Prácticas Complementarias de Resistencia 12-13

1) Dibujar sendos croquis con las reacciones acotadas en magnitud y sentido para las vigas de la figura 1:

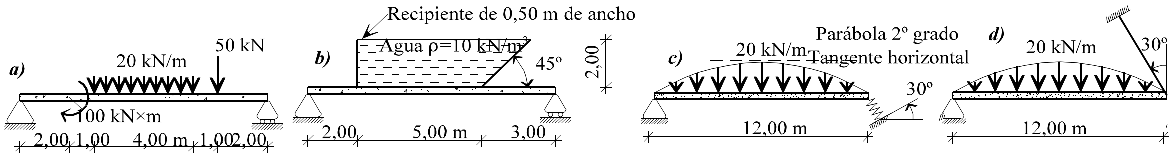


Figura 1

2) Calcular las reacciones del muro y de la compuerta de la figura 2*a* y del arco de la figura 2*b* sometido a su propio peso.

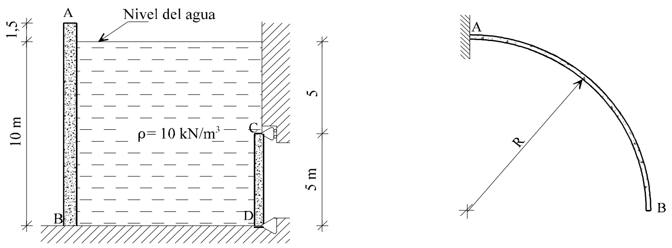


Figura 2

3) Dibujar sendos croquis con las leyes acotadas de esfuerzos para las vigas de la figura 3.

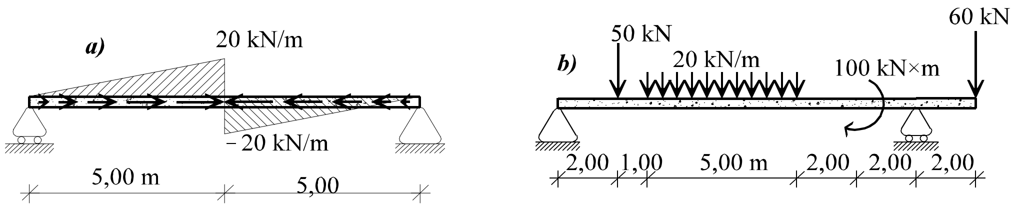


Figura 3

4) Dibujar sendos croquis con las leyes acotadas de esfuerzos para las estructuras de la figura 4.

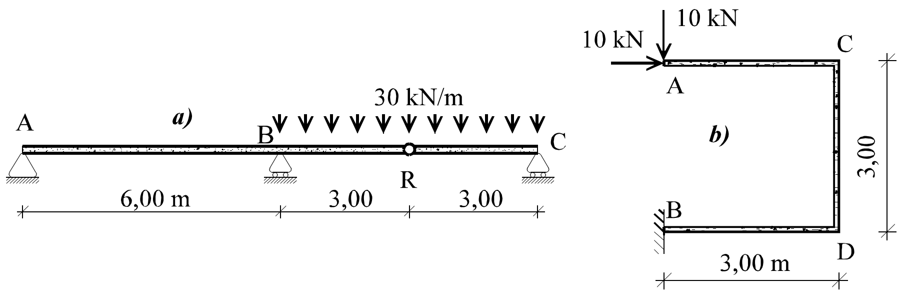
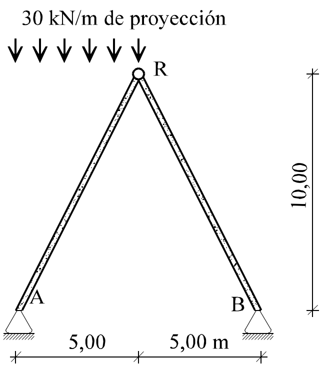


Figura 4

5)Dibujar y acotar las leyes de esfuerzos axiles, cortantes y flectores del pórtico triarticulado de la figura 5. Comprobar, además, el equilibrio de esfuerzos en la rótula.



6) Dada la ley de momentos flectores de la figura 6, encontrar las cargas que la producen.

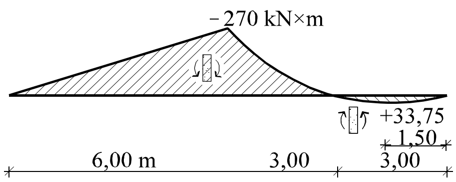


Figura 6

7) La viga cargada de la figura 7*a* tiene por sección transversal la doble-*T* de la figura 7*b*. Se pide:
a) Dibujar y acotar las leyes de esfuerzos cortantes y de momentos flectores en la viga.
b) Dibujar y acotar el diagrama de tensiones normales en la sección que las tenga mayores.

