

Prácticas de Complementarias de Resistencia

1) La viga cargada de la figura 1a tiene por sección transversal la doble-T de la figura 2b. Se pide demostrar el equilibrio entre tensiones normales y tangenciales en la porción de ala superior comprendida entre el apoyo A y la sección centro de luz C de la viga (en negro en la figura a).

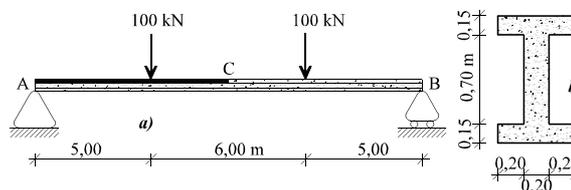


Figura 1

2) La sección de la figura 2a) está sometida a los esfuerzos M y Q (en kN y m) que se indican en la propia figura. Posteriormente, para poder aplicar mayores esfuerzos, mientras actúan los anteriores, se refuerza la sección pegando una chapa metálica en la parte inferior, como se muestra en la figura 2b). A continuación se incrementan los esfuerzos hasta alcanzar los valores M' y Q' de la figura 2b) (aumento $\Delta M = M' - M$, $\Delta Q = Q' - Q$). Se pide:

a) Dibujar y acotar el diagrama de tensiones normales finales en la sección de la figura 2b).

b) Determinar la tensión tangencial en el pegamento que une los dos materiales de la figura 2b)

(Examen febrero 02.)

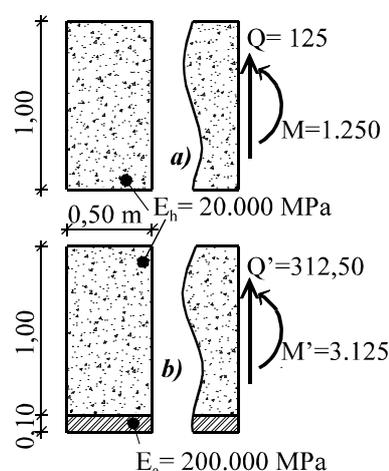


Figura 2

3) En la construcción de un puente de hormigón pretensado aparecen las siguientes fases:

1ª) Se coloca la viga de la figura 3a con un axil N aplicado en el punto A de la secciones extremas. La sección inicial de la viga se muestra en la figura 3b. El axil N es el mayor posible de modo que en ningún punto aparezcan tracciones superiores a 3 MPa. El peso específico de la viga es de 25 kN/m³. En esta fase se pide:

a) Determinar el valor del axil N e indicar la sección x que lo determina.

2ª) Se coloca sobre la viga una losa de hormigón (figura 3c) cuyo peso en fresco es soportado por la viga. El peso específico de este hormigón es también de 25 kN/m³, pero su módulo de elasticidad es menor (ver figura 3a).

3ª) Cuando la losa de hormigón ha endurecido y el conjunto viga-losa forma una nueva viga, se coloca sobre ésta una sobrecarga uniforme de p kN/m. Se pide:

b) Determinar el valor máximo de la sobrecarga p de la fase 3ª sin que en ningún punto de la viga se supere la tracción de 3 MPa, e indicar la sección x que lo determina.

(Examen junio 02.)

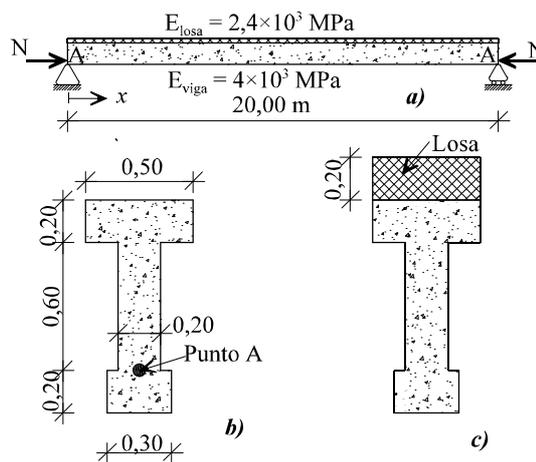


Figura 3

4) Se quiere demoler una viga existente cuyo peso específico y dimensiones se muestran en la figura 4a). La viga está sometida únicamente a su propio peso. La demolición se realiza como sigue: partiendo del apoyo A , se van retirando los $\frac{3}{4}$ superiores del canto, dejando en perfecto estado el cuarto inferior; así se avanza sucesivamente hasta el extremo B . En un instante genérico del proceso de demolición la viga se encuentra en el estado que muestra la figura 4b). Cuando se llegue al extremo B , el $\frac{1}{4}$ de viga remanente se retirará con una grúa. Se pide:

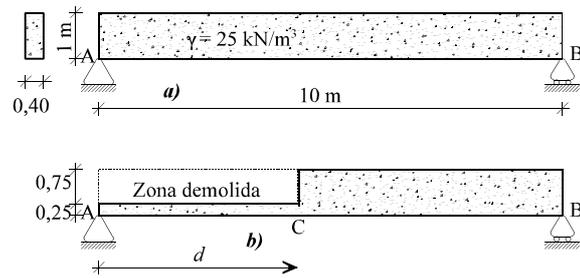


Figura 4

- Encontrar el instante crítico (aquél en el que se alcanzan las mayores tensiones normales) del proceso de demolición, definido por el valor d de la zona demolida.
 - Determinar el valor de la tensión que como mínimo debe resistir el material (a tracción y a compresión) para que el proceso de demolición sea seguro.
 - Calcular la flecha del punto C en el que se producen las máximas tensiones normales.
- (Examen diciembre 06.)

5) La columna AB está libre en su extremo B y se empotra en A en la zapata rectangular rígida que se ve en la figura 5a). Soporta simultáneamente una carga puntual en el extremo B y la carga repartida triangular cuyo valor máximo p_0 , en A , se acota en la misma figura. La sección transversal de la columna es la T mostrada en la figura 5b). El módulo de elasticidad del material, la posición del c.d.g. de la sección T y su inercia se dan en la figura 5b). El c.d.g. de la zapata y sus ejes principales de inercia coinciden en A con los de la sección T (figura 5a)). Se pide:

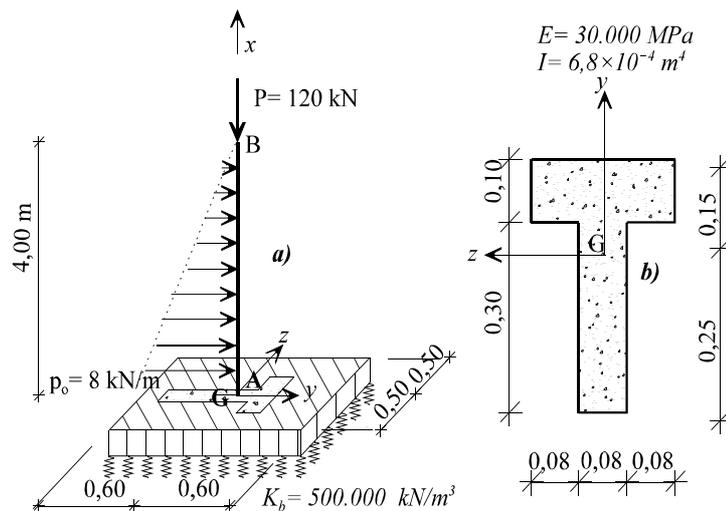


Figura 5

- Dibujar y acotar el diagrama de tensiones *tangenciales* en la sección de la columna que las tenga mayores.
- Calcular el movimiento horizontal del extremo B de la columna en el caso de que el terreno bajo la zapata sea infinitamente rígido.
- Calcular el movimiento horizontal del extremo B de la columna en el caso de que el terreno bajo la zapata sea elástico con el coeficiente de balasto K_b que se da en la figura 5a). (Se admite que la zapata girará en torno al eje z un ángulo a determinar, pero no se moverá en sentido horizontal y).

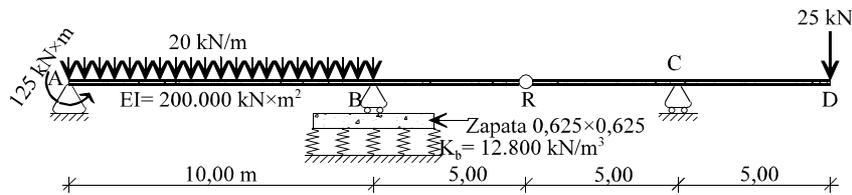


Figura 6

(Examen Enero 07.) **6)** La viga continua $ABRCDA$ de la figura 6 está apoyada en A , B y C , y tiene una rótula en R . Los apoyos A y C se sustentan en suelo rígido pero el apoyo B lo hace centrado sobre una zapata soportada por un terreno elástico. Las dimensiones de la viga, la rigidez EI de la sección, el coeficiente de balasto K_b del suelo bajo la zapata B y las cargas exteriores que actúan (repartida, puntual y momento) se dan en la propia figura. Se pide:

- Dibujar y acotar la ley de momentos flectores. Se determinarán los valores extremos y se acotarán sus posiciones.
 - En el caso de que el terreno bajo la zapata B sea infinitamente rígido ($K_b = \infty$), calcular los siguientes movimientos: el giro θ_B de la viga sobre el apoyo B , la flecha v_R en la rótula R y el giro relativo θ_R en la rótula R , y acotarlos sobre un croquis a estima de la deformada.
 - Calcular la variación $\Delta\theta_B$, Δv_R y $\Delta\theta_R$ que sufren los movimientos anteriores si el terreno bajo la zapata B es flexible con el coeficiente de balasto K_b dado en la figura 6.
- (Examen febrero 08.)

7) El pórtico biapoyado de la figura 7 es de rigidez EI constante (dada en la figura) y soporta únicamente la sobrecarga uniforme del dintel. El apoyo A es fijo y el B , deslizante a 45° con la horizontal. Se pide:

- Dibujar y acotar la ley de esfuerzos axiales.
- Dibujar y acotar la ley de esfuerzos cortantes.
- Dibujar y acotar la ley de momentos flectores. Se deben situar con precisión las posiciones de los valores máximos, positivo y negativo.
- Determinar los movimientos horizontal, vertical y giro del extremo B .

(Examen enero 05.)

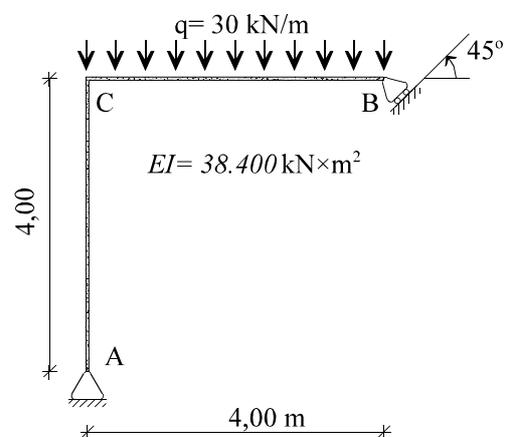


Figura 7

8) La estructura de la figura 8 es un canal semicircular cuyas dimensiones y características del material se dan en la propia figura. Se estudia 1 m de longitud de canal, lleno de agua (peso específico 10 kN/m^3) y apoyado sobre un suelo infinitamente rígido. Se pide:

- Calcular el valor de la reacción vertical en el punto B .
- Calcular el esfuerzo cortante en la sección a la izquierda de B .
- Escribir la ley de momentos flectores en la pared del canal en función del ángulo φ . Calcular su valor en el punto B .
- Calcular el movimiento horizontal del extremo A e indicar su sentido.

