Examen extraordinario Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad 16 de septiembre de 2016	Apellidos.. Nombre................................Nº................ Curso 3º

Ejercicio 1. (Se recogerá a las 17,30 horas, aproximadamente.)

El arco circular de la figura, de radio *R*, tiene la sección rectangular indicada en la propia figura. El arco está apoyado en *A* y *C* y tiene una rótula en *B*. El tramo *AB* se somete al incremento uniforme de temperatura ΔT dado en la figura. Se pide:

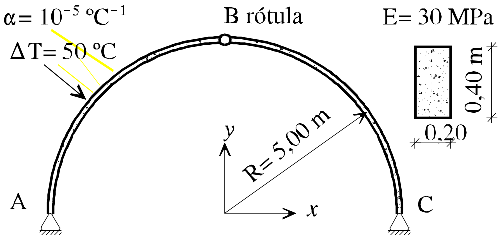
1) Determinar el esfuerzo axil en el punto *B*. (*2 puntos*)

2) Expresar la curvatura de la sección en el tramo *AB*. (*1 punto*)

3) Obtener el giro relativo en la rótula *B*. (*3 puntos*)

4) Obtener el giro en el apoyo *C*. (*2 puntos*)

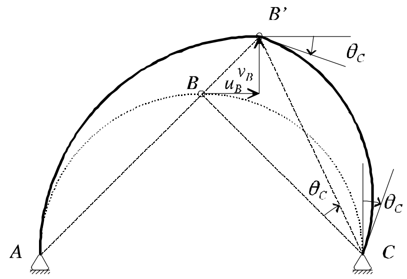
5) Calcular el movimiento horizontal del punto *B*. (*2 puntos*)



Estructura isostática; las deformaciones impuestas no le producen esfuerzos. Las deformaciones son:

$$\epsilon_G = \alpha \Delta T_G = \alpha \Delta T \; ; \quad \chi = -\frac{\alpha}{h}\left(\Delta T_s - \Delta T_i\right) = 0$$

Método físico



Por dilatación de *AB*, el punto *B* se va a *B'* con:

$$\overline{BB'} = \alpha \Delta T \overline{AB}$$
$$u_B = v_B = \alpha \Delta T R$$

Este movimiento se compatibiliza con el giro θ_C del arco *BC* porque *BB'* es perpendicular a *BC*. Por consiguiente:

$$\theta_A = 0$$

$$\theta_C = -\frac{\overline{BB'}}{\overline{BC}} = -\frac{u_B}{R} = -\frac{v_B}{R} = -\alpha \Delta T$$

El arco *AB* no gira y el *BC* gira θ_C. El giro relativo en la rótula será:

$$\theta_B^{(rel)} = \theta_B^{(d)} - \theta_B^{(i)} = \theta_C - 0 = -\alpha \Delta T$$

La estructura isostática acomoda cualquier deformación o movimiento impuesto sin sufrir esfuerzos.

Método matemático

$$\left.\begin{aligned} u_C &\equiv \alpha \Delta T R + \theta_B^{(rel)} R = 0 \\ v_C &\equiv \theta_A R + \alpha \Delta T R + \theta_B^{(rel)} R = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \theta_A &= 0 \\ \theta_B^{(rel)} &= -\alpha \Delta T \end{aligned}\right\}$$

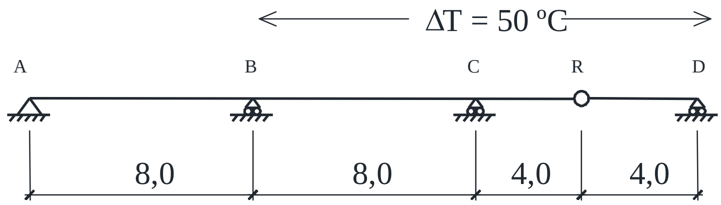
$$\theta_A + \theta_B^{(rel)} - \theta_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_C = \theta_B^{(rel)} = -\alpha \Delta T$$

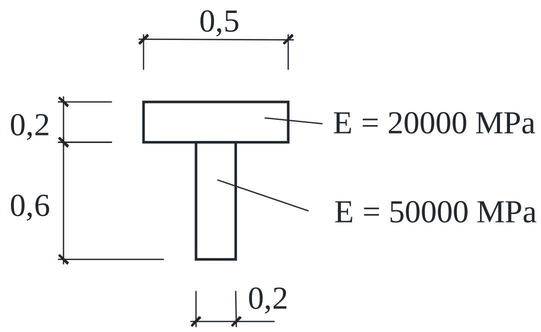
$$\left.\begin{aligned} u_B &= \theta_A R + \alpha \Delta T R = \alpha \Delta T R \\ v_B &= \theta_A R + \alpha \Delta T R = \alpha \Delta T R \end{aligned}\right\}$$

