Examen extraordinario Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad 21 de noviembre de 2016	Apellidos . . . . Nombre . . . . Nº..................... Curso 3º

Ejercicio 1. (Se recogerá a las 10,30 h aproximadamente.)

En la construcción de un puente de hormigón pretensado aparecen las siguientes fases:

1. Se coloca la viga de la figura *a)* con un axil *N* aplicado en el punto *A* de las secciones extremas. La sección inicial de la viga se muestra en la figura *b)*. El axil ***N*** es el mayor posible sin que en ningún punto de la viga sometida a su propio peso aparezcan tracciones superiores a 3 MPa. El peso específico de la viga es de 25 kN/m^3. En esta fase se pide:

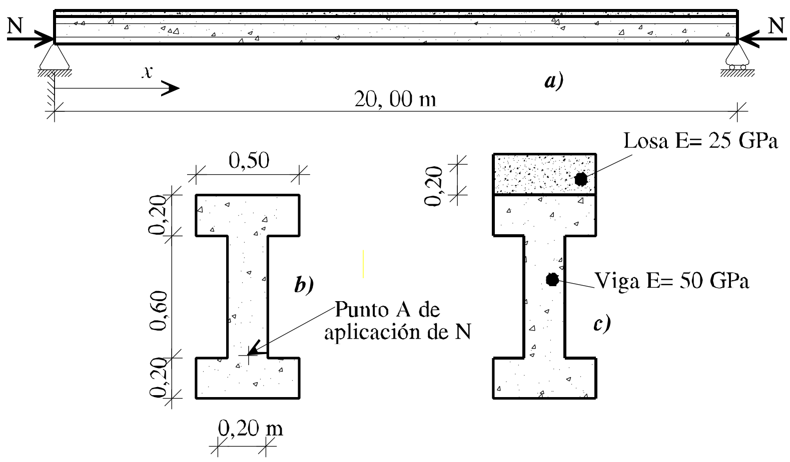
a) Determinar el valor del axil N *y la coordenada* x *de la sección que lo determina.*

2. Se coloca sobre la viga una losa de hormigón como indica la figura *b)*. El peso específico de este hormigón es también de 25 kN/m^3 pero su módulo de elasticidad, una vez fraguado, es menor que el de la viga, como se indica en la figura *c)*.

3. Cuando la losa ha endurecido y el conjunto viga-losa forma una nueva viga, se coloca sobre ésta una sobrecarga uniforme de *p* kN/m. En esta fase final se pide:

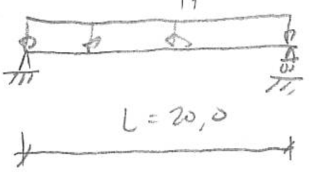
b) Determinar el valor máximo de la sobrecarga p *sin que en ningún punto de la viga se supere la tracción de 3 MPa e indicar la coordenada* x *de la sección que lo determina.*

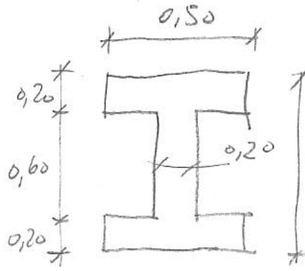
c) Dibujar la distribución de tensiones en la sección del apartado anterior.



FASE 1

$q_p = 25 \cdot 0,32 = 8 \frac{kN}{m}$

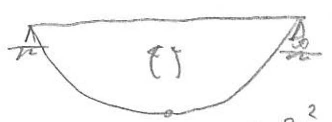




$y_G = 0,5\,m$

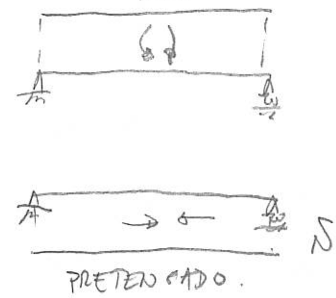
$A = 0,5 \cdot 1 - 0,3 \cdot 0,6 = 0,32\ m^2$