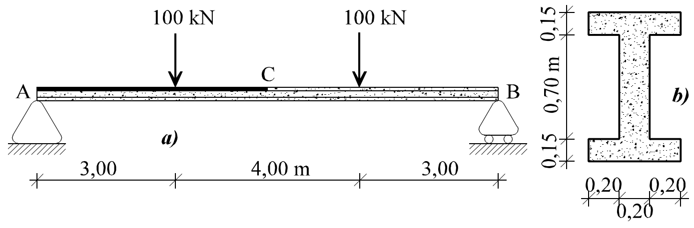


Figura 7

c) Dibujar y acotar el diagrama de tensiones tangenciales en la sección que las tenga mayores.
d) Demostrar el equilibrio entre tensiones normales y tangenciales en la porción de ala superior comprendida entre el apoyo *A* y la sección centro de luz *C* de la viga (en negro en la figura 7*a*).

8) La sección *T* de la figura 8*a* está constituida por un material que no resiste tracciones. Por este motivo, bajo la acción de ciertos esfuerzos *N* y *M*, la sección desarrolla el diagrama de tensiones normales de la figura 8*b* (que no es plano sino bilineal, por lo que no es resultado de la fórmula de Navier). Se pide:
a) Acotar los límites del núcleo central de la sección por encima y por debajo de G.
b) Encontrar los esfuerzos *N* y *M* que producen el diagrama de tensiones de la figura 8*b,* referidos al c.d.g. *G* de la sección real.
c) Dibujar y acotar el diagrama de tensiones que producirían los esfuerzos *N= 2000, M= 450* (también referidos al c.d.g.).
d) Ídem por *N= 3000, M= 300.*

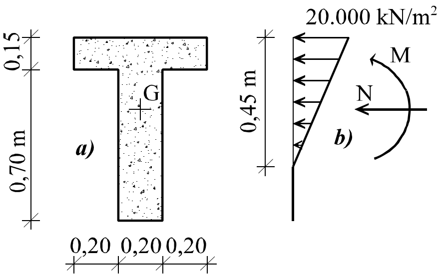


Figura 8

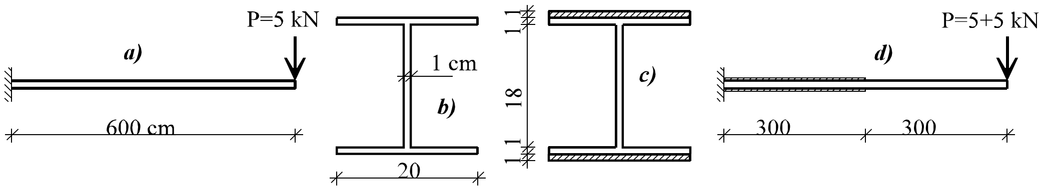


Figura 9

9) La ménsula de la figura 9*a* tiene por sección transversal la doble *T* de la figura 9*b*. El material es acero, $E=2\times10^{8}$ kN/m^2. Soporta la carga *P= 5* kN en el extremo (figura 9*a*). Se pide:
a) Dibujar el el diagrama de tensiones de la sección pésima.
b) Calcular la flecha máxima.
Sin retirar la carga anterior, se refuerza la sección de la viga soldando platabandas a las alas (rayadas en la figura 9*c*) en la mitad del vano (figura 9*d*). A continuación se incrementa la carga hasta *P=10* kN. Se pide:
b) Dibujar el nuevo diagrama de tensiones en la sección pésima.
d) Obtener la máxima tensión tangencial en la unión entre platabandas.
e) Calcular la nueva flecha máxima.
Se retira por completo la carga de la ménsula de la figura 9*d*. Se pide:
f) Dibujar el nuevo diagrama de tensiones de la sección pésima
g) Calcular la flecha residual del extremo de la ménsula.

10) La sección de la figura 10 sufre un calentamiento uniforme en la cabeza mientras el alma mantiene su temperatura inicial. Se pide:
a) Calcular las deformaciones ϵ (alargamiento unitario)y χ (curvatura) de la sección.
b) Dibujar el diagrama de tensiones internas que impone la hipótesis de Navier.

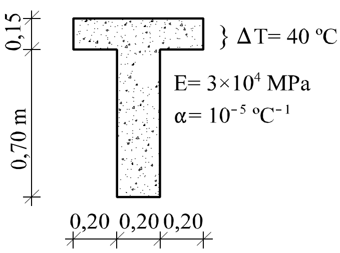


Figura 10

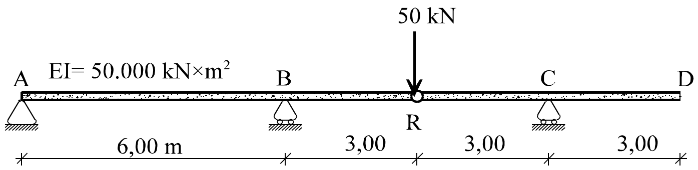


Figura 11

11) Dibujar la deformada de la viga de la figura 11 y acotar sobre ella los movimientos y giros de todos los puntos con nombre para las siguientes hipótesis de carga:
a) Un descenso del apoyo *B*, $\delta_B = 5$ mm.
b) Una curvatura impuesta $\chi = -1$ mrad/m en toda la longitud de la viga.
c) La carga puntual mostrada en la figura.

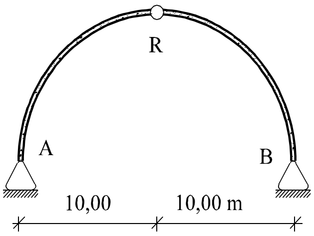


Figura 12

12) Debido a una variación de temperatura, el arco de la figura 12 sufre las deformaciones impuestas $\epsilon = 0{,}5\times10^{-3}$, $\chi = -0{,}6\times10^{-3}$ rad/m. Se pide dibujar la deformada y acotar sobre ella los movimientos y giros de los puntos con nombre para cada una de las deformaciones separadamente.