Examen de septiembre Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad 16 de septiembre de 2016	Apellidos………………………………………………. Nombre…………………Nº matrícula………………… Curso 3º

Ejercicio 2 **Este ejercicio se recogerá a las 18:00**

La viga continua de la figura está formada por una sección transversal compuesta por dos materiales. El módulo de elasticidad de cada material se indica en la figura. El coeficiente de dilatación térmica de ambos materiales es $\alpha = 10^{-5}$ ºC^{-1}. El tramo BD de la viga se ve sometido a un calentamiento en la cara superior de la viga de valor ΔT y nulo en la cara inferior, siendo el gradiente térmico lineal en el canto. Se pide:





a) Calcular el movimiento horizontal de D. (**2 puntos**)
b) Dibujar y acotar las leyes de esfuerzos cortantes, axiles y momentos flectores. (**5 puntos**)
c) Obtener el movimiento vertical de R. (**3 puntos**)

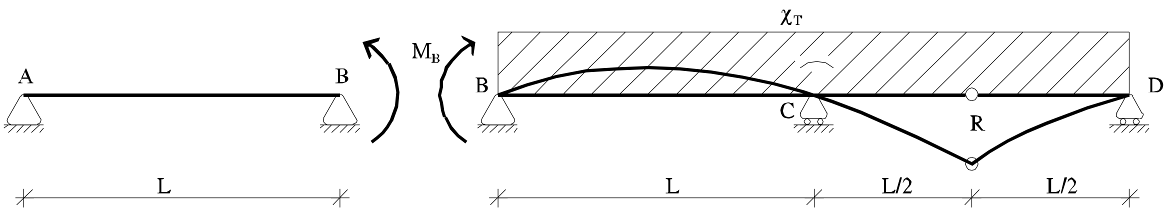
Al homogeneizar la sección, ésta resulta rectangular con $h=0{,}8$, $b^{*}=0{,}2$, $E=5\times10^{7}$, $EI=426.667$ kN×m^2.

Las deformaciones impuestas son $\epsilon_G=0{,}5\alpha\Delta T$, $\chi_T=-\alpha\Delta T/0{,}8=-1{,}25\alpha\Delta T$.

El movimiento horizontal de D es $u_D=\epsilon_G\times2L=\alpha\Delta TL=\Delta TL\times10^{-5}$.

No existen esfuerzos axiles porque los tramos afectados por ϵ_G se mueven libremente.

Para determinar la ley de momentos flectores calculamos M_B con la ecuación de compatibilidad en giros $\theta_B^{(i)}=\theta_B^{(d)}$. A la derecha, la curvatura χ_T causa en B un giro que calculamos con la condición de flecha nula en C:

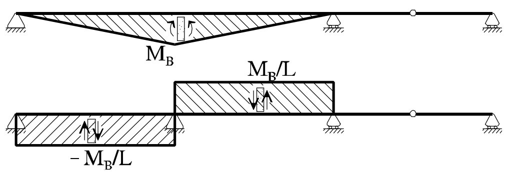


$$v_C\equiv\ \theta_B^{(\Delta T)}L+\chi_T L\frac{L}{2}=0;\quad\Rightarrow\quad\theta_B^{(\Delta T)}=-\chi_T\frac{L}{2}$$

$$\theta_B^{(i)}\equiv\ \frac{M_BL}{3EI}=-\frac{M_BL}{3EI}-\chi_T\frac{L}{2}\equiv\ \theta_B^{(d)}$$

$$M_B=-0{,}75\chi_T EI=\ 0{,}9375\alpha\Delta TEI=\ 4\Delta T$$

Los esfuerzos son:



El giro final en C es:

$$\theta_C=\ \chi_o\frac{L}{2}+\frac{M_BL}{3EI}=-3{,}125\times10^{-6}\Delta TL$$

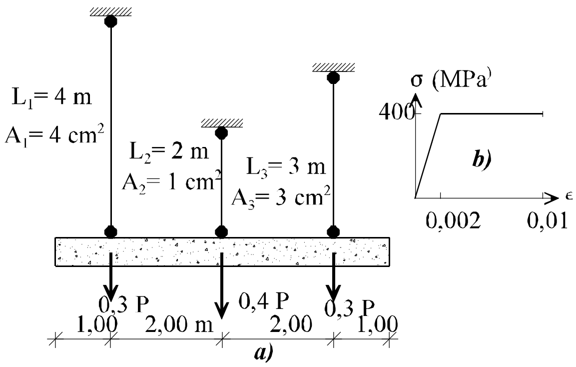
y la flecha en la rótula R:

$$v_C=\ \theta_C\frac{L}{2}+\chi_o\frac{L}{2}\frac{L}{4}=-3{,}125\times10^{-6}\Delta TL^{2}$$

Examen extraordinario Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad 16 de septiembre de 2016	Apellidos.. Nombre................................Nº................ Curso 3º

Ejercicio **3**. (Se recogerá a las 20,00 h aproximadamente.)