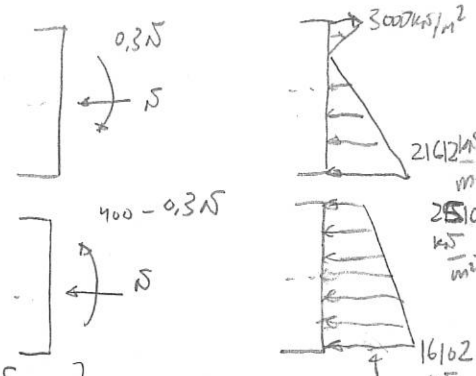
$I = \frac{1}{12}\left(0,5 \cdot 1^3 - 0,3 \cdot 0,6^3\right) = 0,0363\ m^4$



$M_{CDV} = 8 \cdot \frac{20^2}{8} = 400\ mkN$

P. PROPIO





a) N y x

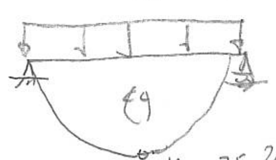
Apoyo: $\sigma_{sup} \leq 3000\ kN/m^2 \Rightarrow -\frac{N}{0,32} + \frac{0,3N \cdot 0,5}{0,0363} \leq 3000 \Rightarrow N \leq 2978\ kN$

CDV: $\sigma_{inf} \leq 3000\ \frac{kN}{m^2} \Rightarrow -\frac{N}{0,32} + \frac{(400 - 0,3N)\,0,5}{0,0363} \leq 3000 \Rightarrow N \geq 376\ kN$

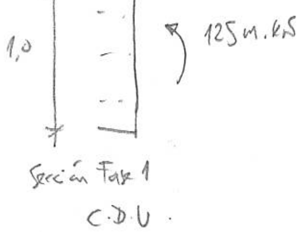
$\Rightarrow \boxed{N = 2978\ kN \quad x = 0\ m.}$

FASE 2

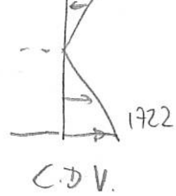
$q_L = 25 \cdot 0,2 \cdot 0,5 = 2,5 \frac{kN}{m}$



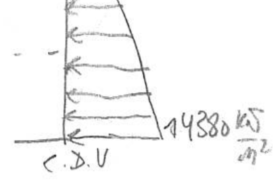
$M = 2,5 \cdot \frac{20^2}{8} = 125\ m.kN$



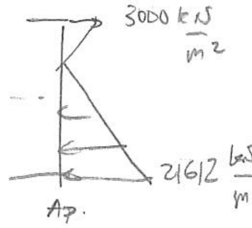
$125 \cdot \frac{0,5}{0,0363} = 1722 \frac{kN}{m^2}$



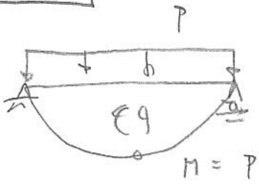
Fase 1+2 $\longrightarrow$



Apoyo: la fase 2 no altera nada



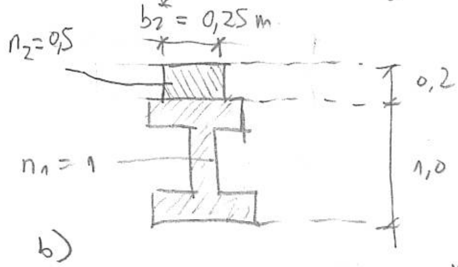
FASE 3



$M = P \cdot \frac{20^2}{8} = 50P$

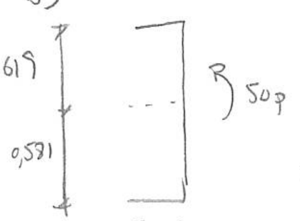
$A^* = 0,32 + 0,25 \cdot 0,2 = 0,37\ m^2$