13) Una viga infinitamente rígida de 100 kN pende de tres barras biarticuladas (figura 13). Las barras laterales son de aluminio ($E = 0{,}7\times10^{5}$ MPa, $\alpha = 27\times10^{-6}$ ºC^{-1}) de 2 cm^2 de sección, y la interior, de acero ($E = 2{,}1\times10^{5}$ MPa, $\alpha = 12\times10^{-6}$ ºC^{-1}) de 12 cm^2 de sección. Se pide:
a) Determinar los esfuerzos en cada barra cuando sólo actúa el peso propio.
b) Calcular los esfuerzos totales en cada barra cuando, además del peso propio, actúa la siguiente carga térmica: un enfriamiento de 20 ºC en la barra de acero y un calentamiento de 15 ºC en las barras de aluminio. (Examen febrero 94.)

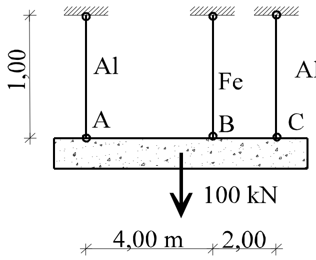


Figura 13

14) Dibujar la ley de momentos flectores, la ley de esfuerzos cortantes y la deformada de la viga de la figura 14 para las siguientes hipótesis de carga:
a) Un descenso del apoyo *B* de 3 cm.
b) Una curvatura impuesta $\chi = -2$ mrad/m.
c) La carga repartida que se muestra en la figura.

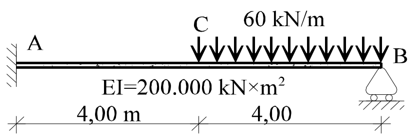


Figura 14

15) La viga de la figura 15 se construye en dos tramos, *ABC* y *C'DE*, que después se unen. Sin embargo, por un error de construcción, el punto *C'* está δ cm más alto que el *C* (ver figura). Para corregir este error se hace subir el punto *C* hasta *C'* cargando el vano *AB* con una cierta sobrecarga uniforme *p*. A continuación, cuando *C* coincide con *C'*, se unen ambos tramos y se consigue la continuidad en *C-C'* (si bien quedará ahí un punto anguloso). Finalmente se retira la sobrecarga *p* que actuaba sobre *AB*. Se pide:

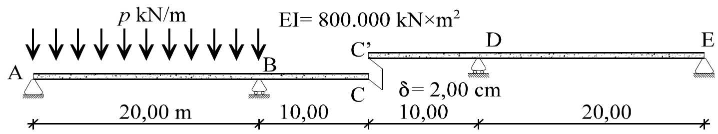


Figura 15

a) Determinar el valor de la sobrecarga *p* que hay que aplicar para elevar *C* la cantidad δ indicada en la figura 15.
b) Dibujar y acotar la ley de momentos flectores cuando la viga está completa pero áun no se ha retirado la sobrecarga *p*.
c) Dibujar y acotar la ley de momentos flectores una vez retirada la sobrecarga *p*.
(Examen febrero 02.)

16) El pórtico de la figura 16 es de sección constante a excepción de la zona *FG*, cuya rigidez se considera infinita. Sobre el pórtico actúa la carga puntual de la figura. Suponiendo que las vigas son inelongables, se pide determinar las leyes de esfuerzos axiles, cortantes y flectores, y las reacciones de la estructura. (Examen junio 90.)

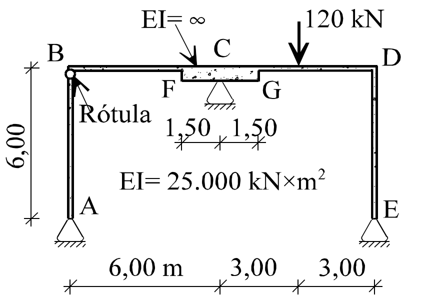


Figura 16

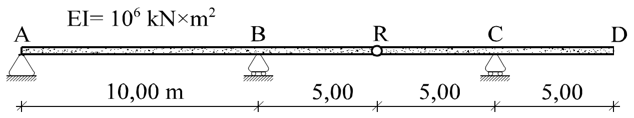


Figura 17

17) Para la viga de la figura 17 (apoyada en *A, B* y *C*, y con rótula en *R*) se pide:
a) Dibujar la línea de influencia de la reacción en *A* y acotar sus valores en las secciones con nombre para carga vertical unidad hacia abajo.
b) Íd. para la línea de influencia del esfuerzo cortante a la derecha de la sección *B* .
c) Íd. para la línea de influencia del momento flector en la sección *B* .
d) Íd. para la línea de influencia del giro en *B*.
e) Íd. para la línea de influencia de la flecha en *R*.
En los dibujos anteriores debe quedar claro cómo se curva cada tramo y qué tramos son rectos.