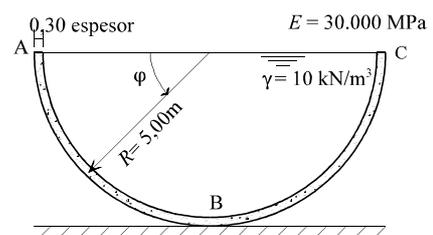


Figura 8

Notas:

- 1) Se desprecia el peso propio del canal.
- 2) Se desprecian las deformaciones por esfuerzos axiales y cortantes.
- 3) Se dan las siguientes primitivas:

$$\int \text{sen}\alpha \text{sen}(\beta - \alpha) d\alpha = \frac{\text{sen}(2\alpha - \beta)}{4} - \frac{\alpha \text{cos}\beta}{2} ; \quad \int \text{sen}\alpha \text{cos}(\beta - \alpha) d\alpha = \frac{\alpha \text{sen}\beta}{2} - \frac{\text{cos}(2\alpha - \beta)}{4}$$

$$\int \text{cos}\alpha \text{sen}(\beta - \alpha) d\alpha = \frac{\text{cos}(2\alpha - \beta)}{4} + \frac{\alpha \text{sen}\beta}{2} ; \quad \int \text{cos}\alpha \text{cos}(\beta - \alpha) d\alpha = \frac{\text{sen}(2\alpha - \beta)}{4} + \frac{\alpha \text{cos}\beta}{2}$$

- 4) Se conocen los valores numéricos de las siguientes integrales:

Valores numéricos de $\int_0^{\pi/2} f(\varphi) d\varphi$ para varias funciones $f(\varphi)$

sen φ	cos φ	sen ² φ	sen φ cos φ	cos ² φ
1	1	0,785398	0,5	0,785398
φ sen φ	φ cos φ	φ sen ² φ	φ sen φ cos φ	φ cos ² φ
1	0,570796	0,866850	0,392699	0,366850

(Examen septiembre 04.)

9) La viga de la figura 9 se construye en dos tramos, ABC y $C'DE$, que después se unen. Sin embargo, por un error de construcción, el punto C' está δ cm más alto que el C (ver figura). Para corregir este error se hace subir el punto C hasta C' cargando el vano AB con una cierta sobrecarga uniforme p . A continuación, cuando C coincide con C' , se unen ambos tramos y se consigue la continuidad en $C-C'$. Finalmente se retira la sobrecarga p que actuaba sobre AB . Se pide:

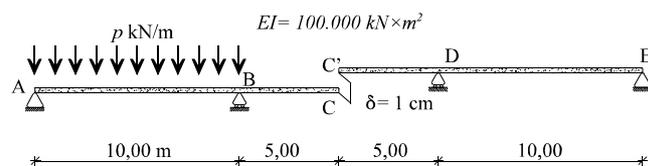


Figura 9

a) Determinar el valor de la sobrecarga p que hay que aplicar para elevar C la cantidad δ indicada en la figura.

b) Dibujar y acotar la ley de momentos flectores cuando la viga está completa pero aún no se ha retirado la sobrecarga p .

c) Dibujar y acotar la ley de momentos flectores una vez retirada la sobrecarga p .

Nota: No se considera el peso propio.

(Examen febrero 02.)

10) Para la viga de la figura 10a) (empotrada en A , apoyada en B y con rótula en R) cuya rigidez se da en la propia figura, se pide:

a) Dibujar y acotar la línea de influencia del momento flector en la sección A y obtener el máximo momento flector *negativo* en dicha sección producido por el tren de cargas de la figura 10b).

b) Dibujar y acotar la línea de influencia del esfuerzo cortante en la sección B , y obtener el máximo esfuerzo cortante *positivo* en dicha sección para el tren de la figura 10b).

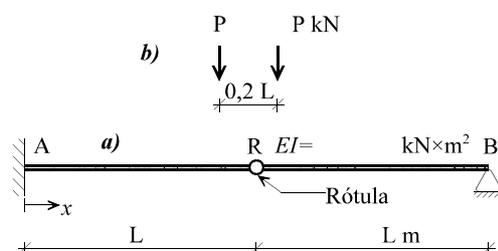


Figura 10

c) Dibujar la línea de influencia del giro relativo en la rótula R , y obtener sus expresiones analíticas en cada tramo (ambas en función de la *misma* coordenada x indicada en la figura a).
(Examen junio 05.)

11) La viga continua de la figura 11a (con rótula en el centro del primer vano y empotramiento en el apoyo izquierdo) es de sección constante, cuya rigidez se muestra en la propia figura. Se pide:

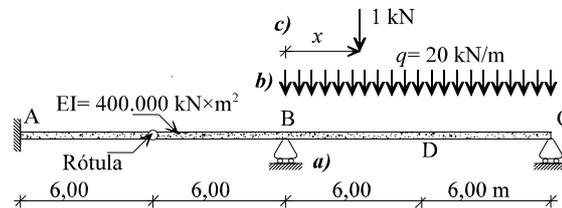


Figura 11

a) Dibujar y acotar la ley de momentos flectores producida por la sobrecarga uniforme de la figura b (que actúa solamente en el intervalo BC).

b) Dibujar a estima en toda la viga la línea de influencia del momento flector en D y obtener su expresión analítica en el tramo BD, para una carga vertical unidad dirigida hacia abajo (figura c).

c) Calcular el máximo momento flector positivo en D que puede producir una sobrecarga uniforme de igual magnitud que la de la figura b pero ocupando cualquier zona de AC.
(Examen diciembre 01.)

12) La estructura de la figura 12 consiste en una viga AB empotrada en su extremo A y colgada en su extremo B de un tirante BC. Las dimensiones, propiedades mecánicas y cargas aplicadas se muestran en la propia figura. Se pide:

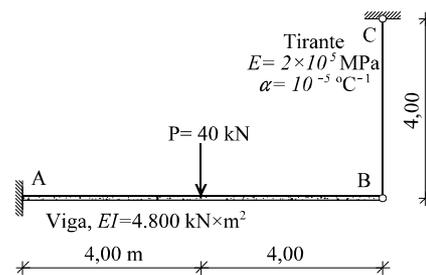


Figura 12

a) Obtener la sección que ha de tener el tirante para conseguir que el máximo momento flector negativo en la viga sea, en valor absoluto, el triple del máximo momento flector positivo.

b) Con la sección del tirante anteriormente obtenida, calcular el enfriamiento o calentamiento al que hay que someter al tirante para conseguir que el máximo momento flector negativo en la viga se igual, en valor absoluto, al máximo momento flector positivo.

(Examen enero 03.)

13) El pórtico de la figura 13 es de sección constante; su rigidez se indica en la propia figura. Está articulado en su extremo A y puede deslizar sobre una superficie inclinada en su extremo B.

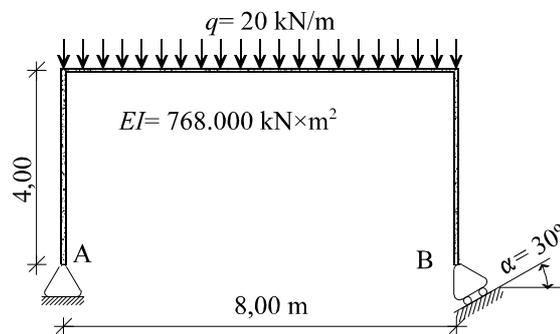


Figura 13

Soporta la sobrecarga vertical uniforme que se muestra en la figura. Se pide:

a) Dibujar y acotar las leyes de esfuerzos axiales, cortantes y flectores en toda la estructura.
b) Calcular el desplazamiento del apoyo B.
c) Determinar la inclinación α óptima que conviene que dar al apoyo B para conseguir que el momento flector máximo en toda la estructura sea, en valor absoluto, lo menor posible.

(Examen septiembre 02.)

14) El pórtico plano $ABCD$ de la figura 14 se sustenta sobre un apoyo deslizando en A y se empotra en una zapata horizontal circular rígida en D . Esta zapata reposa sobre un terreno elástico de coeficiente de balasto K . El movimiento horizontal está impedido en D . Las dimensiones de las piezas, la rigidez EI de las vigas y el coeficiente de balasto del terreno se dan en la propia figura. Sobre el dintel BC actúa la carga triangular que también se muestra en la figura. Despreciando las deformaciones por esfuerzo axial en la estructura, se pide:

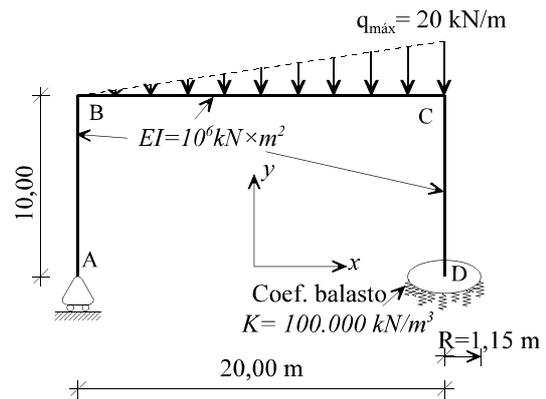


Figura 14

- Si modelizamos el comportamiento del conjunto zapata-terreno mediante dos únicos muelles en D , uno vertical de constante k_v y otro rotativo de constante k_θ , determinar sus constantes.
 - Dibujar y acotar un croquis con las reacciones en los apoyos.
 - Dibujar y acotar la ley de momentos flectores en toda la estructura.
- (Examen septiembre 03.)

15) En el pórtico de la figura 15 se conoce la ley de momentos flectores y la rigidez de sus pilares AC y DB . Se pide:

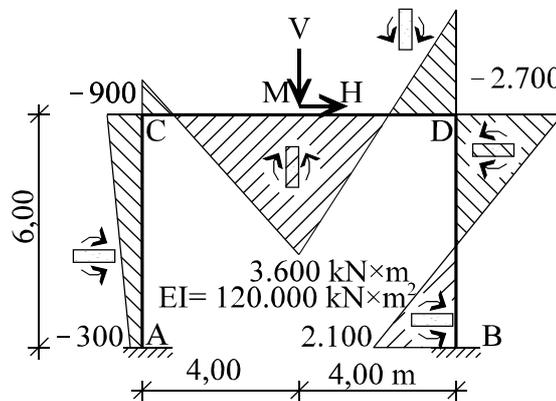
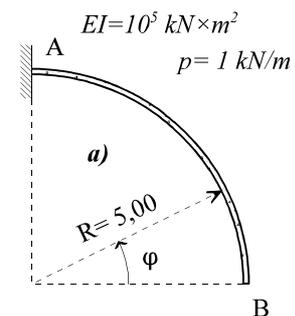


Figura 15

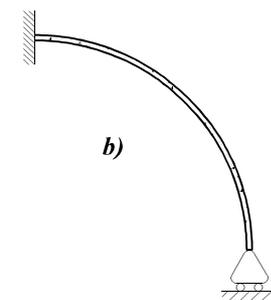
- Determinar la rigidez EI del dintel CD .
- Encontrar la magnitud de las cargas H y V que actúan en M .
- Calcular los movimientos del nudo C .

