

**Calcular los movimientos de todos los puntos con nombre de la viga de la figura a.**

Se trata de una viga isostática, merced a la rótula, que nos da una ecuación adicional para calcular las tres reacciones verticales. En la figura b dibujamos la ley de momentos flectores que, dividida por  $EI$ , nos da la curvatura de la viga deformada.

En las vigas es imprescindible empezar el cálculo de movimientos con los giros en los apoyos. Los giros en la viga biapoyada  $AB$  se pueden calcular usando las fórmulas para la carga puntual y un momento en el extremo  $B$  (TR p. 4.15):

$$\theta_A = -\frac{50 \times 4 \times 6 \times 16}{6 \times 10 EI} + \frac{160 \times 10}{6 EI} = -\frac{53,333}{EI} \text{ rad}$$

$$\theta_B = \frac{50 \times 4 \times 6 \times 10}{6 \times 10 EI} - \frac{160 \times 10}{3 EI} = -\frac{253,333}{EI} \text{ rad}$$

Lo reharemos, sin embargo, empleando el método general para mostrar cómo funciona. En el tramo  $AB$  encontramos:

- el giro  $\theta_A$  que nos permitirá acostar la viga sobre el apoyo  $B$ ;
- un giro repartido entre  $A$  y  $D$  de valor  $\theta_1 = \frac{1}{2} \frac{56}{EI}$  rad que fuera de su tramo  $AD$  podremos considerar concentrado en  $x_1 = \frac{2}{3} \times 4$  m;
- un giro repartido entre  $D$  y  $E$  de valor  $\theta_2 = \frac{1}{2} \frac{56}{EI} \times 1,556$  rad que fuera de su tramo  $DE$  podremos considerar concentrado en  $x_2 = 4 + \frac{1}{3} \times 1,556$  m; y
- un giro repartido entre  $E$  y  $B$  de valor  $\theta_3 = \frac{1}{2} \frac{-160}{EI} \times 4,444$  rad que fuera de su tramo  $EB$  podremos considerar concentrado en  $x_3 = 10 - \frac{1}{3} \times 4,444$  m.

$\theta_A$  se calcula con la condición de que la flecha en  $B$  sea nula (que la viga repose en  $B$ ):

$$v_B \equiv \theta_A \times 10 + \Theta_1 \times (10 - x_1) + \Theta_2 \times (10 - x_2) + \Theta_3 \times (10 - x_3) = 0 \Rightarrow \theta_A \equiv -\frac{53,333}{EI}$$

De manera semejante se puede obtener  $\theta_B$ :

$$v_A \equiv -\theta_B \times 10 + \Theta_3 \times x_3 + \Theta_2 \times x_2 + \Theta_1 \times x_1 = 0 \Rightarrow \theta_B \equiv -\frac{253,333}{EI}$$

**Observación importante.** Habrás de notar una diferencia entre las dos fórmulas anteriores:  $\theta_B$  entra ahora con signo negativo porque al ser un **giro absoluto** mueve (cuando es positivo) hacia arriba los puntos a su derecha y hacia abajo los puntos a su izquierda. Los giros  $\Theta_i$  son, en cambio, relativos y mueven hacia arriba (cuando son positivos) tanto los puntos a su derecha como los a su izquierda.

Una vez conocido el giro (absoluto) en un apoyo, es más fácil obtener el otro por la relación:

$$\theta_A + \sum_A^B \Theta_i - \theta_B = 0$$

Conocidos los giros en los apoyos  $A$  y  $B$  procedemos ahora a calcular flechas:

— Calculamos  $v_D$  desde  $A$  que está más próximo:

$$v_D = \theta_A \times 4 + \Theta_1 \times \frac{1}{3} \times 4 = -\frac{64}{EI} \text{ m}$$

aunque también lo podríamos hacer desde  $B$  como sigue:

$$v_D = -\theta_B \times 6 + \Theta_3 \times \left(6 - \frac{1}{3} \times 4,444\right) + \Theta_2 \times \frac{1}{3} \times 1,556 = -\frac{64}{EI} \text{ m}$$

El giro será  $\theta_D = \theta_A + \Theta_1 = 58,667/EI$  rad.