La estructura de la figura *a)* consiste en una viga infinitamente rígida que cuelga de tres cables de características geométricas diferentes pero del mismo material. La curva de tensión-deformación de este material hasta rotura se muestra en la figura *b)*. De la viga cuelga una carga total *P* (distribuida como se muestra en la figura *a)*, la cual aumentará lentamente desde cero hasta un valor final a determinar. Se pide:



a) Escribir las ecuaciones siguientes que rigen el estado tensional: de equilibrio, de compatibilidad, constitutiva, relación esfuerzo-tensión y relación desplazamiento-deformación, e indicar el rango de validez de cada una de ellas.

(*5×0,4= 2 puntos*)

b) Rellenar una tabla como la mostrada con las magnitudes del esfuerzo, la tensión, la deformación y el alargamiento en cada cable para los siguientes valores de la carga *P*: (*i*) 10 kN; (*ii*) agotamiento de un primer cable; (*iii*) agotamiento de un segundo cable; (*iv*) rotura de un primer cable.

(*4×2= 8 puntos*)

Suceso	***Cable 1***				***Cable 2***				***Cable 3***				**Carga**
	T_1 (kN)	**σ_1** (MPa)	**$\epsilon_1 \times 10^3$**	**δ_1** (mm)	**T_2** (kN)	**σ_2** (MPa)	**$\epsilon_2 \times 10^3$**	**δ_2** (mm)	**T_3** (KN)	**σ_3** (MPa)	**$\epsilon_3 \times 10^3$**	**δ_3** (mm)	
10 kN													10 kN
Agot.1º													
Agot.2º													
Rotura													

Equilibrio: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ a cumplir en todo instante.

Constitutiva: $\sigma = E\epsilon$ (mientras ϵ<1/1000). Esfuerzo-tensión: $T = \sigma A$ (hasta rotura). Desplazamiento-deformación: $\delta = \epsilon L$ (hasta rotura).

Compatibilidad: $\delta_2 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3)$ (en todo instante) que en fase elástica es $\left\langle \frac{L_1}{EA_1} \quad -2\frac{L_2}{EA_2} \quad \frac{L_3}{EA_3} \right\rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = 0$

En fase elástica, pues: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ que da: $\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}2 \\ 0{,}4 \end{Bmatrix} P$. Con P= 10 kN rellenamos la primera fila de la tabla

La mayor tensión la soporta el cable 2 que plastificará cuando multipliquemos por 20 la fila 1.

Agotado el cable 2, los incrementos de carga se repartirán a partes iguales entre el 1 y el 3 ya que $T_1=T_3$ en todo instante. Plastificará antes el 3. Plastificado el 3 ya no podemos añadir más carga. El 1 permanece en fase elástica y las deformaciones de los otros aumentan hasta alcanzar la rotura en el 2 o en el 3. Hacemos la hipótesis de que es el 3 poniendo ϵ_3= 10/1000, calculamos δ_3 y con ella y δ_1 obtenemos δ_2 y ϵ_2.

Suceso	***Cable 1***				***Cable 2***				***Cable 3***				**Carga**
	T_1 (kN)	**σ_1** (MPa)	**$\epsilon_1\times10^3$**	**δ_1** (mm)	**T_2** (kN)	**σ_2** (MPa)	**$\epsilon_2\times10^3$**	**δ_2** (mm)	**T_3** (KN)	**σ_3** (MPa)	**$\epsilon_3\times10^3$**	**δ_3** (mm)	**(kN)**
10 kN	**4**	10	0,05	0,2	**2**	20	0,1	0,2	**4**	13,33	0,066	0,2	10
Agota 2	80	200	1	4	40	**400**	**2**	4	80	266,6	1,333	4	200
Agota 3	120	300	1,5	6	40	400	3	6	120	**400**	**2**	6	280
Rompe 3	120	300	1,5	6	40	400	9	18	120	400	**10**	30	280

Examen final Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad 16 de septiembre de 2016	Apellidos... Nombre .... Nº.................... Curso 3º