16) Para el arco circular de sección constante de la figura 16a, cuyos peso y rigidez se dan en la propia figura, se pide:



- Escribir la ecuación de la ley de momentos flectores debida al peso propio en función de la coordenada angular φ .
- Calcular el movimiento vertical del extremo B debido al peso propio.
- Dibujar a estima la línea de influencia del movimiento vertical del extremo B para carga vertical. Acotar su valor en el propio extremo B .

Para el mismo arco, sometido a su peso propio pero sustentado como se muestra en la figura b, se pide:



- Dibujar y acotar las reacciones de los apoyos.

Notas: Se desprecian las deformaciones por axil y cortante. Se pueden utilizar los valores numéricos de la siguiente tabla: (Examen enero 04.)

Nota: Ver tabla de integrales en la práctica 8.

Figura 16

17) En el pórtico atirantado de la figura 17 (cuyas cargas y rigideces se dan en la propia figura) se puede acortar y tesar el tirante AB mediante un tensor de rosca. Se pide:

- Calcular el esfuerzo axial que debe tener el tirante para que al actuar la sobrecarga, el máximo momento flector (en valor absoluto) en el pórtico sea lo más pequeño posible.
 - Determinar cuánto habrá que acortar el tirante AB para conseguir la situación anterior.
- (Examen septiembre 92.)

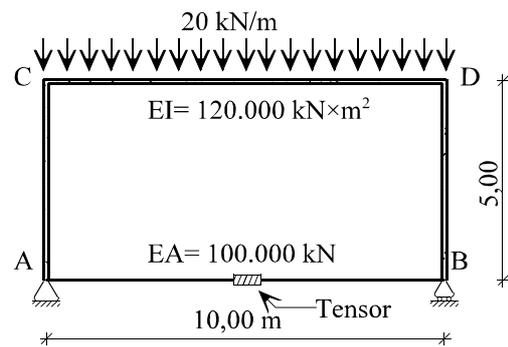


Figura 17

18) Se desea construir un arco entre los puntos fijos A y B , de luz y altura las mostradas en la figura 18a), y que sea antifunicular de la carga dada en la misma figura 18 a). Se pide:

- Escribir la ecuación de la directriz $y(x)$ del arco referida a los ejes x - y de la figura 18a).
 - Para dicho arco, sometido a la carga dada, calcular el esfuerzo axial en la sección de clave C .
 - Si cambiáramos el apoyo B de fijo a deslizante, como en la figura b), calcular el movimiento horizontal del punto B bajo la carga dada. La rigidez del arco varía de acuerdo con la ley $EI(x) = EI_0 / \cos \alpha$, siendo α la inclinación de la tangente al arco en cada punto y EI_0 el valor de la rigidez en la clave, dado en la figura 18b).
- (Examen junio 04.)

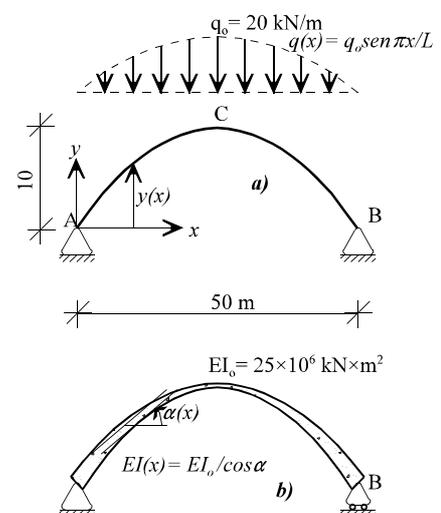


Figura 18

19) El arco de la figura 19a) es una parábola de segundo grado y su sección es variable. Se sabe que al aplicar en el extremo B una carga horizontal de 250 kN hacia la derecha se produce un movimiento vertical $v(x)$ hacia abajo en todos los puntos del arco de valor, en metros:

$$v(x) = 0,0125 \left[\left(\frac{x}{10} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{10} \right)^3 + \left(\frac{x}{10} \right) \right]$$

a la vez que un movimiento horizontal en B de valor $u_B = 0,005$ m. En el mismo arco se quiere colocar posteriormente un tirante entre los apoyos A y B cuyo módulo de elasticidad sea $E = 2 \times 10^8$ kN/m² y someter el arco a una carga vertical uniforme hacia abajo de $q = 40$ kN/m que ocupe la mitad de la luz (figura 19b). Se pide:

- Calcular el área que ha de tener el tirante para que el esfuerzo axial en la clave del arco sea de 50 kN de compresión.
 - Obtener la ley de momentos flectores en el arco.
- (Examen febrero 93.)

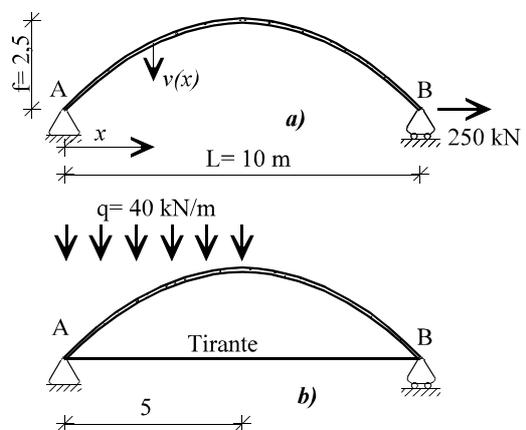


Figura 19

20) La viga biarticulada de la figura 20 es de rigidez EI constante (dada en la figura) y está sometida a unas cargas exteriores desconocidas (aunque sabemos que no hay momentos distribuidos). Conocemos la ecuación de su elástica o deformada $v(x)$, que, referida a los ejes de la figura, es:

$$v(x) = \frac{L^3}{EI} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] \quad \text{en } 0 \leq x \leq L/2$$

$$v(x) = \frac{L^3}{4EI} \left[-1 + 9\frac{x}{L} - 8\left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \quad \text{en } L/2 \leq x \leq L$$

(x y v medidos en metros). Se pide:

- Demostrar que la elástica $v(x)$ dada es posible. (Enumerar con precisión las condiciones que cumple).
- Dibujar y acotar las leyes de esfuerzos cortantes y momentos flectores.
- Determinar las cargas exteriores que actúan sobre la viga y dibujar un croquis acotado de las mismas.
- Encontrar la abscisa x de la sección en la que el giro es nulo.
- Encontrar la abscisa x de la sección en la que el giro es máximo en valor absoluto y determinar su valor.

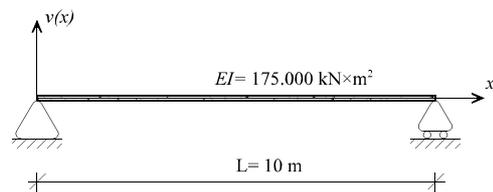
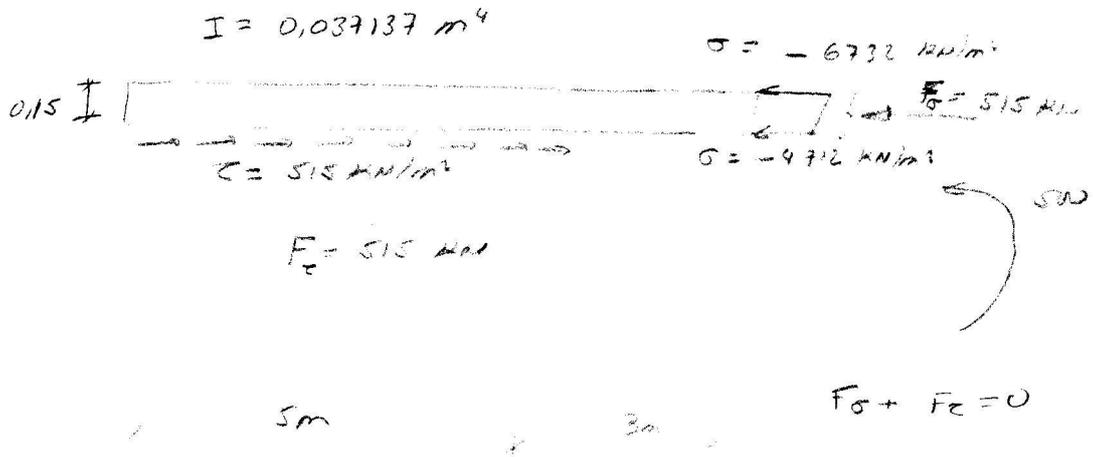


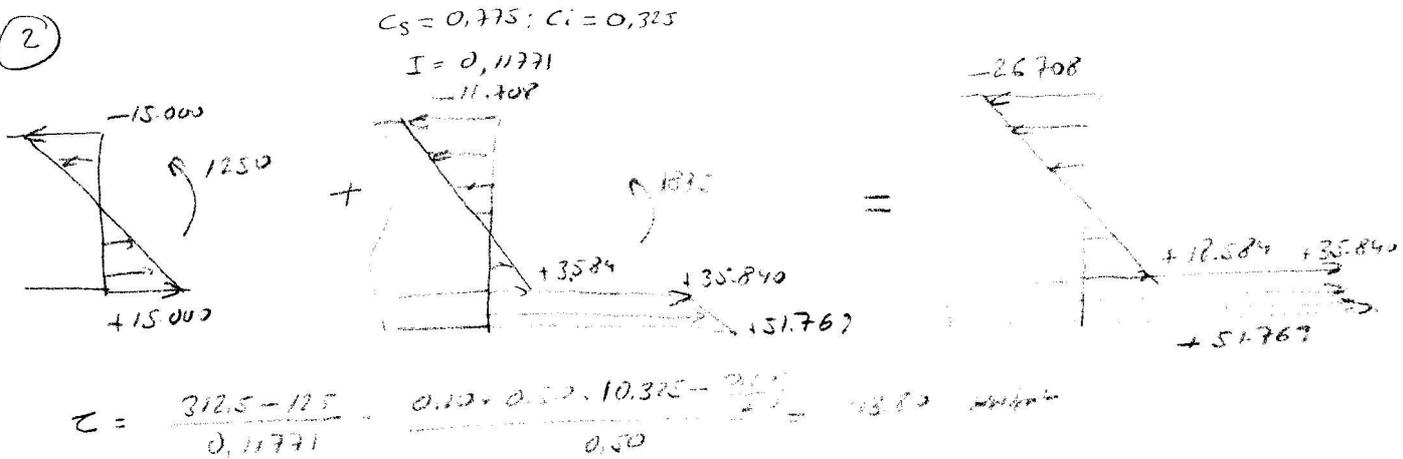
Figura 20

(Examen diciembre 04.)