$y_G^* = \frac{0,32(0,5) + 0,25 \cdot 0,2\,(1,1)}{0,37} = 0,581\ m.$



$I^* = 0,0363 + 0,32(0,581 - 0,5)^2 + \frac{1}{12}\,0,25 \cdot 0,2^3 + 0,25 \cdot 0,2\,(1,1 - 0,581)^2 = 0,052\ m^4$

b)



$\sigma_{inf} = \sigma_{inf}^* \leq 3000 \frac{kN}{m^2} - \sigma_{previa}$

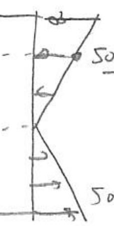
$\frac{50p \cdot 0,581}{0,052} - 14380 \leq 3000 \Rightarrow \boxed{p = 31,1 \frac{kN}{m}}$ $\boxed{x = 0,5L}$

Tensiones $\longrightarrow$ Fase 3

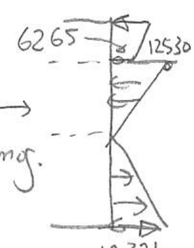
$\sigma_{sup}^* = \frac{50 \cdot 31,1 \cdot 0,619}{0,052} = 18510$

$\frac{50 \cdot 31,1 \cdot 0,419}{0,052} = 12530$

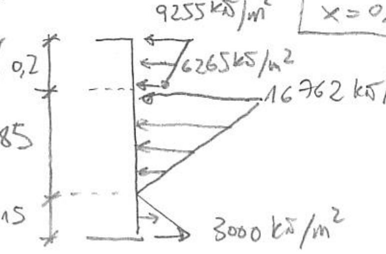
$\frac{50 \cdot 31,1 \cdot 0,581}{0,052} = 17374$



$\longrightarrow$ Deshomog.



c) TENSIÓN TOTAL CDV



Examen extraordinario Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad 21 de noviembre de 2016	Apellidos . . . . Nombre . . . . Nº..................... Curso 3º

Ejercicio 2. (Se recogerá a las 11,00 h aproximadamente.)

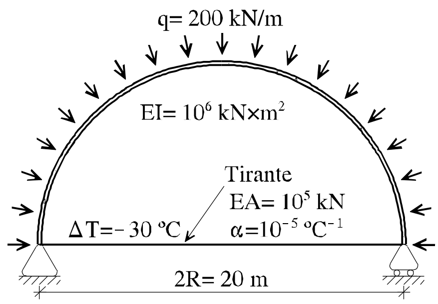
El arco semicircular atirantado de la figura se va a estudiar bajo dos condiciones de carga distintas. Para el arco sometido únicamente a la carga radial uniforme de la figura, se pide:

a) Calcular el esfuerzo axil en el tirante. (*2 puntos*)

b) Dibujar y acotar la ley de esfuerzos axiles. (*2 puntos*)

Para el arco sometido únicamente al enfriamiento del tirante dado en la figura, se pide:

c) Calcular el esfuerzo axil en el tirante. (*6 puntos*)



Ejercicio 2 de dic-16

a) Se sabe que el arco circular es el antifunicular de la carga radial uniforme y que N=-qR

Si no se sabe, se obtiene: $q := 200 \quad R := 10$

$$V_B := \int_0^{\frac{\pi}{2}} q \cdot R \cdot \sin(\omega)\, d\omega \qquad V_B = 2 \cdot 10^3$$

$$M_q(\phi) := V_B \cdot R \cdot (1 - \cos(\phi)) - \int_0^{\phi} q \cdot R \cdot \sin(\phi - \omega) \cdot R\, d\omega$$

Resulta $M_q(\phi)=0$ en todo el arco

Si no hay momentos flectores, B no se mueve y el axil en el tirante nulo

b) $N(\phi) := V_B \cdot \cos(\phi) - \int_0^{\phi} q \cdot \sin(\phi - \omega) \cdot R\, d\omega$