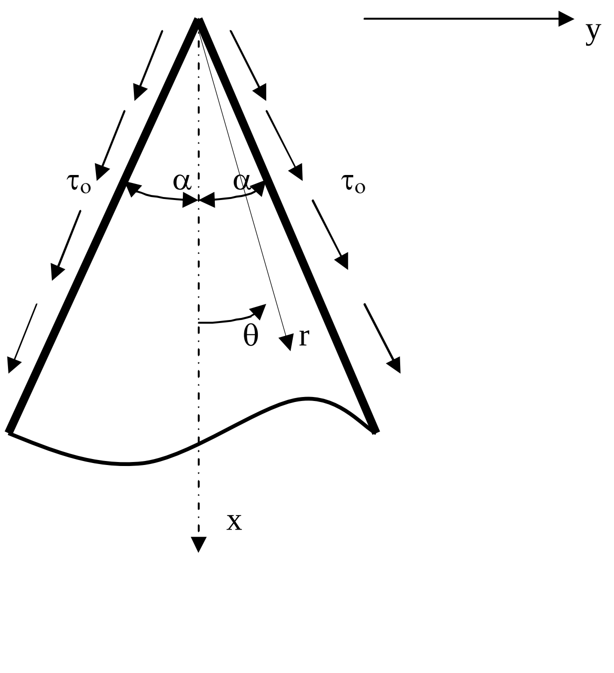
EJERCICIO 4. (Se recogerá a las 20,30 h aprox.)

La cuña de la figura tiene un ángulo de abertura de valor 2 α, está sometida en dos de sus caras a una tensión tangencial constante de valor τ_o y su dimensión en la dirección x (ver figura) es muy grande. Para el estudio de la distribución de tensiones en dicha cuña en el plano de la figura se considera la siguiente función de tensión de Airy

$$\Phi(r,\theta) = Cr^2[\cos(2\theta) - \cos(2\alpha)]$$

donde C es una constante y las coordenadas (r,θ) se indican en la figura. Se pide:

1. Comprobar que dicha función es una función de Airy. (2 puntos)
2. Calcular las componentes del tensor de tensiones para un punto cualquiera de coordenadas (r, θ) y determinar el valor de C especificando claramente las condiciones de contorno. Nota: en el plano del dibujo la cuña tiene tres contornos pero es suficiente analizar y hacer cumplir las condiciones de contorno en las dos caras de la cuña que tienen aplicada la tensión tangencial τ_o (los contornos $\theta = \alpha$ y $\theta = -\alpha$) ¿Cuáles son las condiciones de contorno que se asumen en el contorno que no es necesario analizar y por qué se pueden asumir dichas condiciones? (3 puntos)
3. Comprobar que la tensión normal σ_{xx} (ver eje x en la figura) es constante en la pieza y calcular su valor para τ_o= 150 kPa, $\alpha = \pi/6$. (3 puntos)
4. Especificar si el análisis se corresponde con uno de tensión plana o uno de deformación plana. (2 puntos).



$$\begin{aligned} \Phi &= Cr^2(\cos 2\theta - \cos 2\alpha) \\ \sigma_\theta = \Phi_{,rr} &= 2C(\cos 2\theta - \cos 2\alpha) \\ \sigma_r = r^{-1}\Phi_{,r} + r^{-2}\Phi_{,\theta\theta} &= -2C(\cos 2\theta + \cos 2\alpha) \\ \tau_{r\theta} = -(r^{-1}\Phi_{,\theta})_{,r} &= 2C\,\mathrm{sen}\,2\theta \end{aligned}$$

Se observa que $\sigma_r+\sigma_\theta= cte.$, luego $\nabla^4\Phi= 0$. La función puede resolver *algún* problema elástico.

Para resolver *nuestro* problema elástico habremos de satisfacer las condiciones de contorno:

$$\sigma_\theta(\theta=\pm\alpha)= 0,$$

las cuales se satisfacen idénticamente, y

$$\tau_{r\theta}(\theta=\pm\alpha)=\pm\tau_o,$$

que se satisfacen ambas si

$$C= \frac{\tau_o}{2\,\mathrm{sen}\,2\alpha}$$

.

Para calcular σ_x giramos las componentes la cantidad $-\theta$:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\sigma_\theta\frac{1-\cos 2\theta}{2}-\tau_{r\theta}\mathrm{sen}\,2\theta = \\ &= -4C\cos^2\alpha = -\tau_o\mathrm{ctg}\alpha \end{aligned}$$

La tensión normal no solo es constante sobre una sección cualquiera, sino sobre cualquier sección.

Para $\tau_o= 150$, $\alpha= \pi/6$, $\sigma_x=-259{,}81$ kPa.

Si la cuña es delgada (en la dirección z), el problema será de tensión plana; si gorda, de deformación plana.

La Resistencia de Materiales da también:

$$N(x) = -2\frac{x}{\cos\alpha}\tau_o\cos\alpha = -2x\tau_o$$
$$\sigma_x = \frac{N(x)}{2x\mathrm{tg}\alpha} = -\tau_o\mathrm{ctg}\alpha$$