1



2



CARACTERÍSTICAS SECCION.

NET 1. JUNIO (3) $\alpha = 0,1$

VIGA 1. - 10×1
 12×5
 6×9

$$y_s = \frac{124}{28} = 4,429 a$$

$$A = 28 a^2$$

$$y_i = 5,571 a$$

$$I = \frac{1}{3} [5 \times 4,429^3 + 3 \times 5,571^3 - 3 \times 2,429^3 - 1 \times 3,571^3] = 288,19 a^4$$

VIGA 2. - $y'_s = \frac{28 \times 6,429 + 6 \times 1}{34} = 5,471 a$ $y'_i = 6,529 a$

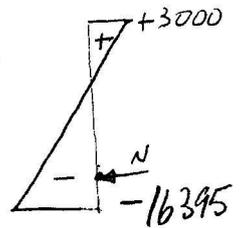
$$I = \frac{1}{3} [3(5,471^3 - 3,471^3)] + 288,19 + 28 \times 0,958^2 = 435,826 a^4$$

FASE 1.

Sección apoy. No aplica tracción en fibra superior. *no admisible*

$$\sigma_s = 3000 = -\frac{N}{28a^2} + \frac{N \times 3,571a \times 4,429a}{288,19a^4} = 0,019166 \frac{N}{a^2}$$

$$N = 156527 a^2 \text{ KN}$$



Esta N produce

$$\sigma_i = -\frac{N}{28a^2} - \frac{N \times 3,571a \times 5,571a}{288,19a^4} = -0,10475 \frac{N}{a^2} = -16395 \text{ KN/m}^2$$

En sección central por peso propio.

$$\sigma_i = \frac{28a^2 \cdot 25 \cdot (200a)^2}{8} \times \frac{5,571a}{288,19a^4} = 67658 a$$

FASE 2

$$\Delta \sigma_i = \frac{10a^2 \times 25 \times (200a)^2}{8} \times \frac{5,571a}{288,19a^4} = 24164 a$$

FASE 3

$$\Delta \sigma_i = p \times \frac{(200a)^2}{8} \times \frac{6,529a}{435,826a^4} = \frac{p}{a} 74,904$$

Para $\alpha = 0,1$ $N = 1565,3 \text{ KN}$

$$-16395 + 91822 + 749p = 3000 \quad \left(p = 13,64 \text{ KN/m} \right)$$

$$a = 0,12$$

$$N = 2254 \text{ kN}$$

$$-16395 + 11018,6 + 624,2p = 3000$$

$$p = 13,42 \text{ kN/m}$$

$$a = 0,08$$

$$N = 1002 \text{ kN}$$

$$-16395 + 7345,8 + 936,3p = 3000$$

$$p = 12,87 \text{ kN/m}$$

$$a = 0,14$$

$$N = 3068 \text{ kN}$$

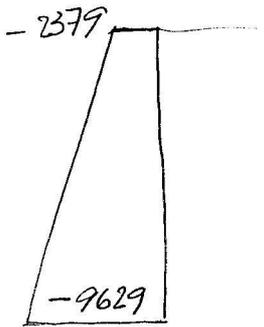
$$-16395 + 12855 + 535,0p = 3000$$

$$p = 12,22 \text{ kN/m}$$

Para $a = 0.1$

Teniendo sección unitaria

VIGA 1 +
pretensado



$$a = 0,12$$

$$-3455$$

$$-8276$$

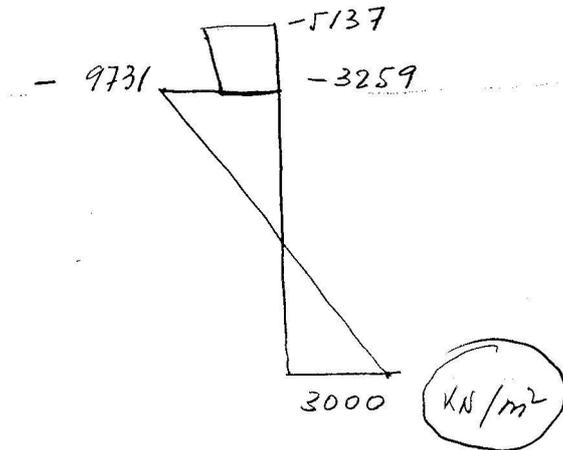
VIGA 1 +
pretensado +
lnc



$$-5760$$

$$-5376$$

FINAL con p/dm



$$-10213 \quad -4212$$

$$3000$$

$$a = 0,08$$

$$-1303$$

$$-10982$$

$$-2660$$

$$-9049$$

$$-9066$$

$$3000$$

$$-6058$$

$$-3844$$

$$a = 0,14$$

$$-4530$$

$$-6923$$

$$-7219$$

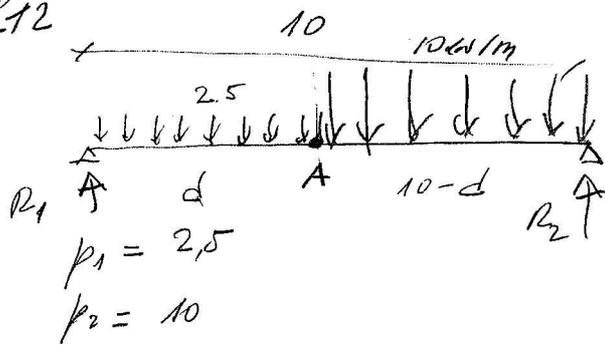
$$-3540$$

$$-10695 \quad -3287$$

$$3000$$

$$-2085$$

P12 (4)



$$R_1 \uparrow \quad d \quad A \quad 10-d \quad R_2 \uparrow \quad 50 - 7,5d \cdot \frac{d}{10} = 50 - 0,375d^2$$

$$R_1 = 50 - 7,5d + 0,375d^2$$

$$M_A = d(50 - 7,5d + 0,375d^2) - 1,25d^2 = 0,375d^3 - 8,75d^2 + 50d$$

$$M' = 1,125d^2 - 17,5d + 50 = 0$$

$$d = \frac{17,5 \pm \sqrt{81,25}}{2,25} = \boxed{3,772}$$

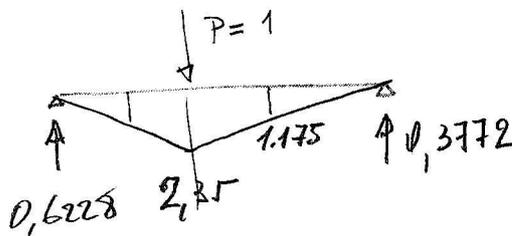
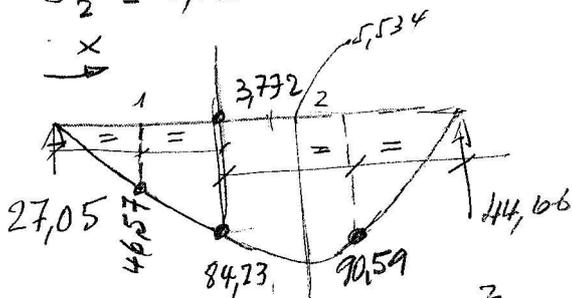
$$M_A = 84,23$$

$$\sigma = \frac{6 \times 84,23}{0,4 \times 0,25^2} = \boxed{20215 \text{ KN/M}^2}$$

$$I_1 = 5,208 \times 10^{-4}$$

$$I_2 = 0,0333 \text{ m}^4$$

FUERZA UNIDAD



$$M_1 = 27,05x - 1,25x^2 \quad 0 < x < 3,772$$

$$M_2 = 144,66(10-x) - 10 \frac{(10-x)^2}{2} = -5x^2 + 55,34x - 53,4 \quad 3,772 < x < 10$$

$$V = \frac{1}{5,208 \times 10^{-4} E} \left[3,772 \frac{46,57 \times 1,175 \times 4 + 84,23 \times 2,35}{6} \right] +$$

$$\frac{1}{0,0333 \times E} \left[6,228 \frac{90,59 \times 1,175 \times 4 + 84,23 \times 2,35}{6} \right] = \frac{522591}{E}$$

$$\text{Para } E = 30 \times 10^6$$

$$v = 1,74 \times 10^{-2}$$

5

Esfuerzo cortante en la base A:

$$Q_y = \frac{1}{2} 80a 40a = 1600a^2 \text{ kN}$$

En la sección A:

$$\mu_G = 2,5a \times 0,8a \times \frac{2,5a}{2} = 2,5a^3$$

$$\mu_a = 2,4a \times a \times \left(1,5a - \frac{a}{2}\right) = 2,4a^3$$

$$\tau_G = \frac{Q_y}{I} \frac{\mu_G}{0,8a} = 735,3 \text{ kN/m}^2$$

$$\tau_a = \tau_G \frac{\mu_a}{\mu_G} = 705,9 \text{ kN/m}^2$$

Bajo la zapata se tiene:

$$N = -12.000a^2 \text{ kN}$$

$$M = Q_y \times \frac{40a}{3} = 21.333a^3 \text{ kN} \times \text{m}$$

$$\sigma_i = \frac{N}{12 \times 10a^2} + \frac{M \times 6a}{\frac{1}{12} 10a \times (12a)^3} = -11,11 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_d = \frac{N}{12 \times 10a^2} - \frac{M \times 6a}{\frac{1}{12} 10a \times (12a)^3} = -188,9 \text{ kN/m}^2$$

La columna sufre una ley de momentos flectores de 3^{er} grado con valor $M = 21.333a^3 \text{ kN} \times \text{m}$ en su base. El movimiento horizontal de B es:

$$u_y(B) = \int_A^B \frac{M(x)}{EI} (40a - x) dx = \frac{1}{4} \frac{M}{EI} \times 40a \times \frac{4}{5} 40a = 33,46a \times 10^{-3} \text{ m}$$

Con suelo flexible la zapata se hunde $v_x = \sigma/K_b$ en cada punto. Por tanto gira:

$$\theta_z(A) = -\frac{\frac{\sigma_d}{K_b} - \frac{\sigma_i}{K_b}}{12a} = 0,296 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

El desplazamiento u_B con suelo flexible será, pues:

$$u_y(B) = 33,46a \times 10^{-3} + \theta_z(A) \times 40a = 45,30a \times 10^{-3} \text{ m}$$

Solución del ejercicio REP-1

del examen parcial de Resistencia de 12/02/08

Reacciones:

$$M_f(R) \equiv -q \frac{L}{8} L + V_C \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow V_C = q \frac{L}{4}$$

$$\Sigma M_A \equiv -q \frac{L}{8} 2,5L + q \frac{L}{4} 2L + V_B L - qL \frac{L}{2} + q \frac{L^2}{16} = 0 \Rightarrow V_B = q \frac{L}{4}$$

$$\Sigma F_v \equiv V_A - qL + \frac{qL}{4} + q \frac{L}{4} - q \frac{L}{8} = 0 \Rightarrow V_A = 5q \frac{L}{8}$$

Comprobación:

$$M_f(R) \equiv -q \frac{L^2}{16} + 5q \frac{L}{8} 1,5L - qL L + q \frac{L}{4} \frac{L}{2} = 0$$

Sobre la viga AB actúa una carga uniforme y sendos momentos exteriores $+qL^2/16$ en los extremos. Los cortantes son $Q_A = -(qL/2 + qL/8) = -5qL/8$ y $Q_B = qL/2 - qL/8 = 3qL/8$. La ley es recta. El cortante se anula en $x_{m\acute{a}x} = 5L/8$.