Resulta N=-q.R en todo el arco

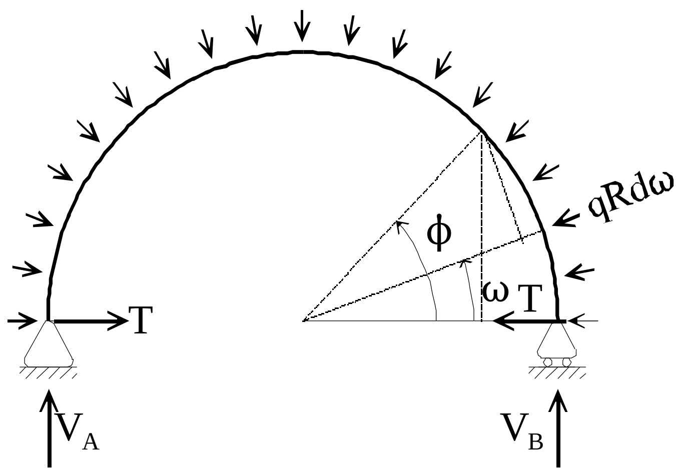
c) Por temperatura $\alpha := 10^{-5} \quad \Delta T := 30 \quad EA := 10^5 \quad EI := 10^6$

Ecuación hiperestática: u_B(tirante)=u_B(arco)

$$\frac{T \cdot 2 \cdot R}{EA} := 2 \cdot R \cdot \alpha \cdot \Delta T + \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{\pi} M_T(\phi)\, R \cdot \sin(\phi) \cdot R\, d\phi$$

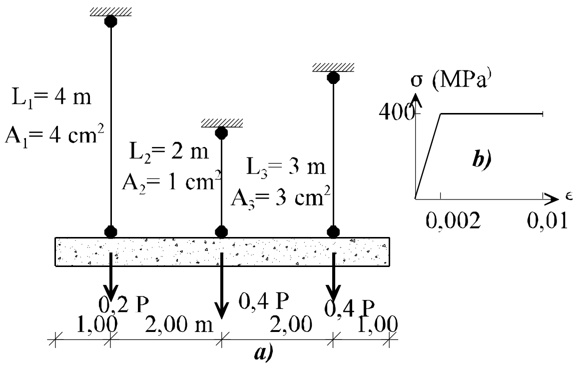
Con $M_T(\phi)=-T.R.\sin(\phi)$

$$T := \frac{2 \cdot R \cdot \alpha \cdot \Delta T}{\frac{2 \cdot R}{EA} + \frac{R^3}{EI} \cdot \int_0^{\pi} \sin(\phi)^2\, d\phi} \qquad T = 3.388$$



Examen extraordinario Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad 21 de noviembre de 2016	Apellidos . . . . Nombre . . . . Nº.................... Curso 3º

Ejercicio 3. (Se recogerá a las 13,00 h aproximadamente.)



La estructura de la figura *a)* consiste en una viga infinitamente rígida que cuelga de tres cables de características geométricas dife-rentes pero del mismo material. La curva de tensión-deformación de este material hasta rotura se muestra en la figura *b)*. De la viga cuelga una carga total *P* (distribuida como se muestra en la figura *a)*, la cual aumentará lentamente desde cero hasta un valor final a determinar. Se pide:

a) Escribir las ecuaciones siguientes que rigen el estado tensional: de equilibrio, de compatibilidad, constitutiva, relación esfuerzo-tensión y relación desplazamiento-deformación, e indicar el rango de validez de cada una de ellas. (*5×0,4= 2 puntos*)

b) Rellenar una tabla como la mostrada con las magnitudes del esfuerzo, la tensión, la deformación y el alargamiento en cada cable para los siguientes valores de la carga *P*: (*i*) 10 kN; (*ii*) agotamiento de un primer cable; (*iii*) agotamiento de un segundo cable; (*iv*) rotura de un primer cable. (*4×2= 8 puntos*)

Suceso	***Cable 1***				***Cable 2***				***Cable 3***				**Carga**
	T_1 (kN)	**σ_1** (MPa)	**$\epsilon_1 \times 10^3$**	**δ_1** (mm)	**T_2** (kN)	**σ_2** (MPa)	**$\epsilon_2 \times 10^3$**	**δ_2** (mm)	**T_3** (KN)	**σ_3** (MPa)	**$\epsilon_3 \times 10^3$**	**δ_3** (mm)	
10 kN													10 kN
Agot.1º													
Agot.2º													
Rotura													

Equilibrio: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,2 \end{Bmatrix}$ a cumplir en todo instante.