— Calculamos  $v_R$  con toda facilidad partiendo de  $B$ :

$$v_R = \theta_B \times 4 + \frac{1}{2} \times \frac{160}{EI} \times 4 \times \frac{2}{3} \times 4 = -\frac{1.866,67}{EI} \text{ m}$$

— El giro *relativo* en la rótula  $R$  lo calculamos astutamente obligando a que la flecha en  $C$  sea nula, partiendo de  $B$ :

$$v_C \equiv \theta_B \times 8 - \frac{1}{2} \times \frac{160}{EI} \times 4 \times \left(8 - \frac{1}{3} \times 4\right) + \Theta_R \times 4 + \frac{2}{3} \times \frac{40}{EI} \times 4 \times \frac{1}{2} \times 4 = 0 \Rightarrow \Theta_R = \frac{986,67}{EI} \text{ rad}$$

Este giro es el *relativo* (el que normalmente nos interesa en una rótula), diferencia entre el giro por la derecha y el giro por la izquierda. En la expresión anterior están incluidos explícitamente los giros denominados  $\Theta_4$  y  $\Theta_5$  en la figura  $b$ .

— El giro en  $C$  lo obtenemos obligando a que la flecha  $v_R$  calculada desde  $C$  sea igual a la ya encontrada desde  $B$ :

$$v_R \equiv -\theta_C \times 4 + \frac{2}{3} \times \frac{40}{EI} \times 4 \times \frac{1}{2} \times 4 = -\frac{1.866,67}{EI} \Rightarrow \theta_C = \frac{520}{EI} \text{ rad}$$

Los cálculos de  $\Theta_R$  y  $\theta_C$  los hemos realizado con trucos de *profe listo* que debemos aprender porque nos ahorran mucho esfuerzo. Sin embargo, el método general (que no nos fallará nunca) consiste en expresar que las flechas de  $A$  y  $B$  calculadas desde  $C$  son nulas. Este método general conduce a un molesto sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,  $\theta_C$  y  $\Theta_R$ .

$$\left. \begin{aligned} v_B &\equiv -\theta_C \times 8 + \frac{2}{3} \times \frac{40}{EI} \times 4 \times 6 + \Theta_R \times 4 - \frac{1}{2} \times \frac{160}{EI} \times 4 \times \frac{1}{3} \times 4 = 0 \\ v_A &\equiv -\theta_C \times 18 + \frac{2}{3} \times \frac{40}{EI} \times 4 \times 16 + \Theta_R \times 14 - \frac{1}{2} \times \frac{160}{EI} \times 4 \times \left(10 + \frac{1}{3} \times 4\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \times \frac{160}{EI} \times 4,444 \times \left(10 - \frac{1}{3} \times 4,444\right) + \frac{1}{2} \times \frac{56}{EI} \times 1,556 \times \left(4 + \frac{1}{3} \times 1,556\right) + \frac{1}{2} \times \frac{56}{EI} \times 4 \times \frac{2}{3} \times 4 \end{aligned} \right\}$$

sistema que arroja los mismos resultados hallados antes (salvo errores de redondeo).

**Calcular los movimientos de los puntos con nombre de la figura a.**

En ocasiones el cálculo de movimientos resulta más fácil haciendo las integrales oportunas. Para ello hemos de escribir las expresiones analíticas de la ley de momentos flectores. Aquí lo hacemos en función de la coordenada  $z$  (ver figura a).

$$M_1(z) = 21z \quad \forall z \in [B, M]$$

$$M_2(z) = 21z - 10(z-5)^2 \quad \forall z \in [M, A]$$

Los cálculos son:

$$v_B = \theta_A \times 10 + \frac{1}{EI} \int_0^5 M_1(z) z dz + \frac{1}{EI} \int_5^{10} M_2(z) z dz = 0$$

$$v_B = \theta_A \times 10 + \frac{875}{EI} + \frac{2.479}{EI} = 0 \Rightarrow \theta_A = -\frac{335,4}{EI} \text{ rad}$$

$$\theta_A + \frac{1}{EI} \int_0^5 M_1(z) dz + \frac{1}{EI} \int_5^{10} M_2(z) dz - \theta_B = 0$$

$$\theta_A + \frac{262,5}{EI} + \frac{370,833}{EI} - \theta_B = 0 \Rightarrow \theta_B = \frac{297,933}{EI}$$

$$\theta_M = \theta_B - \frac{1}{2} \frac{105}{EI} \times 5 = \frac{35,43}{EI} \text{ rad}$$

$$v_M = -\theta_B \times 5 + \frac{1}{2} \frac{105}{EI} \times 5 \times \frac{1}{3} \times 5 = -\frac{1.052}{EI} \text{ m}$$