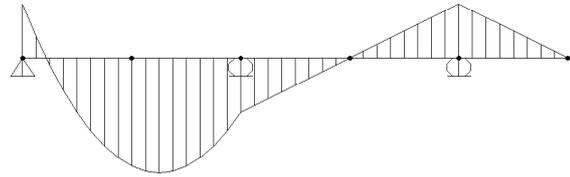


Figura 1

La ley de momentos flectores es (figura 1):

$$M(x) = -q \frac{L^2}{8} + \frac{5}{8} qLx - q \frac{x^2}{2}$$

$$M_{m\acute{a}x} = M(x_{m\acute{a}x}) = \frac{17}{128} qL^2$$

Movimientos:

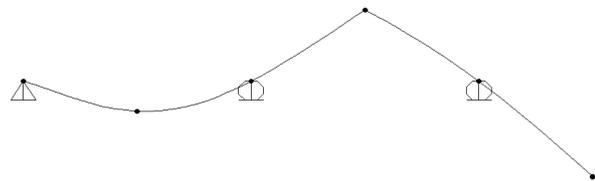
$$\theta_B = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{qL^2 L}{6EI} + \frac{qL^2 L}{3EI} = \frac{5qL^3}{96EI}$$

$$v_R = \theta_B \frac{L}{2} + \frac{1}{2} \frac{qL^2}{16EI} \frac{L}{2} \frac{L}{3} \frac{L}{2} = \frac{qL^4}{32EI}$$

$$v_C \equiv \theta_B L + \frac{1}{2} \frac{qL^2}{16EI} \frac{L}{2} \left(L - \frac{1}{3} \frac{L}{2} \right) + \theta_R \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{qL^2}{16EI} \frac{L}{2} \frac{L}{3} \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \theta_R = -\frac{qL^3}{8EI}$$

El movimiento bajo la zapata sustentada por un suelo flexible es:

$$v_B = -\frac{qL/4}{64.000 \frac{q}{L^2} \left(\frac{L}{16} \right)^2} = -\frac{L}{1000}$$

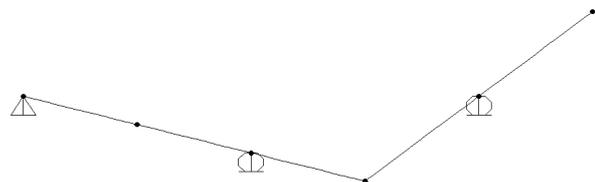


Este movimiento causa:

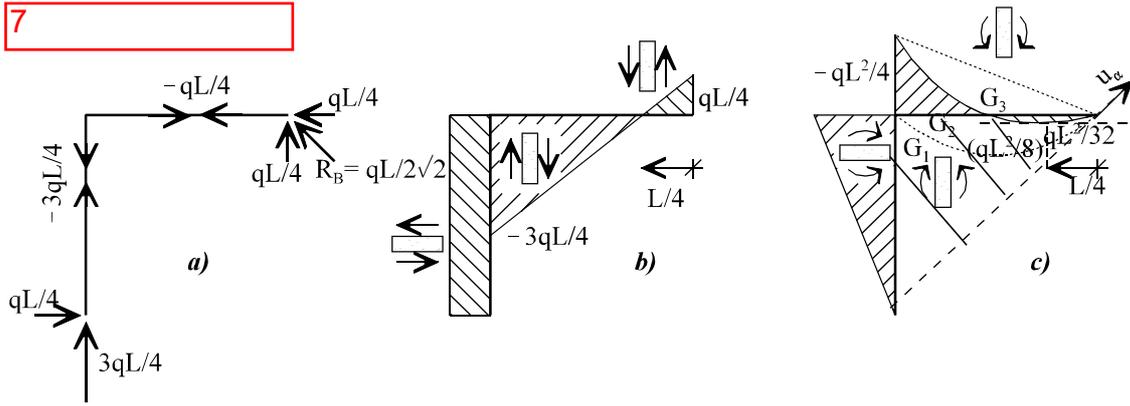
$$\Delta \theta_B = -\frac{v_B}{L} = -1 \times 10^{-3}$$

$$\Delta v_R = 1,5v_B = -1,5 \frac{L}{1000}$$

$$\Delta \theta_R = 4 \times 10^{-3}$$



7



R_B se calcula tomando momentos en A: $R_B \times L\sqrt{2} = qL \times \frac{L}{2} \Rightarrow R_B = \frac{qL}{2\sqrt{2}}$

Para el cálculo de movimientos consideramos la ley de momentos flectores del dintel descompuesta en sus componentes: del momento M_C (triangular, negativa) y de la carga uniforme (parabólica, positiva), de puntos en la figura.

El movimiento del apoyo B debe ser en la dirección AB . Sobre éste no influye el giro en A :

$$u_\alpha = -\frac{1}{2} \frac{qL^2}{4EI} L \left(\frac{2}{3} \frac{L\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{qL^2}{4EI} L \left(\frac{2}{3} \frac{L\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{2}{3} \frac{qL^2}{8EI} L \left(\frac{L\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{3\sqrt{2}}{48} \frac{qL^4}{EI}$$

$$u_B = v_B = -\frac{3qL^4}{48EI}$$

Calculamos θ_B con la condición $v_A = 0$:

$$v_A = v_B - \theta_B L + \frac{2}{3} \frac{qL^2}{8EI} L \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{qL^2}{4EI} L \frac{L}{3} = 0 \Rightarrow \theta_B = -\frac{3qL^3}{48EI}$$

o como suma de las tres componentes siguientes:

Momento en C:
$$\theta_B = -\frac{\frac{qL^2}{6} L}{6EI} = -\frac{qL^3}{24EI}$$

Descenso v_B del apoyo:
$$\theta_B = \frac{v_B}{L} = -\frac{3qL^3}{48EI}$$

Carga uniforme:
$$\theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$$

Total: el valor encontrado antes.

Un procedimiento alternativo del cálculo de u_B, v_B es:

$$u_B = -\theta_A L + \frac{1}{2} \frac{qL^2}{4EI} L \frac{L}{3} = -\theta_A L + \frac{qL^4}{24EI}$$

$$v_B = \theta_A L - \frac{1}{2} \frac{qL^2}{4EI} L \times L - \frac{1}{2} \frac{qL^2}{4EI} L \frac{2L}{3} + \frac{2}{3} \frac{qL^2}{8EI} L \frac{L}{2} = \theta_A L - \frac{qL^4}{6EI}$$

$$u_B = v_B \Rightarrow \theta_A = \frac{5qL^3}{48EI}$$

Entrando con este θ_A en las ecuaciones anteriores se obtienen los valores encontrados antes.

La reacción vertical será el peso del líquido $V_B = \frac{1}{2}\rho\pi R^2$. El cortante a izquierda (y derecha) será $\pm\frac{1}{2}V_B = \pm\frac{1}{4}\rho\pi R^2$.

La presión en un punto definido por el ángulo ω es $p(\omega) = \rho R \text{sen}\omega$; es normal en cada punto a la pared del canal. La fuerza en ese mismo punto es $dF(\omega) = p(\omega)ds = \rho R^2 \text{sen}\omega d\omega$.

Comprobación del cortante:

$$Q_B = \int_0^{\pi/2} dF(\omega) \text{sen}\omega = \rho R^2 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\omega R d\omega = \frac{\pi}{4} \rho R^2$$

El momento de $dF(\omega)$ con relación al punto definido por el ángulo φ es $dM = -dF(\omega)R \text{sen}(\varphi - \omega)$ (figura 1). Por consiguiente:

$$\begin{aligned} M(\varphi) &= -\rho R^3 \int_{\omega=0}^{\omega=\varphi} \text{sen}\omega \text{sen}(\varphi - \omega) d\omega = \\ &= -\rho R^3 \left[\frac{\text{sen}(2\omega - \varphi)}{4} - \frac{\omega \cos\varphi}{2} \right]_{\omega=0}^{\omega=\varphi} = -\frac{\rho R^3}{2} (\text{sen}\varphi - \varphi \cos\varphi) \end{aligned}$$

El momento flector en B es, pues, $-\frac{1}{2}\rho R^3$. Este valor se puede obtener a partir de la fuerza vertical $\frac{1}{2}P$ aplicada en el c.d.g. del cuarto de círculo y la fuerza horizontal $\frac{1}{2}\rho R^2$ aplicada en $R/3$ (figura 2).

El movimiento horizontal de A será:

$$\begin{aligned} u_A &= \int_0^{\pi/2} \frac{M(\varphi)}{EI} R \text{sen}\varphi R d\varphi = \\ &= -\frac{\rho R^5}{2EI} \int_0^{\pi/2} (\text{sen}^2\varphi - \varphi \text{sen}\varphi \cos\varphi) d\varphi = -\frac{\pi \rho R^5}{16EI} \end{aligned}$$

hacia el exterior del canal.