Constitutiva: $\sigma = E\epsilon$ (mientras ϵ<1/1000). Esfuerzo-tensión: $T = \sigma A$ (hasta rotura).
Desplazamiento-deformación: $\delta = \epsilon L$ (hasta rotura).

Compatibilidad: $\delta_2 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3)$ (en todo instante) que en fase elástica es

$$\left\langle \frac{L_1}{EA_1} \quad -2\frac{L_2}{EA_2} \quad \frac{L_3}{EA_3} \right\rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = 0$$

En fase elástica, pues: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,2 \\ 0 \end{Bmatrix}$ **que da**: $\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{Bmatrix} P$. Con P= 10 kN rellenamos la primera fila de la tabla

La mayor tensión la soporta el cable 2 que plastificará cuando multipliquemos por 20 la fila 1.

Agotado el cable 2, los incrementos de carga se repartirán cumpliendo el equilibrio sin él, $\Delta T_1 = 0,4\Delta P$, $\Delta T_3 = 0,6\Delta P$. Plastificará antes el 3, porque tiene más tensión y la incrementa más rápido. Plastificado el 3 ya no podemos añadir más carga. El 1 permanece en fase elástica y las deformaciones de los otros aumentan hasta alcanzar la rotura en el 2 o en el 3. Hacemos la hipótesis de que es el 3 poniendo ϵ_3= 10/1000, calculamos δ_3 y con ella y δ_1 obtenemos δ_2 y ϵ_2. Efectivamente, ϵ_2 es menor que el de rotura.

Suceso	***Cable 1***				***Cable 2***				***Cable 3***				**Carga**
	T_1 (kN)	**σ_1** (MPa)	**$\epsilon_1 \times 10^3$**	**δ_1** (mm)	**T_2** (kN)	**σ_2** (MPa)	**$\epsilon_2 \times 10^3$**	**δ_2** (mm)	**T_3** (KN)	**σ_3** (MPa)	**$\epsilon_3 \times 10^3$**	**δ_3** (mm)	**(kN)**
10 kN	**3**	7,5	,0375	0,15	**2**	20	0,1	0,2	**5**	16,66	,0833	0,25	10
Agota 2	60	150	0,75	3	40	**400**	2	4	100	333,3	1,667	5	200
Agota 3	73,33	183,3	0,916	3,667	“	“	2,417	4,833	120	**400**	2	6	233,33
Rompe 3	“	“	“	“	“	“	8,417	16,83	“	“	**10**	30	“

Examen extraordinario Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad 21 de noviembre de 2016	Apellidos . . . . Nombre . . . . Nº..................... Curso 3º

Ejercicio 4. (Se recogerá a las 13,30 h aproximadamente.)

Dada la función:

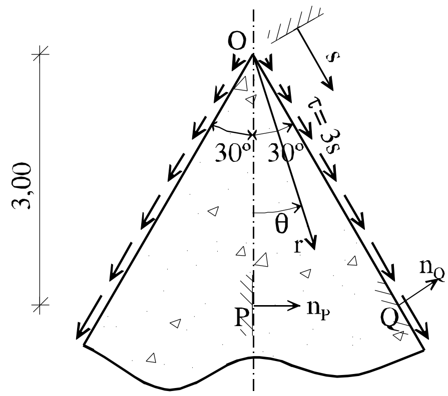
$$\Phi(r,\theta) = r^3(A\cos 3\theta + B\cos\theta)$$

se pide:

a) Demostrar que puede ser utilizada como función de Airy de algún problema elástico. (*2 puntos*)

b) Obtener las expresiones de las tensiones correspondientes. Decir qué ecuaciones satisfacen estas tensiones y por qué. (*1,5 puntos*)

c) Probar que con las tensiones anteriores se puede resolver el problema de la cuña de la figura de 1,00 m de espesor, sometida a una tensión tangencial creciente $\tau = 3s$ sobre sus caras (s, distancia a O sobre la cara). Determinar el valor de las constantes A y B. (*4 puntos*)



d) Obtener la tensión total en el punto P sobre el plano PO y en el punto Q sobre el plano QO. Expresarlas por su módulo y su ángulo con el eje de la cuña. (*2,5 puntos*)