18) Para la viga de la figura 18 se pide:
a) Dibujar la línea de influencia del esfuerzo cortante a la derecha de la sección *B* y acotar sus valores en las secciones con nombre para carga vertical unidad hacia abajo.
b) Íd. para la línea de influencia del momento flector en la sección *B* .
c) Íd. para la línea de influencia del giro en *B*.

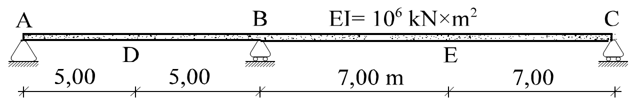


Figura 18

19) La estructura de la figura 19 consiste en una viga *CD* atirantada en su centro de vano *E* por un cable *BE*, el cual se sujeta en su otro extremo a un mástil vertical *AB*. Las rigideces *EI* de la viga y del mástil y la rigidez *EA* del cable se dan en la propia figura. La viga *CD* soporta la sobrecarga uniforme que también se muestra en la figura. Se pide:
a) Determinar el esfuerzo axil en el cable.
b) Dibujar y acotar las leyes de esfuerzos axiles y flectores en las tres piezas. En la viga *CD* se acotará la ley de momentos flectores en el centro y en los cuartos de la luz.
c) Calcular la flecha vertical del punto *E*.

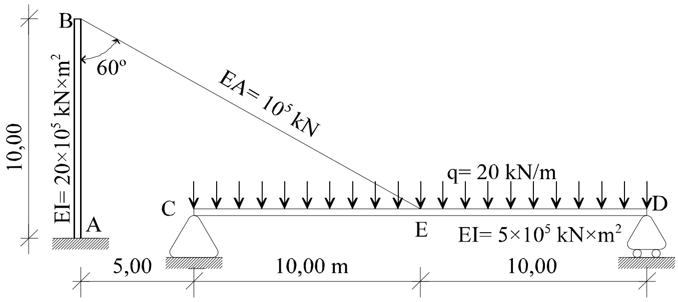


Figura 19

Fórmulas de utilidad

Flecha en el centro de viga biapoyada con carga puntual *P* en el centro y repartida *q* $v = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{5qL^4}{384EI}$

Flecha en extremo de ménsula con carga puntual *P* en el extremo: $v = \frac{PL^3}{3EI}$

(Examen febrero 01.)

20) La estructura de la figura 20*a* está formada por un marco *ABCD* que lleva un anillo circular inscrito en su interior. La única interacción entre marco y anillo es la igualdad de desplazamientos normales en los cuatro puntos medios *M* de contacto (figura 20*b*). La rigidez, igual para todas las piezas, se da en la figura 20*b*. Para la carga uniforme mostrada, se pide:
a) Calcular el movimiento normal en los puntos de contacto *M*.
b) Dibujar y acotar las leyes de momentos flectores en el marco.
c) Íd en el arco.
Se desprecian las deformaciones por esfuerzo axil.
(Examen diciembre 98).

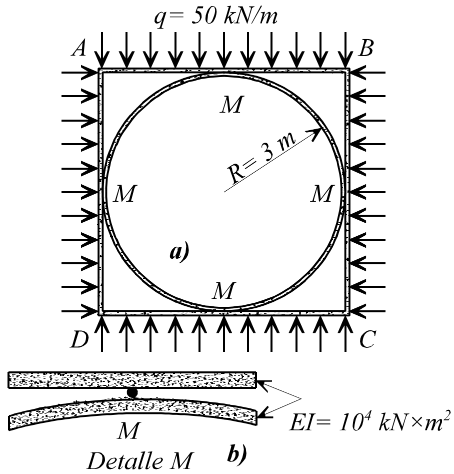


Figura 20

21) El arco de la figura 21*a* tiene por directriz una parábola de 2º grado y su sección transversal es variable y desconocida. Mediante un ensayo se ha determinado que al aplicar sobre el apoyo *B* la fuerza horizontal $H_B = 250$ kN hacia la derecha, en el pinto genérico *R* del arco se produce una flecha vertical hacia abajo de valor:

$$v_R(x) = 0{,}0125\left[\left(\frac{x}{10}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{10}\right)^3 + \frac{x}{10}\right] \quad \text{m}$$

y el movimiento horizontal de *B* es $u_B = 0{,}005$ m.
Sobre esta estructura se coloca un tirante entre los apoyos *A* y *B* (figura 21*b*) con módulo de elasticidad $E = 2\times10^5$ *MPa* y seguidamente se la somete a la carga uniforme por unidad de proyección sobre la mitad del vano, como se muestra en la figura 21*b*. Se pide:
a) Determinar la sección del cable de modo que el esfuerzo axil en la clave *C* del arco sea de 50 kN de compresión.
b) Dibujar la ley de momentos flectores en el arco y acotar sus valores significativos.

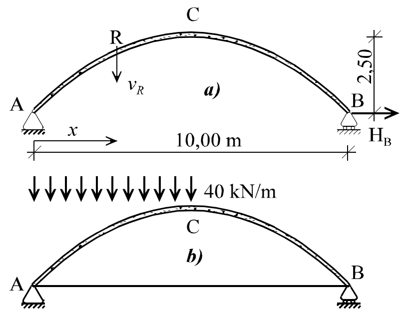


Figura 21

22) Integrar la ecuación diferencial de la viga de la figura 22 para:
a) Determinar los valores de las reacciones.
b) Dibujar y acotar la ley de momentos flectores, indicando el valor del máximo.
c) Calcular la flecha máxima.