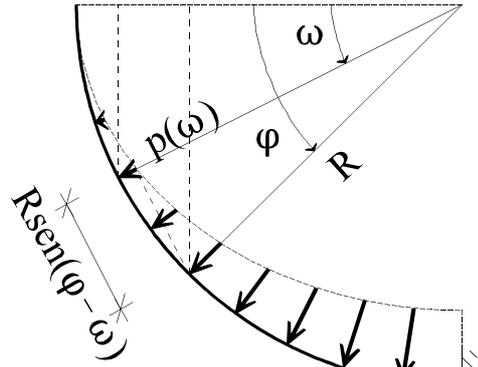


Figura 1

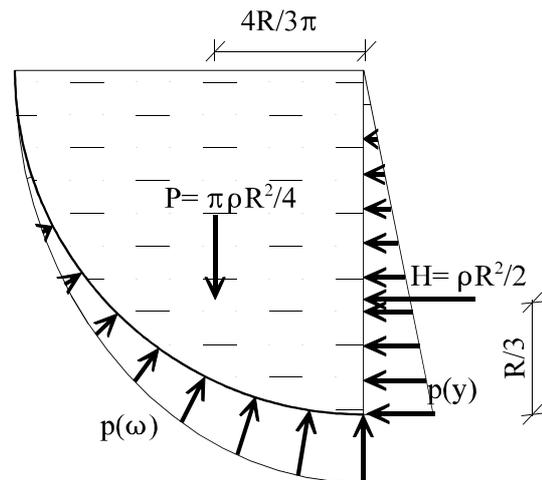


Figura 2

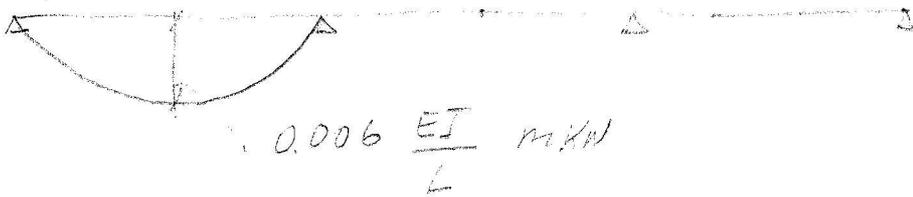
REP2 $\delta = \frac{L(m)}{10} = 0.001 L (cm)$ 9. $L = 10m$

Al aplicar p

$$\theta_B = \frac{p \cdot L^3}{24EI}$$

$$0.001 L = \frac{p L^3}{24EI} \Rightarrow p = \frac{0.048 EI}{L^3} \text{ (N/m)}$$

ESTADO 1

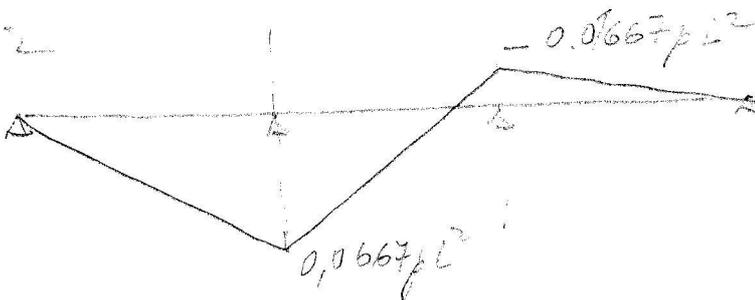


$$-\frac{pL^3}{24EI} + \frac{M_1 L}{3EI} = \frac{-M_2 L}{3EI} - \frac{K_2 L}{6EI} \quad 4M_2 + K_2 = \frac{pL^2}{4}$$

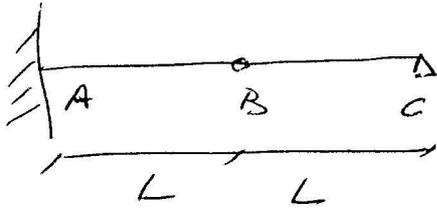
$$\frac{M_1 L}{6EI} + \frac{K_2 L}{3EI} = \frac{-M_2 L}{3EI} \quad M_1 = -4K_2$$

$$M_1 = 0.0667 p L^2 \quad K_2 = -0.0167 p$$

ESTADO 2



La parábola del caso AB instantánea (hacia arriba) se suma con la del estado 2.

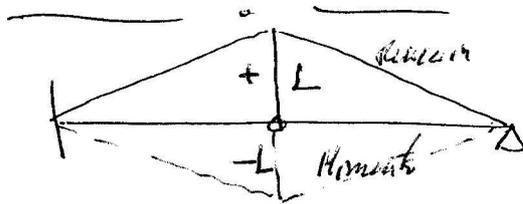


1) línea de influencia de MOMENTO EN A REACCIÓN 0,5 Puntos

2) " de CONSTANTE EN C 0,5 Puntos

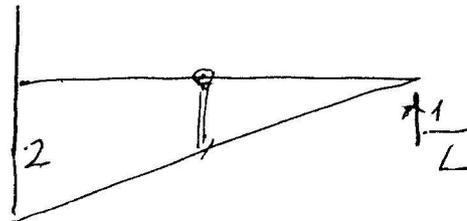
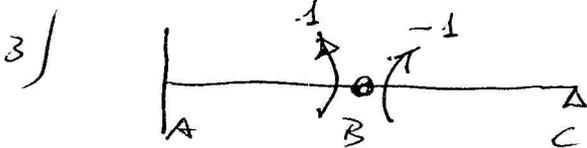
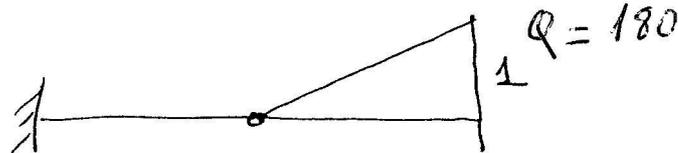
3) " del giro relativo en B 1,5

1) MOMENTO EN A REACCIÓN



$$M = 180 \cdot L \cdot \frac{1}{3} = 60L^2$$

2) CONSTANTE EN C



$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2L \cdot \frac{4L}{3} \cdot \frac{1}{EI} + w_B L = 0$$

$$w_B = -\frac{8L}{3EI}$$

TRAMO AB $M = EI y'' = 2 - \frac{x}{L}$ $y' = \frac{1}{EI} \left(2x - \frac{x^2}{2L} \right)$ $y = \frac{1}{EI} \left(x^2 - \frac{x^3}{6L} \right)$

$$y_B = \frac{5}{6} \frac{L^2}{EI} \quad w_B^+ = 1,5 \frac{L}{EI} - \frac{8L}{3EI} = -\frac{7}{6} \frac{L}{EI}$$

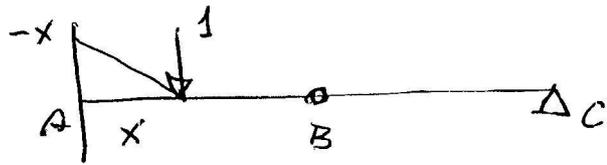
TRAMO BC

$$y'' = \frac{1}{EI} \left(2 - \frac{x}{L} \right) \quad y' = \frac{1}{EI} \left[2x - \frac{x^2}{2L} + C \right] \quad 2L - \frac{L}{2} + C = -\frac{7L}{6} \quad C = -\frac{8L}{3}$$

$$y = \frac{1}{EI} \left[x^2 - \frac{x^3}{6L} - \frac{8L}{3}x + D \right] \quad L^2 - \frac{1}{6}L^2 - \frac{8}{3} + D = \frac{5}{6}L^2 \quad D = +\frac{8}{3}L^2$$

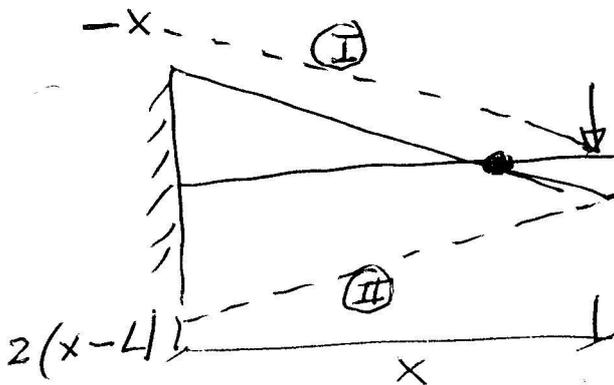
$$y = \frac{1}{EI} \left[-\frac{x^3}{6L} + x^2 - \frac{8L}{3}x + \frac{8}{3}L^2 \right]$$

MÉTODO DIRECTO. APARTADO 3. —

CARGA EN AB

$$-\frac{1}{2} \frac{x^2}{EI} \left(2L - \frac{x}{3} \right) + w_B \cdot L = 0$$

$$w = \frac{1}{EI} \left(x^2 - \frac{x^3}{6L} \right)$$

CARGA EN BC

La ley es suma de I y II

$$P_R = \frac{x-L}{L} = \frac{x}{L} - 1$$

$$-\frac{1}{2EI} x^2 \left(2L - \frac{x}{3} \right) + \frac{1}{2EI} \cdot 2(x-L) \cdot 2L \cdot \frac{4L}{3} + w_B \cdot L = 0$$

$$w_B = \frac{1}{EI} \left[x^2 - \frac{x^3}{6L} - \frac{8}{3} xL + \frac{8}{3} L^2 \right]$$

11)



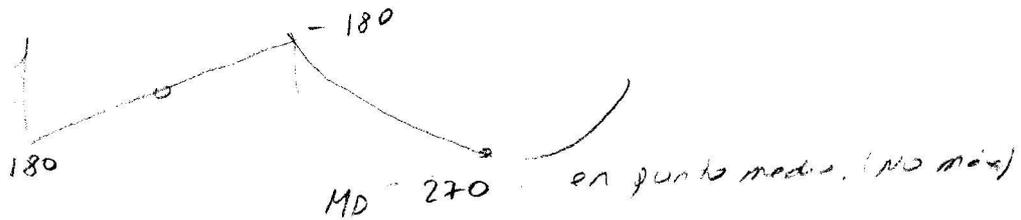
$$v_{12} = \frac{1}{2} \frac{M}{EI} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = -\theta_B \cdot 6 - \frac{1}{2} \frac{M}{EI} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6$$

$$\Rightarrow \theta_B = -\frac{4M}{EI}$$

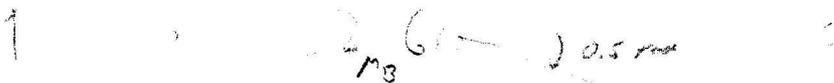


$$\theta_B^{\text{D}} = -\frac{4M_B}{EI} = \frac{M_B \cdot 12}{3EI} - \frac{20 \cdot 12^3}{24EI} = \theta_B^{\text{D}} \Rightarrow M_B = 180$$

2)

