Ejercicio de *contragradiencia*

En la estructura formada por dos cables de la figura 1, determinar el esfuerzo axil en cada cable para los dos casos de carga siguientes:

***a*) La carga vertical *P* aplicada en el nudo *C*, que se muestra en la figura.**

***b*) El desplazamiento vertical v_C impuesto en el nudo *C* que se indica en la figura (sin permitir movimiento horizontal u_C).**

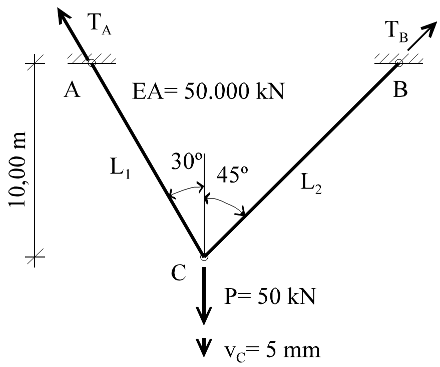


Figura 1

a) Es un problema de **equilibrio** de fuerzas. La carga *P* se reparte entre los dos cables de acuerdo con la regla del paralelogramo (figura 2). Analíticamente se resuelve como sigue:

$$(1) \qquad \left.\begin{aligned} \Sigma F_v &\equiv T_1 \cos 30° + T_2 \cos 45° = P \\ \Sigma F_h &\equiv T_1 \operatorname{sen} 30° - T_2 \operatorname{sen} 45° = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} T_1 &= 0{,}732 P \\ T_2 &= 0{,}518 P \end{aligned}$$

También las puedes obtener como las reacciones T_A y T_B de la estructura, tomando momentos en *B* y en *A* (figura 1):

$$\Sigma M_B \equiv T_A L_2 \operatorname{sen}(30° + 45°) - P L_2 \operatorname{sen} 45° = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A = T_1 = 0{,}732 P = 36{,}60 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A \equiv T_B L_1 \operatorname{sen}(30° + 45°) - P L_1 \operatorname{sen} 30° = 0 \quad \Rightarrow \quad T_B = T_2 = 0{,}518 P = 25{,}88 \text{ kN}$$

(en donde ni siquiera necesitamos usar las longitudes $L_1 = 10/\cos 30°$, $L_2 = 10/\cos 45°$)

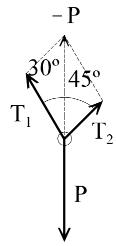
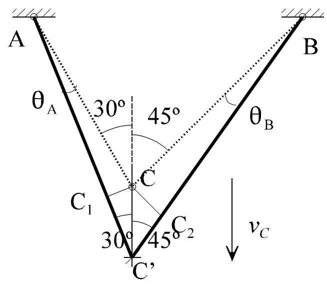


Figura 2

b) Es un problema de **compatibilidad** en movimientos: al descender el punto *C* la cantidad v_C hasta *C'*, los cables se tienen que alargar. Es muy importante entender cuánto se alargan los cables. Para ello, con centro en *A* trazamos la circunferencia C-C_1. El exceso de longitud $\delta_1 = C_1$-C' es el alargamiento del cable 1. De manera similar obtenemos que el alargamiento del cable 2 es $\delta_2 = C_2$-C'. Sabemos que para arcos pequeños las circunferencias degeneran en segmentos perpendiculares; o sea quea efectos de cálculo C-C_1 es un segmento perpendicular a *AC'* y C-C_2, a *BC'*.[1] Por consiguiente:



$$(2) \qquad \begin{aligned} \delta_1 &= v_C \cos 30° \\ \delta_2 &= v_C \cos 45° \end{aligned}$$

Los giros de los cables se calculan mediante:

$$\theta_A = \frac{C - C_1}{L_1} = \frac{v_C \operatorname{sen} 30°}{L_1} \quad ; \quad \theta_B = -\frac{C - C_2}{L_2} = -\frac{v_C \operatorname{sen} 45°}{L_2}$$

---

[1] C-C_1 es un segmento perpendicular *tanto* al cable original *AC como* al deformado *AC'*, porque el ángulo θ_A entre ellos se considera infinitesimal. Por esa misma razón el ángulo *AC'C* del cable deformado es el mismo que el original de 30º del cable sin deformar. Y las mismas cosas pueden decirse respecto del cable 2.

