy pocos conocimientos (fórmulas de energías elástica y potencial) se puede hacer un buen trabajo calculando movimientos en vigas simples mediante el método de Rayleigh, sin más que:
 - saber elegir una o varias funciones aproximadas:
 - ▶ que cumpla(n) las condiciones de contorno en movimientos,
 - (que tengan un aspecto sensato)
 - ▶ y que dependan de un parámetro arbitrario, a optimizar;
 - a continuación se evalúan las energías elástica y potencial (no te olvides de olvidar el factor $\frac{1}{2}$),
 - ▶ se minimiza su diferencia,
 - se obtienen los valores óptimos de los parámetros arbitrarios.
- Los resultados obtenidos serán:
 - excelentes para las flechas v ,
 - buenos para los giros v' ,
 - aceptables para los momentos flectores EIv'' ,
 - te delatarán cuando pintes los esfuerzos cortantes $-EIv'''$.

Lo complicamos un poco

Aproximar una función desconocida (la $v(x)$ de la viga) con una sola función aproximante, es trivial. Con dos es ya igual que con mil. No vamos a elegir funciones trigonométricas, sino otras que engloben los primeros términos del desarrollo en serie de Taylor, que es lo sensato. Para el mismo problema ponemos el origen de coordenadas en el punto medio de la viga. La función $(x-L/2)(x+L/2)$ es nula en ambos extremos. Como el problema es simétrico en x , la función aproximante más general, que llamaremos $V(x)$, será de la forma:

$$V(x) = \left(x - \frac{L}{2}\right) \left(x + \frac{L}{2}\right) [A_1 + A_2 x^2 + A_3 x^4 + \dots + A_n x^{2(n-1)} + \dots]$$

Tomamos dos funciones aproximantes:

$$V(x) = A_1 \phi_1(x) + A_2 \phi_2(x) = \sum A_i \phi_i(x)$$

$$\phi_1(x) = x^2 - \frac{L^2}{4}; \quad \phi_2(x) = x^4 - \frac{L^2}{4} x^2$$

Te será útil para el futuro saber que la energía potencial total nos va a salir *siempre* de la forma:

$$EPT = \frac{1}{2} EI \langle A_1 \ A_2 \rangle \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} - \langle A_1 \ A_2 \rangle \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

y que al minimizar (derivar con relación al vector $\{A\}$) nos va a resultar:

$$\left\{ \frac{\partial EPT}{\partial \{A\}} \right\} \equiv EI \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

siendo:

$$k_{ij} = \int_{-L/2}^{L/2} \phi_i' \phi_j' dx$$

$$P_i = \int_{-L/2}^{L/2} q(x) \phi_i(x) dx$$

Lo hagas con método o por la brava, en este caso sale:

$$EI \begin{bmatrix} 4L & L^3 \\ L^3 & \frac{21}{20} L^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -q_o \frac{L^3}{6} \\ -q_o \frac{L^5}{120} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{5}{96} L^2 \\ \frac{1}{24} \end{Bmatrix} \frac{q_o}{EI}$$

Estos valores conducen al resultado *exacto* del problema. El máximo momento flector en el punto medio es $EIV''(0) = EI[A_1\phi_1''(0) + A_2\phi_2''(0)] = q_0L^2/8$; el cortante en el apoyo, $-EIV'''(L/2) = -q_0L/2$. Tenía que ser así: hemos usado una función aproximante $V(x)$ de cuarto grado, el mismo que la $v(x)$ exacta.

Resumen:

- El método de Rayleigh-Ritz sirve para construir funciones aproximantes $V(x) = \sum A_i \phi_i(x)$:
 - con funciones interpolantes $\phi_i(x)$ que
 - ▶ cumplan cada una de ellas las condiciones de contorno en movimientos y
 - ▶ sean linealmente independientes;
 - y obtener las A_i (optimizar) con el **criterio** de la mínima energía potencial total.
- La energía potencial total así calculada:
 - toma siempre el aspecto de: $EPT = \frac{1}{2} \langle A \rangle [K] \langle A \rangle - \langle A \rangle \langle P \rangle$
 - ▶ siendo su primer sumando la energía elástica, cuadrática, y
 - ▶ su segundo sumando la energía potencial (trabajo externo *sin* factor 1/2), lineal.
- El mínimo buscado se alcanza con los valores de $\langle A \rangle$ que resultan de $[K] \langle A \rangle = \langle P \rangle$
 - siendo los términos de la matriz de rigidez de la forma $k_{ij} = \int \phi_i^{(2n)} \phi_j^{(2n)} dx$
 - y los del vector de fuerzas de la forma $P_i = \int q(x) \phi_i(x) dx$.
- Las incógnitas A_i son en general parámetros abstractos; en elementos finitos se les da el significado físico de desplazamientos nodales.
- Los resultados obtenidos son, típicamente:
 - buenos o muy buenos para la función buscada, pero
 - se degradan con cada derivación.
 Por ello los elementos finitos suelen dar:
 - aproximaciones muy buenas de los movimientos,
 - bastante menos buenas de los esfuerzos y las tensiones,
 - ▶ que son derivadas primeras (para los axiles) o segundas (para los momentos) de dichos movimientos, como muestra (9.1-5).
- Por ser un planteamiento en movimientos, en los resultados de elementos finitos:
 - la compatibilidad en movimientos es exacta, pero
 - el equilibrio de fuerzas internas (que se impone minimizando la EPT), resulta sólo aproximado.