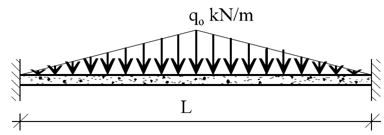


Figura 22

23) El pórtico atirantado de la figura 23 está formado por dos vigas *AB* y *BC* y un cable *AC* cuyas rigideces se dan en la figura. El punto *C* tiene *restringidos* los movimientos horizontales de la manera que se indica en la propia figura. Se pide:
a) Determinar el valor que ha de tener la carga uniforme *q* (kN/m) para producir el máximo desplazamiento horizontal permitido en *C*.
b) Dibujar los diagramas de reacciones y esfuerzos (axiles, cortantes y flectores) en las tres piezas de la estructura bajo la carga *q* anterior, acotando sus puntos característicos. (Examen julio 94.)

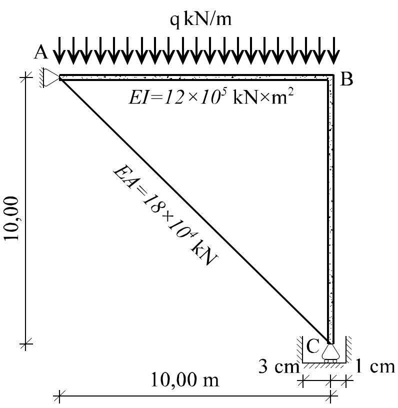


Figura 23

24) Queremos proyectar el arco de la figura 24*b* de forma que se apoye en *A* y en *B*, tenga su clave en *C* y sea el antifunicular de la carga dada en la figura 24*a*. Se pide:
a) Obtener la expresión analítica de la directriz del arco.
b) Calcular las reacciones y los esfuerzos en la clave *C*.
c) Posteriormente encontramos que el terreno no nos proporciona el apoyo fijo que necesitábamos en *B* sino que en dirección horizontal el apoyo se comporta como elástico, con la rigidez *k* dada en la figura 24*c*. Si la rigidez *EI(x)* del arco varía de la forma mostrada, obtener las reacciones, el movimiento horizontal de *B* y los esfuerzos en la clave *C* del arco.

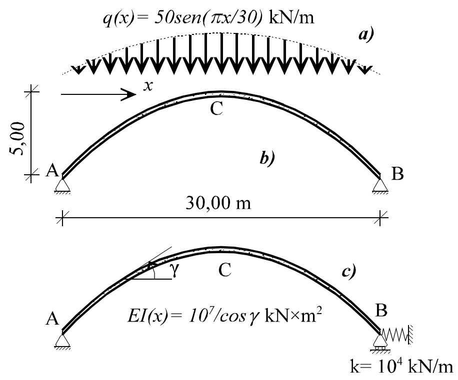
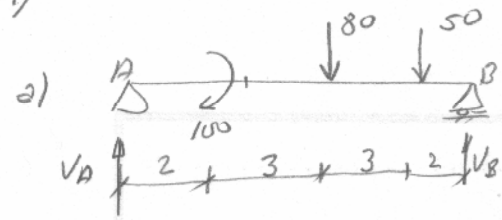


Figura 24

1)

a)

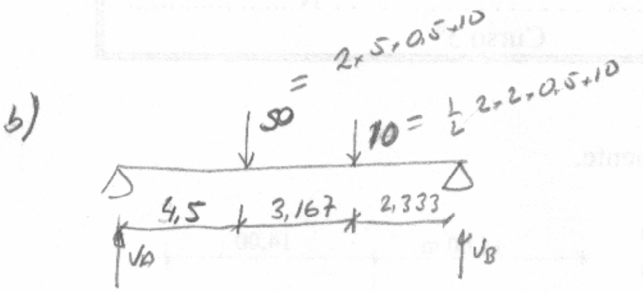


$\Sigma M_A = -100 - 80 \times 5 - 50 \times 8 + V_B \times 10 = 0 \Rightarrow V_B = 90$

$\Sigma M_B = -V_A \times 10 - 100 + 80 \times 5 + 50 \times 2 = 0 \Rightarrow V_A = 40$

$\Sigma = 130$

b)



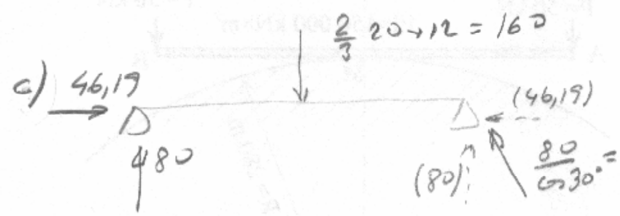
$\Sigma M_A = -50 \times 4{,}5 - 10 \times 7{,}667 + V_B \times 10 \Rightarrow V_B = 30{,}17$

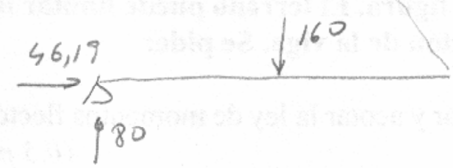
$\Sigma M_B = -V_A \times 10 + 50 \times 5{,}5 + 10 \times 2{,}333 = 0$