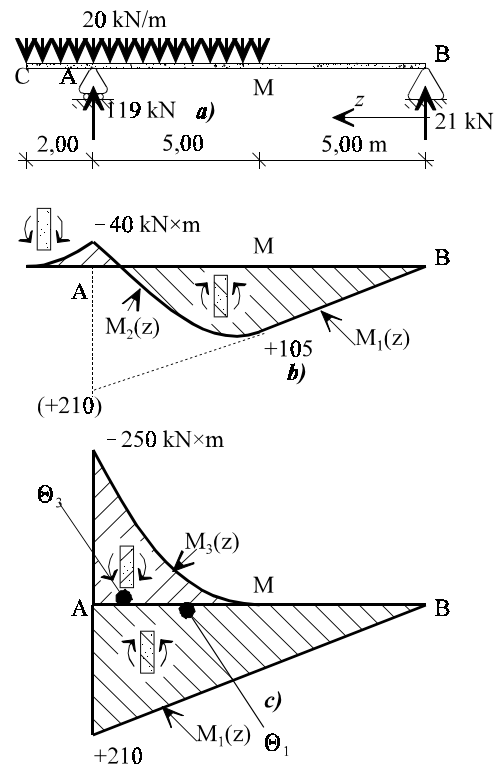
$$\theta_C = \theta_A + \frac{1}{3} \frac{40}{EI} \times 2 = -\frac{308,7}{EI} \text{ rad}$$

$$v_C = -\theta_A \times 2 - \frac{1}{3} \frac{40}{EI} \times 2 \times \frac{3}{4} \times 2 = \frac{630,8}{EI} \text{ m} \uparrow$$

Usando la astucia se puede realizar el cálculo de las integrales anteriores por el método tradicional de cálculo de áreas y momentos estáticos. La ley de momentos flectores en el tramo  $AM$ ,  $M_2(z)$ , se puede descomponer en la suma de la parte lineal (prolongación del tramo  $BM$ ) más un tramo parabólico, como en la figura c, o sea  $M_2(z) = M_1(z) + M_3(z)$ , siendo  $M_3(z) = -10(z-5)^2$ , la parábola dibujada en la figura c. De esta manera el primer cálculo realizado antes se convierte en ahora en:

$$v_B = -\theta_A \times 10 + \frac{1}{2} \frac{210}{EI} \times 10 \times \frac{2}{3} \times 10 - \frac{1}{3} \frac{250}{EI} \times 5 \left( 10 - \frac{1}{4} \times 5 \right) = 0 \Rightarrow \theta_A = -\frac{335,4}{EI}$$

y ni siquiera hemos necesitado escribir la función  $M(z)$ .



**Calcular los movimientos del extremo B del cuadrante de arco circular de la figura a sometido a su propio peso,  $\rho$  kN/m.**

Este ejemplo sirve para ilustrar que en arcos es casi imposible evitar las integrales de la fórmulas de Bresse. Empecemos por hallar la expresión de la ley de momentos flectores. Para ello precisamos dos coordenadas:

- el ángulo  $\omega$ , que designa el punto genérico donde actúa el peso propio  $\rho ds = \rho R d\omega$ ,
- el ángulo  $\varphi$ , que indica el lugar genérico donde medimos el momento flector  $M(\varphi)$ :

$$M(\varphi) = - \int_{\omega=0}^{\omega=\varphi} \rho R d\omega R (\cos\omega - \cos\varphi) = -\rho R^2 (\text{sen}\omega - \omega \cos\varphi) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\varphi} = -\rho R^2 (\text{sen}\varphi - \varphi \cos\varphi)$$