Solución:

1)

$$\Phi_{,r} = 3r^2(\ \ A\cos 3\Theta + B\cos\Theta)$$
$$\Phi_{,rr} = \ \ 6r(\ \ A\cos 3\Theta + B\cos\Theta)$$
$$\Phi_{,\theta} = \ \ r^3(-3A\operatorname{sen}3\Theta - B\operatorname{sen}\Theta)$$
$$\Phi_{,\theta\theta} = \ \ r^3(-9A\cos 3\Theta - B\cos\Theta)$$

$$\sigma_\theta = r^{-1}\Phi_{,r} + r^{-2}\Phi_{,\theta\theta} = r(-6A\cos 3\Theta + 2B\cos\Theta)$$
$$\sigma_r = \Phi_{,rr} \qquad\qquad = r(\ 6A\cos 3\Theta + 6B\cos\Theta)$$

$$\nabla^2\Phi = \qquad 8Br\cos\Theta$$

$$r^{-1}(\nabla^2\Phi)_{,r} = 8B\cos\theta/r$$
$$(\nabla^2\Phi)_{,rr} = 0$$
$$r^{-2}(\nabla^2\Phi)_{,\theta\theta} = -8B\cos\Theta/r$$

$$\nabla^4\Phi \quad = \quad 0$$

La función Φ es biarmónica, luego puede ser función de Airy de <u>algún</u> problema elástico.

2) σ_r, σ_θ fueron obtenidas más arriba.

$$\tau_{r\theta} = -(r^{-1}\Phi_{,\theta})_{,r} = 2r(3A\operatorname{sen}3\Theta + B\operatorname{sen}\Theta)$$
$$\sigma_\theta = r(-6A\cos 3\Theta + 2B\cos\Theta)$$
$$\sigma_r = r(\ 6A\cos 3\Theta + 6B\cos\Theta)$$

Estas tensiones satisfarán forzosamente:

a) las ecuciones de equilibrio interno, porque han sido obtenidas a partir de una función de tensiones Φ;

b) las ecuaciones de compatibilidad, porque Φ es biarmónica.

3) Las condiciones de contorno son:

$$\sigma_\theta\ (\Theta=\pm\alpha) = 0 \implies \quad \tau_{r\theta}(\Theta=\pm\alpha) = \pm ar \implies \quad \begin{bmatrix} \cos 3\alpha & -\cos\alpha \\ \operatorname{sen}3\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6A \\ 2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$$

cuya solución es

$$A = \frac{a\cos\alpha}{6\operatorname{sen}4\alpha} \quad ; \quad B = \frac{a\cos 3\alpha}{2\operatorname{sen}4\alpha}$$

La tensión total en P sobre el plano OP es $\sigma_\theta(r=h)$ $(\Theta=\pi/2)$ porque en dicho punto $\tau_{r\theta=0}$. La tensión total en S sobre el plano SO es $\tau_{r\theta} = ah/\cos\alpha$ $(\Theta=\alpha)$ porque en dicho punto $\sigma_\theta=0$.

Resultados numéricos:

α	h	a	A	B	t_P	t_S
20.0	1.5	1.5	.2385	.3808	-1.0046	2.3944
25.0	2.5	2.5	.3835	.3285	-4.1092	6.8961
30.0	3.0	3.0	.5000	.0000	-9.0000	10.3923
35.0	3.5	3.5	.7434	-.7046	-20.5436	14.9545
40.0	4.5	4.5	1.6798	-3.2893	-74.9588	26.4345