$\Rightarrow V_A = 29{,}83$

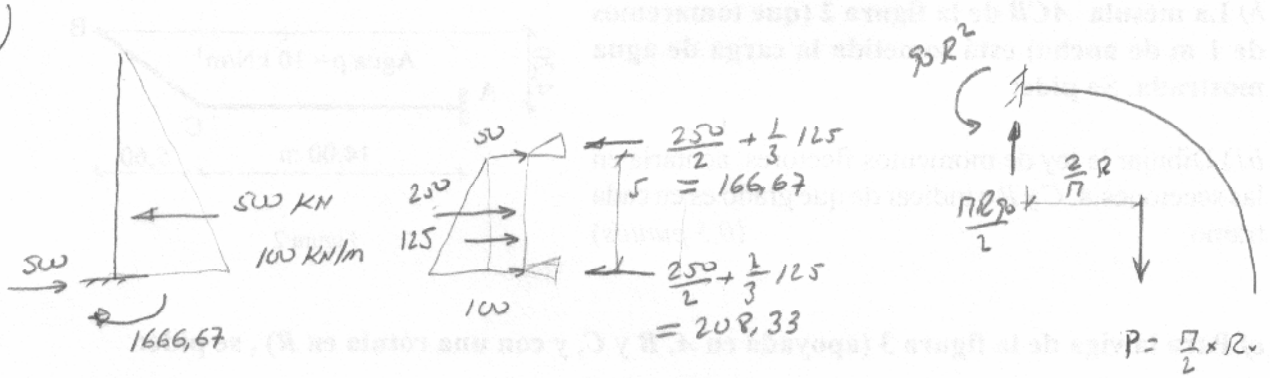
$\Sigma = 60$

c)

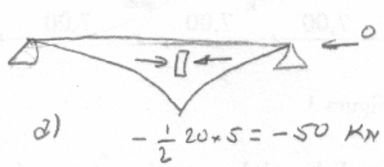


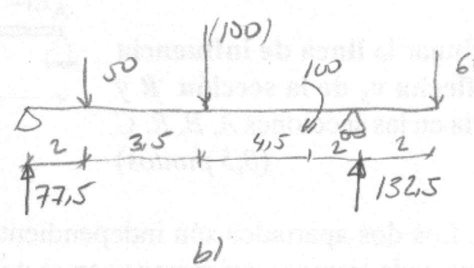


2)

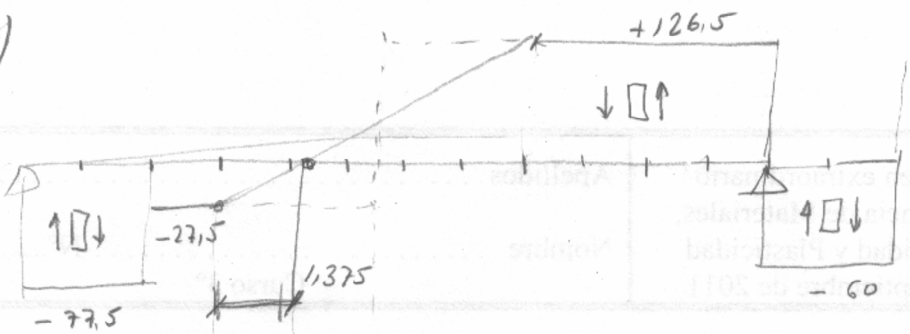


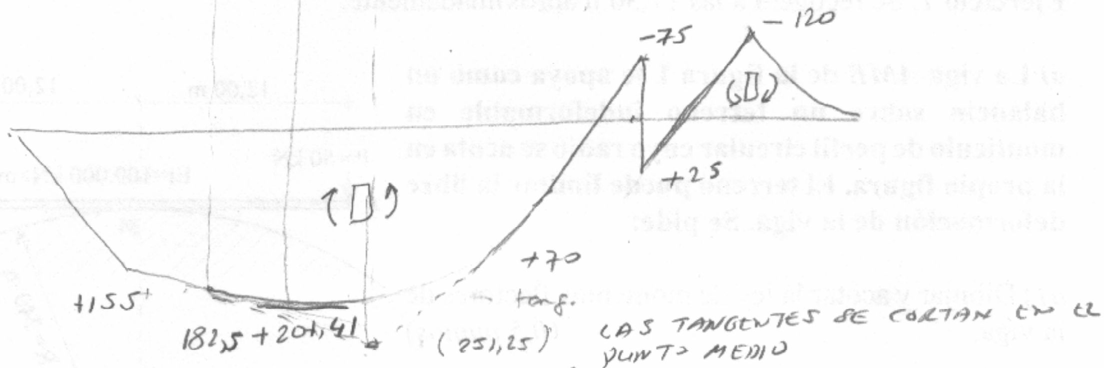
3)





3b cont)