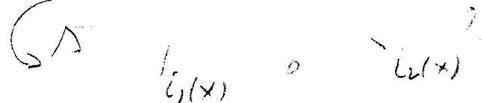


b)



$$\theta_B^{\text{D}} = -\frac{4M}{EI} = -0.5 + \frac{M_B \cdot 12}{3EI} = \theta_B^{\text{D}} \Rightarrow M_B = 0,0625$$

$$0,017866EI$$



$$l_1(x) = 0,5x - 0,0625 \frac{x(12-x)(24-x)}{6 \cdot 12 \cdot EI}$$

$$l_2(x) = 6\left(1 - \frac{x}{12}\right) - 0,0625 \frac{x(12-x)(24-x)}{6 \cdot 12 \cdot EI}$$

c) MD máxima para carga como en a). comprobación

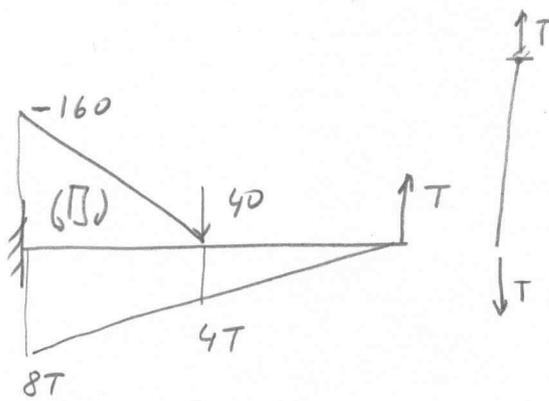
$$(MD)_{\text{max}} = 20 \left\{ \int_0^6 \underbrace{\left[0,5x - 8,681 \cdot 10^{-4} \cdot x(12-x)(24-x)\right]}_{l_1(x)} dx + \int_6^{12} \underbrace{\left[6 - 0,5x - 8,681 \cdot 10^{-4} \cdot x(12-x)(24-x)\right]}_{l_2(x)} dx \right\}$$

$$6,469$$

$$7,031$$

$$= 270,00 \text{ como en el cálculo a)}$$

12)



$$160 - 8T = 3 \times 4T \Rightarrow T = 8 \text{ KN}$$

$$\downarrow v_B = \frac{1}{2} \frac{160}{EI} \cdot 4 \cdot \left(8 - \frac{1}{3} \cdot 4\right) - \frac{1}{2} \frac{8T}{EI} \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 = 160 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta = \frac{T \cdot 4}{EA} = 160 \times 10^{-3} \Rightarrow EA = 200 \text{ KN} \Rightarrow A = 10^{-6} = 1 \text{ mm}^2$$

$$\left(\sigma = \frac{8 \text{ KN}}{10^{-6}} = 8 \cdot 10^6 \text{ KN/m}^2 \text{ horrible}\right)$$

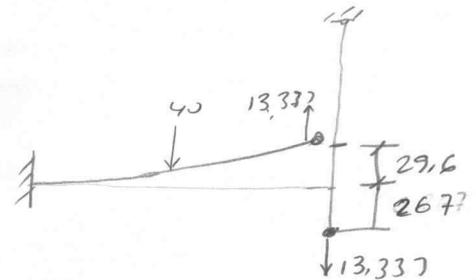
$$160 - 8T = 4T \Rightarrow T = 3,333 \text{ KN}$$

con esta T , $\downarrow v_B = -29,6 \text{ mm}$ hacia arriba.

con esa T , $\delta = 0,267 \times 10^{-3}$ hacia abajo

Habría que acortar el cable $296,6 \text{ mm}$ mediante enfriamiento

$$\alpha \Delta T \cdot 4 = -296,6 \times 10^{-3} \Rightarrow \Delta T = -7,415 \text{ }^\circ\text{C} \quad (\text{muuy por debajo del cero absoluto})$$



Momentos flectores producidos por sobrecarga q y reacciones $V_A = V_B = qL$: parábola de 2º grado en dintel con máximo de:

$$\frac{q(2L)^2}{8} = \frac{qL^2}{2}$$

Las reacciones horizontales valen:

$$H_A = -H_B = V \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{qL}{\sqrt{3}}$$

Los momentos flectores valen:

$$H \times L = -\frac{qL^2}{\sqrt{3}}$$

Por consiguiente los momentos flectores máximos positivos y negativos son:

$$M_{máx}^+ = qL^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -0,007735qL^2; \quad M_{máx}^- = -\frac{qL^2}{\sqrt{3}} = -0,5774qL^2$$

Todos los momentos son negativos. La componente horizontal del desplazamiento del punto B es:

$$u_B(\text{horiz}) = \frac{2}{3} \frac{qL^2}{2EI} \times 2L \times L - 2 \frac{1}{2} \frac{qL^2}{\sqrt{3}EI} \times L \times \frac{2}{3}L - \frac{qL^2}{\sqrt{3}EI} \times 2L \times L = -0,873 \frac{qL^2}{EI}$$

Según la dirección de movimiento del apoyo, el desplazamiento es:

$$u_{B,\alpha} = \frac{u_B(\text{horiz})}{\cos 30^\circ} \cong -1,008 \frac{qL^2}{EI}$$

Se observa que:

$$M_{máx}^+ = qL \left(\frac{1}{2} - \operatorname{tg} \alpha \right); \quad M_{máx}^- = -qL^2 \operatorname{tg} \alpha$$

Ambos valores se hacen iguales y conducen al mínimo en valor absoluto cuando $\operatorname{tg} \alpha = 1/4$, $\alpha = 14^\circ 036$

14)

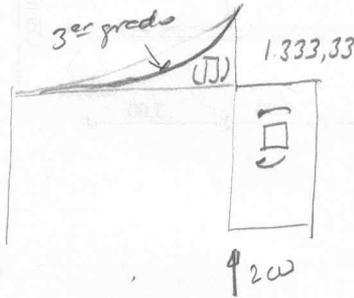
Bajo la zapata $\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M}{I} \cdot y$; $v = \frac{Q}{R}$

$$v = \frac{N}{RA} - \frac{M}{RI} \cdot y = v_0 - Q \cdot y$$

$$v_0 = \frac{N}{RA} \Rightarrow R_0 = R \cdot A ; Q = \frac{M}{RI} \Rightarrow R_Q = RI$$

$$R_V = 10^5 \cdot 72 \cdot 1,15^2 = 0,415 \times 10^6 \text{ RN/m} ; R_Q = \frac{72 \cdot 1,15^4}{4} \times 10^5 = 0,137 \times 10^6 \text{ KNm/m}$$

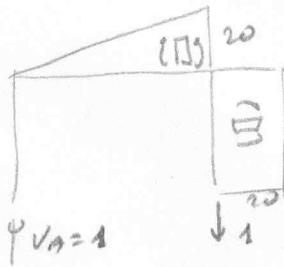
TOMAMOS V_A COMO HIPERESTÁTICA



$$\downarrow v_D = \frac{200}{R_V}$$

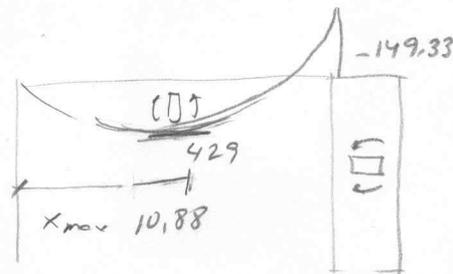
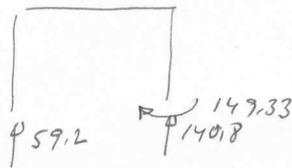
$$\circlearrowleft \theta_D = \frac{1333}{R_Q}$$

$$\downarrow v_D = \frac{200}{0,415 \times 10^6} + \frac{1333,33}{0,137 \times 10^6} \times 20 + \frac{1}{4} \frac{1333,33}{10^6} \times 20 \times \frac{4}{5} \times 20 + \frac{1333,33}{10^6} \times 10 \times 20 = 0,568 \text{ m.}$$



$$\uparrow v_A = \frac{1}{0,415 \times 10^6} + \frac{20}{0,137 \times 10^6} \times 20 + \frac{1}{2} \frac{20}{10^6} \times 20 \times \frac{2}{3} \times 20 + \frac{20}{10^6} \times 10 \times 20 = 9,59 \times 10^{-3}$$

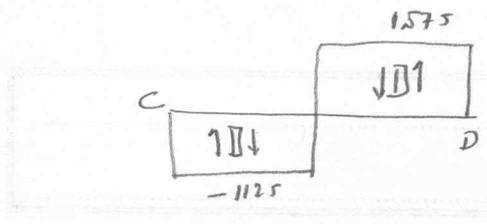
$$V_A = \frac{0,568}{9,59 \times 10^{-3}} = 59,2 \text{ RN}$$



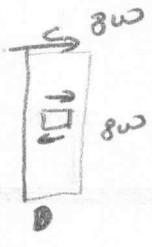
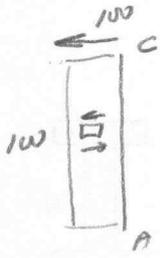
$$\frac{1}{2} \frac{20}{20} x_{max}^2 = 59,2 \times 2$$

$$M_{max} = 59,2 \times x_{max} - \frac{1}{2} \frac{20}{20} \times x_{max} \times x_{max} \times \frac{x_{max}}{3} = 429$$

LEYES DE CORTANTES



$$V = 1575 + 1.125 = 2700 \text{ KN}$$



$$H = 800 - 100 = 700$$

COMPATIBILIDAD EN GIROS

$$\theta_C^{(AC)} = \frac{300 + 900}{2 EI_{AC}} \cdot 6 = - \frac{3600}{EI_{AC}}$$

$$\theta_D^{(BD)} = \frac{-2100}{EI_{BD}} \cdot 6 + \frac{1}{2} \frac{2700 + 2100}{EI_{BD}} \cdot 6 = \frac{1800}{EI_{BD}}$$

$$\theta_C^{(CD)} = \frac{900 \cdot 8}{3 EI_{CD}} + \frac{2700 \cdot 8}{6 EI_{CD}} - \frac{2700 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 12}{6 \cdot 8 EI_{CD}} = - \frac{4800}{EI_{CD}}$$

$$\theta_D^{(CD)} = \frac{-900 \cdot 8}{6 EI_{CD}} - \frac{2700 \cdot 8}{3 EI_{CD}} + \frac{2700 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 12}{6 \cdot 8 EI_{CD}} = \frac{2400}{EI_{CD}}$$

$$\theta_C^{(AC)} = \theta_C^{(CD)} \Rightarrow \frac{3600}{120.000} = \frac{4800}{EI_{CD}} \Rightarrow EI_{CD} = 160.000$$

$$\theta_D^{(BD)} = \theta_D^{(CD)} \Rightarrow \frac{1800}{120.000} = \frac{2400}{EI_{CD}} \Rightarrow \text{mismo resultado}$$

MOMENTOS

$$\theta_C = - \frac{3600}{EI_{AC}} = -30 \cdot 10^{-3} \text{ rad (ya calculado)}$$

$$\omega_C = \frac{1}{2} \frac{300}{EI_{AC}} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \frac{900}{EI_{AC}} \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 6 = \frac{900}{EI_{AC}} = 75 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

16

Momento flector en φ producido por la carga $p \cdot ds$ en ω (p , peso por unidad de longitud):

$$M_p(\varphi) = - \int_{\omega=0}^{\omega=\varphi} p R d\omega R(\cos\omega - \cos\varphi) = -pR^2(\text{sen}\varphi - \varphi \cos\varphi)$$

$$v_B = \int_0^{\pi/2} \frac{M(\varphi)}{EI} R(1 - \cos\varphi) R d\varphi =$$

$$= -\frac{pR^4}{EI} \int_0^{\pi/2} (\text{sen}\varphi - \varphi \cos\varphi)(1 - \cos\varphi) d\varphi =$$

$$= -\frac{pR^4}{EI} \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{2} + \frac{5}{4} \right) = -0,296053 \frac{pR^4}{EI}$$

La línea de influencia tiene el aspecto de la componente vertical de la deformada que produce una carga $V_B = 1$. La ley de momentos flectores para esta carga es $M(\varphi) = R(1 - \cos\varphi)$. La flecha v_B será:

$$v_B = \int_0^{\pi/2} \frac{M(\varphi)}{EI} R(1 - \cos\varphi) R d\varphi = \frac{R^3}{EI} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{R^3}{EI} \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right) = 0,356194 \frac{R^3}{EI}$$