Contragradiencia. Observa la enorme diferencia entre las fórmulas (1) y (2). En el equilibrio proyectamos las fuerzas de los **cables sobre** la fuerza en el **nudo**. En la compatibilidad proyectamos el movimiento del **nudo sobre** los movimientos de los **cables**. Esta importante diferencia es la que conocemos como *contragradiencia*.

Completaremos el ejercicio calculando los movimientos de *C* para el caso *a)* y las cargas que habremos de aplicar en *C* para el caso *b)*.

a') Los alargamientos de los cables son:

$$\delta_1 = \frac{T_1 L_1}{EA} = 8{,}452 \text{ mm} \; ; \quad \delta_2 = \frac{T_2 L_2}{EA} = 7{,}320 \text{ mm}$$

Debemos calcular ahora a dónde irán a encontrarse. Geométricamente sabemos que es en la intersección de las rectas perpendiculares por sus extremos (en las que degeneran las circunferencias con centros en *A* y *B* y extremos en C_1 y C_2 respectivamente, figura 4), pero probablemente es más sencillo determinarlo por el **procedimiento matemático**. Tomamos para *u*, *v* los valores positivos según la figura 4.

$$u_C^{(1)} \equiv \delta_1 \text{sen}30^\circ + \theta_A \times 10 = -\delta_2 \text{sen}45^\circ + \theta_B \times 10 \equiv u_C^{(2)}$$

$$v_C^{(1)} \equiv \delta_1 \cos 30^\circ - \theta_A \times 10 \,\text{tg}30^\circ = \delta_2 \cos 45^\circ + \theta_B \times 10 \, tg45^\circ \equiv v_C^{(2)}$$

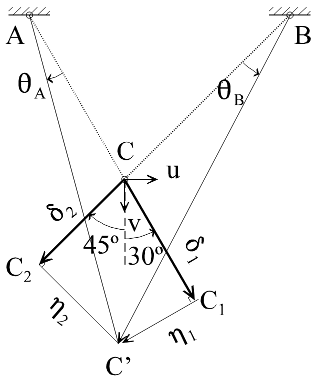


Figura 4

Sistema que da por solución $\theta_A = -0{,}460$ mrad, $\theta_B = 0{,}480$ mrad.
Volviendo con estos valores a las ecuaciones anteriores resulta $u_C = -0{,}376$ mm, $v_C = 9{,}976$ mm.

Por el **procedimiento físico** escribimos vectorialmente:

$$\begin{Bmatrix} u_C \\ v_C \end{Bmatrix} \equiv \delta_1 \begin{Bmatrix} \text{sen}30^\circ \\ \cos 30^\circ \end{Bmatrix} + \eta_1 \begin{Bmatrix} -\cos 30^\circ \\ \text{sen}30^\circ \end{Bmatrix} = \delta_2 \begin{Bmatrix} -\text{sen}45^\circ \\ \cos 45^\circ \end{Bmatrix} + \eta_2 \begin{Bmatrix} \cos 45^\circ \\ \text{sen}45^\circ \end{Bmatrix}$$

que da $\eta_1 = 5{,}314$ mm; $\eta_2 = 6{,}789$ mm y con ellos obtenemos los valores de u_C y v_C encontrados antes. Los giros resultan de $\theta_A = -\eta_1/L_1$, $\theta_B = \eta_2/L_2$.

b') El movimiento $v_C = 5$ mm implica $\delta_1 = v_C . \cos 30^o = 4{,}330$ mm, $\delta_2 = v_C . \cos 45^o = 3{,}536$ mm. Estos alargamientos a su vez implican $T_1 = EA\,\delta_1/L_1 = 18{,}75$ kN, $T_2 = EA\,\delta_2/L_2 = 12{,}50$ kN. La suma vectorial de T_1 y T_2 da $H = 0{,}54$ kN, $V = 25{,}08$ kN (con los signos de *u* y *v* en la figura 4) que son las fuerzas que tendremos que aplicar para conseguir el movimiento v_C con $u_C = 0$.