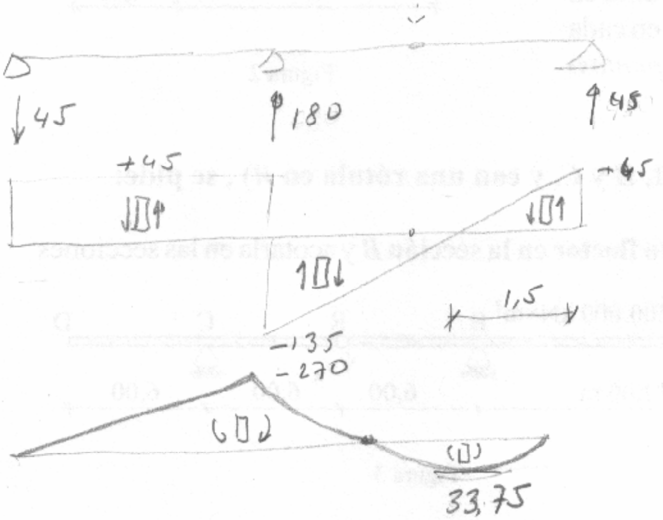




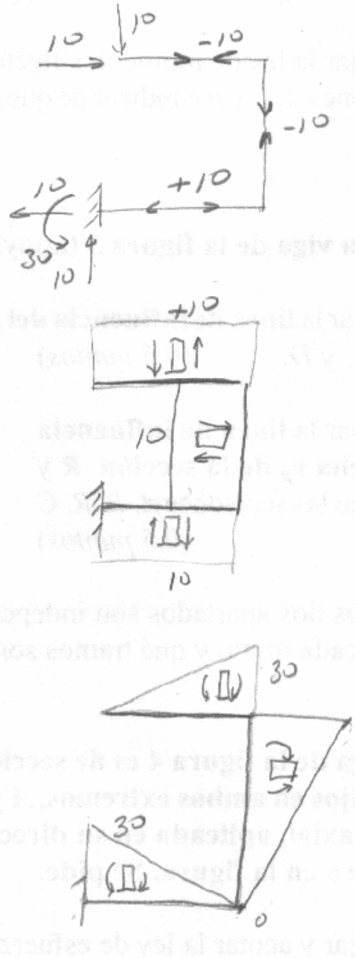
$$M_{max} = 77{,}5 \times 4{,}375 - 50 \times 2{,}375 - 20 \times \frac{1{,}375^2}{2} = 201{,}406$$

$$M_{max} = -60 \times (11 - 1{,}375) + 132{,}5 \times (9 - 1{,}375) - 100 - 20(5 - 1{,}375)^2 = 201{,}406$$

4d)

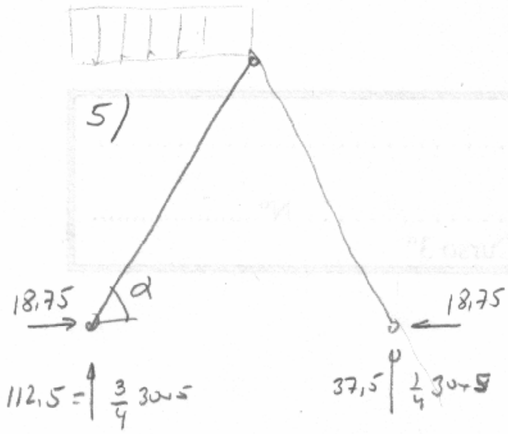


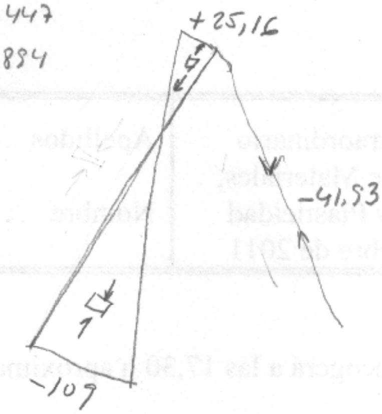
4b)