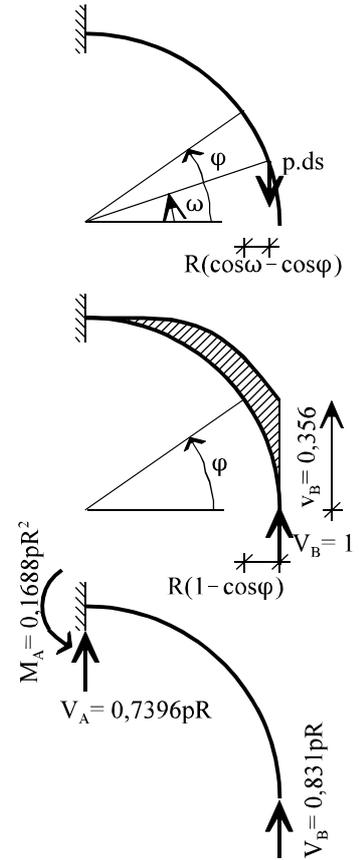
En la figura b anulamos la flecha v_B del peso propio mediante una carga vertical V_B :

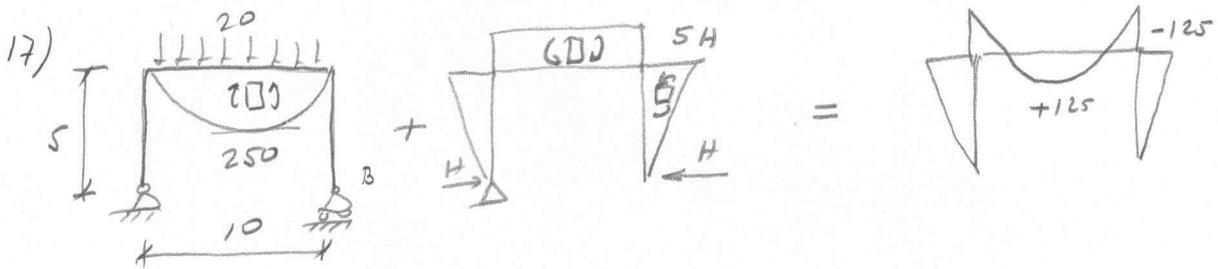
$$-0,296053 \frac{pR^4}{EI} + 0,356194 \frac{R^3}{EI} V_B = 0 \Rightarrow V_B = 0,8312pR$$

El resto del peso propio irá a la reacción en A:

$$V_A = \frac{\pi}{2} R p - V_B = 0,7396pR$$

El momento flector en el empotramiento es $M_p(\varphi = \pi/2) + V_B \cdot R$. La reacción momento exterior tendrá el signo contrario: $M_A = 0,1688pR^2$.





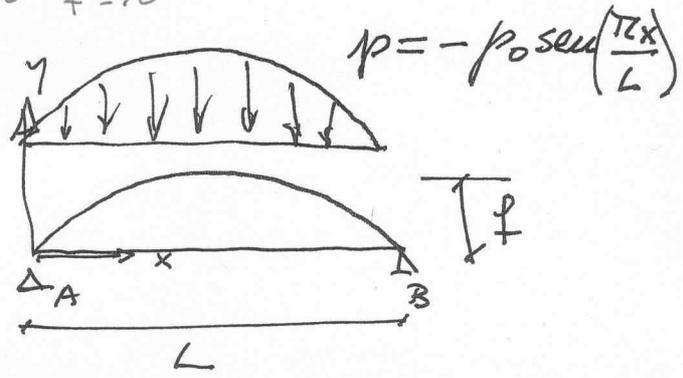
Máximo positivo $250 - 5H$
 Máximo negativo $5H$

$\left. \begin{array}{l} \text{Máximo positivo} \\ \text{Máximo negativo} \end{array} \right\} \text{iguales} \Rightarrow H = 25$

$$\vec{u}_B = \frac{2}{3} \frac{250}{EI} \times 10 \times 5 - 2 \times \frac{1}{2} \frac{5H}{EI} \times 5 \times \frac{2}{3} 5 - \frac{5H}{EI} \times 10 \times 5 = 0 \text{ (casualmente)}$$

$$\delta = \frac{25 \times 10}{100,000} = 2,5 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

A certar $\delta - u_B = 2,5 \times 10^{-3} \text{ m.}$



1) MOMENTOS DE CARGA VERTICAL

$$EI = \frac{EI_0}{\cos \alpha}$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -p_0 \frac{\sin(\pi x/L)}{L}$$

$$M = \frac{L^2}{\pi^2} p_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + Ax + B \quad \begin{cases} x=0 & M=0 & B=0 \\ x=L & M=0 & A=0 \end{cases}$$

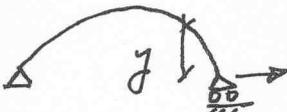
$$M = \frac{L^2}{\pi^2} p_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

SIRECTRIZ $y = f \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

2º) Axil en clave = reacción H horizontal

$$M(x) = H \cdot y(x)$$

$$H = p_0 \cdot \frac{L^2}{\pi^2 f}$$

3º)  $u_B = \int_0^L \frac{M}{EI} \cdot y(x) \cdot ds = \frac{1}{EI_0} \int_0^L M(x) \cdot y(x) \cdot dx$

$$u_B = \frac{p_0 \cdot L^2 \cdot f}{\pi^2 EI_0} \int_0^L \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{L}}{L} dx = \frac{p_0 L^3 f}{2\pi^2 EI_0}$$

Para que el esfuerzo axial en la clave del arco alcance las $-5 t$ es preciso que la fuerza en el tirante tenga ese mismo valor $T=5 t$.

La ecuación hiperestática es

$$\left[u_B^{(H=1)} + \frac{1}{k} \right] \{ H_B \} = - \{ u_B^{(ext)} \}$$

con $H_B = -T = -5 t$. Expresa que el movimiento horizontal del cable, por los conceptos de carga exterior y reacción $H_B = -5$ del tirante, es igual al alargamiento del tirante. Los términos u_B corresponden al arco y el $1/k$ es el coeficiente de flexibilidad del cable, L/EA .

El movimiento horizontal correspondiente a $H_B = 1 t$ es, por proporción con el del dato, $u_B^{(H=1)} = 0,005/25 = 0,2 \times 10^{-3} m$. El cálculo de $u_B^{(ext)}$ se hace invocando el principio de superposición como sigue.

Si una fuerza $H_B = 1$ en B produce en x una flecha vertical de valor $v(x)/25$, una carga unidad en x producirá en B un $u_B = v(x)/25$. Si en vez de una carga unidad en x aplicamos una de valor $q(x)dx$, en B tendremos un movimiento de valor $d(u_B) = v(x)q(x)dx/25$. El desplazamiento total debido a toda la carga repartida será:

$$u_B^{(ext)} = \frac{1}{25} \int_{x=0}^{x=5} v(x)q(x)dx = 4 \frac{0,0125}{25} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{x}{10} \right)^5 - \frac{2}{4} \left(\frac{x}{10} \right)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{10} \right)^2 \right]_0^{10} = 0,002 m$$

Con $H_B = -5 t$, el movimiento horizontal del apoyo B del arco será:

$$u_B = -5 \times u_B^{(H=1)} + u_B^{(ext)} = -0,001 + 0,002 = 0,001 m$$

Para que el cable de $L = 10 m$, $E = 2 \times 10^7 t/m^2$, $T = 5 t$ se alargue esta misma cantidad es preciso que su área sea de $25 \times 10^{-4} m^2 = 25 cm^2$. (Esta igualdad es la misma escrita en la ecuación hiperestática de más arriba.)

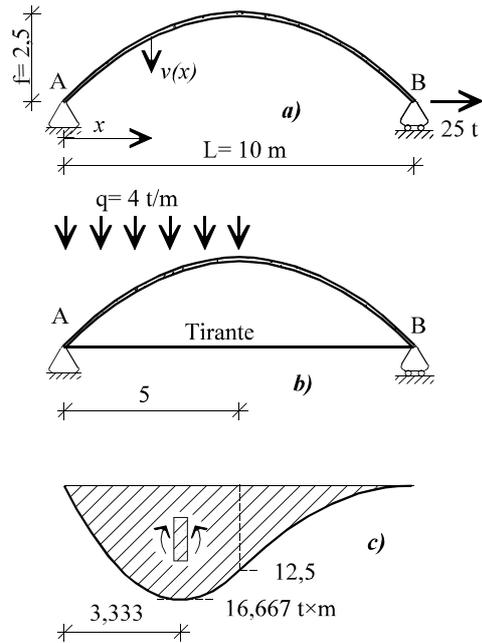
Las reacciones horizontales son $H_A = -H_B = 5 t$. La reacción vertical V_A será los 3/4 de la carga vertical total, 15 t, y la V_B , el 1/4 restante, 5 t, como en una viga biapoyada. La ley de momentos flectores tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 5 \quad M(x) &= 15x - 5y - 4 \frac{x^2}{2} \\ 5 \leq x \leq 10 \quad M(x) &= 5(10-x) - 5y \end{aligned}$$

con

$$y = \frac{4f}{L^2} x(L-x) = x - 0,1x^2$$

El aspecto aproximado de esta ley se muestra en la figura.

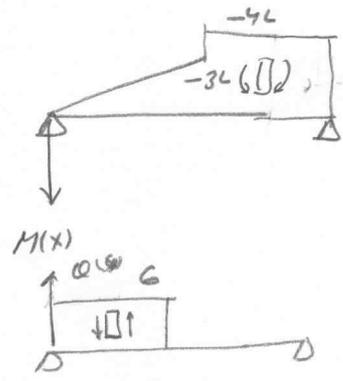
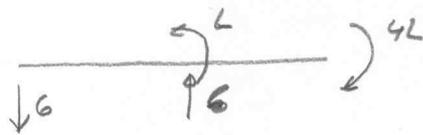


20)

a) EN $x = L/2$ $v_1(L/2) = v_2(L/2) = \frac{3}{8} \frac{L^3}{EI}$ y $v'_1(L/2) = v'_2(L/2) = \frac{L^2}{4EI}$

b) $M(x) = EI v''(x)$; $M_1(x) = -6x$; $M_2(x) = -4L$
 $Q(x) = -EI v'''(x)$; $Q_1(x) = 6L$; $Q_2(x) = 0$

c)



d) $v'_1(x) = \frac{L^2}{EI} [1 - 3(\frac{x}{L})^2]$ nulo en $[0, \frac{L}{2}]$

$v'_2(x) = \frac{L^2}{4EI} (9 - 16 \frac{x}{L})$ nulo en $\frac{x}{L} = 0,5625$

e) Dibujamos la deformada para ver que los giros máximos son en los extremos

θ_{max} en $x=L$ $-\frac{7}{4} \frac{L^2}{EI}$