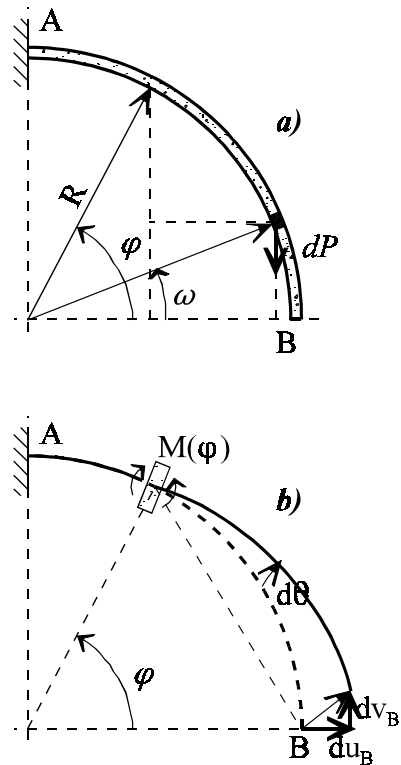
Es reconfortante comprobar que  $M(\pi/2)$  coincide con el valor que se obtiene concentrando todo el peso en el c.d.g.

Los movimientos de B vienen dados por las expresiones:

$$\begin{aligned} \theta_B &= \int_0^{\pi/2} \frac{M(\varphi)}{EI} R d\varphi = -\frac{\rho R^3}{EI} \int_0^{\pi/2} (\text{sen}\varphi - \varphi \cos\varphi) d\varphi = -\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\rho R^3}{EI} \\ u_B &= \int_0^{\pi/2} \frac{M(\varphi)}{EI} R \text{sen}\varphi R d\varphi = -\frac{\rho R^4}{EI} \int_0^{\pi/2} (\text{sen}\varphi - \varphi \cos\varphi) \text{sen}\varphi d\varphi = -\frac{\pi}{8} \frac{\rho R^4}{EI} \\ v_B &= \int_0^{\pi/2} \frac{M(\varphi)}{EI} R (1 - \cos\varphi) R d\varphi = -\frac{\rho R^4}{EI} \int_0^{\pi/2} (\text{sen}\varphi - \varphi \cos\varphi) (1 - \cos\varphi) d\varphi = -\left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{2} + \frac{5}{4}\right) \frac{\rho R^4}{EI} \end{aligned}$$

La integral más difícil es la última, y se resuelve como sigue:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \text{sen}\varphi d\varphi &= -\cos\varphi \Big|_0^{\pi/2} = 1 \\ \int_0^{\pi/2} \varphi \cos\varphi d\varphi &= \varphi \text{sen}\varphi \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \text{sen}\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} - 1 \\ \int_0^{\pi/2} \text{sen}\varphi \cos\varphi d\varphi &= -\frac{1}{4} \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \\ \int_0^{\pi/2} \varphi \cos^2\varphi d\varphi &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \varphi (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\varphi^2}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \varphi \text{sen} 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \text{sen} 2\varphi d\varphi \right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$



En el pórtico de la figura *a*, calcular el desplazamiento del punto *B* (en la dirección que permite su apoyo).

Simplificaremos el cálculo determinando no el valor  $u_B$  real de la figura *a*, sino el  $u'_B$  de la figura *b*, en la dirección *AB*. Así nos ahorraremos el cálculo de  $\theta_A$ .

Precisamos la ley de momentos flectores, que hemos dibujado descompuesta en sus “ingredientes simples” en la figura *b*.

Según la dirección *AB*, se obtiene (multiplicando giros concentrados por su brazo perpendicular a *AB*, figura *b*):

$$u'_B = \frac{2}{3} \frac{22,5}{EI} \cdot 3 \frac{3}{2} \text{sen}\alpha - \frac{1}{2} \frac{51,43}{EI} \cdot 3 \frac{2}{3} \text{sen}\alpha - \frac{1}{2} \frac{51,43}{EI} \cdot 4 \frac{2}{3} \text{sen}\beta = -\frac{234}{EI} \text{ m}$$

siendo  $\alpha$  y  $\beta$  los ángulos indicados en la figura *b*, cuyos senos son,  $\text{sen}\alpha = 4/5$ ,  $\text{sen}\beta = 3/5$ .

El desplazamiento calculado es  $u'_B$  (figura *b*), relacionado con el desplazamiento real  $u_B$  por la relación:

$$u'_B = u_B \cos(\alpha - 45^\circ) \Rightarrow u_B = -\frac{236,4}{EI} \text{ m}$$

Este ejemplo ilustra dos trucos:

- se pueden calcular movimientos en cualquier dirección multiplicando giros (concentrados o repartidos en forma de curvatura) por sus brazos perpendiculares a esa dirección;
- en ocasiones es preferible calcular un movimiento en dirección distinta de la deseada y luego hacer la transformación precisa.