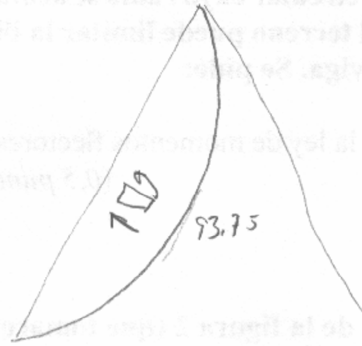


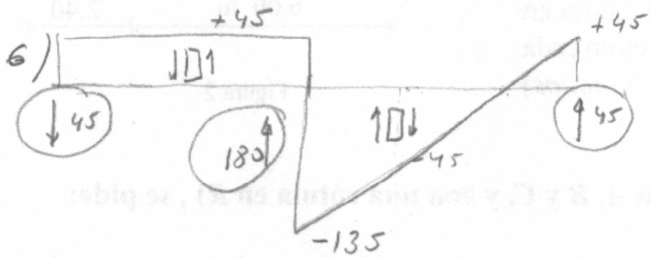
$\cos\alpha = 0{,}447$

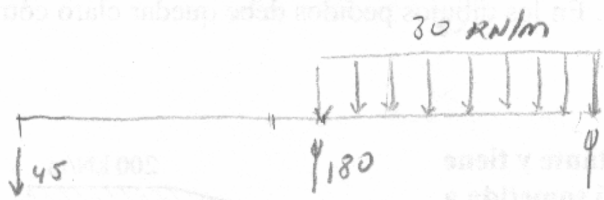
$\operatorname{sen}\alpha = 0{,}894$



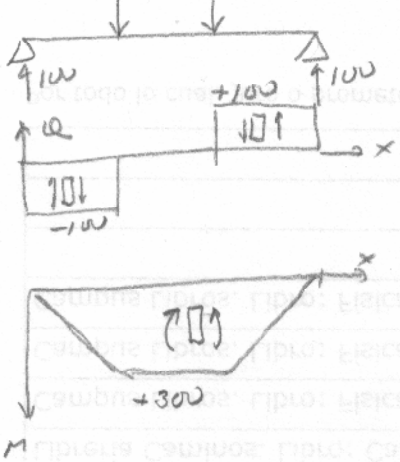


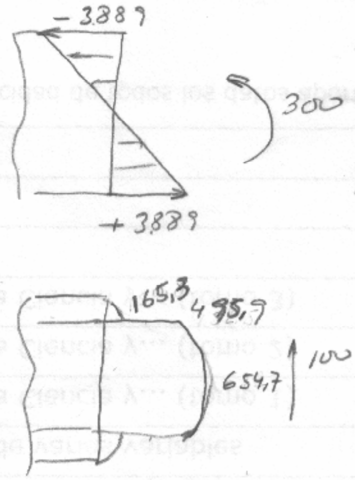






7) $I = 0,03857$



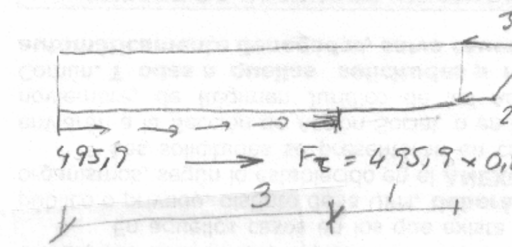


$\mu_1 = 0,60 \times 0,15 \left(0,35 + \frac{0,15}{2}\right) = 0,03825$

$\mu_G = \mu_1 + 0,35 \times 0,20 \times \frac{0,35}{2} = 0,0505$

$\tau_G = \frac{100}{I} \times \frac{\mu_G}{0,20} = 654,7$

$\tau_1 = \frac{100}{I} \frac{\mu_1}{0,20} = 495,9$



$F_c = \frac{3889 + 2722}{2} \times 0,60 \times 0,15 = 297,5$

$F_t = 495,9 \times 0,20 \times 3 = 297,5$

(11)

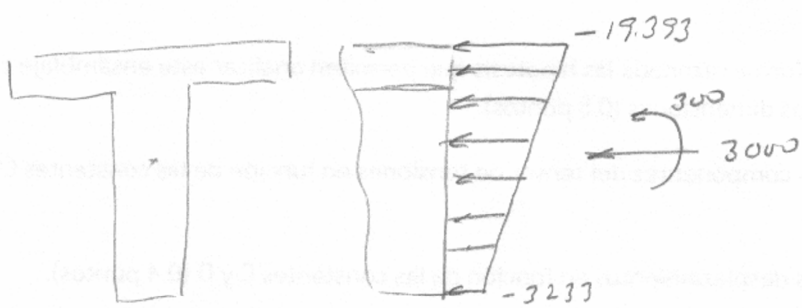
CONTINUACION DEL PROBLEMA 8 SIGUIENTE

Para $\frac{M}{N} = \frac{300}{3000} = 0,1 <$ es estamos dentro del núcleo central

vale Navier

$\sigma_s = \frac{-3000}{0,23} - \frac{300 \times 0,334}{0,01578} = -19393.$

$\sigma_i = -\frac{3000}{0,23} + \frac{300 \times 0,516}{0,01578} = -3233$

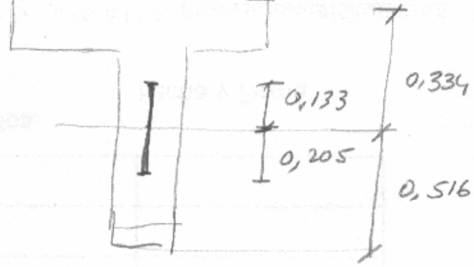


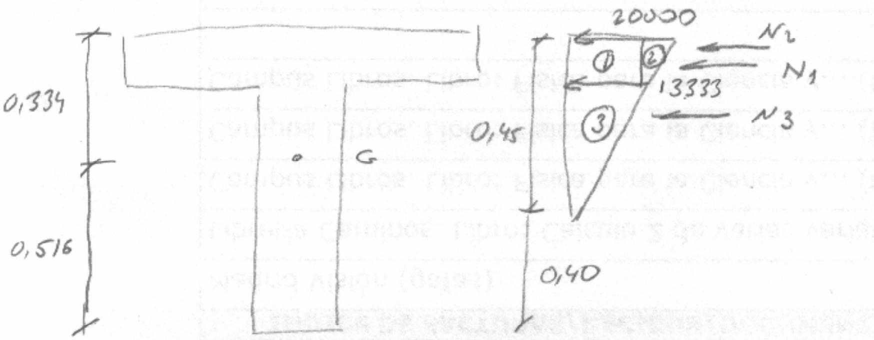
8) $J = 0,01570$

$C_s = 0,334$ $\qquad e_i = \frac{I}{A c_s} = 0,205$, $e_s = 0,133$

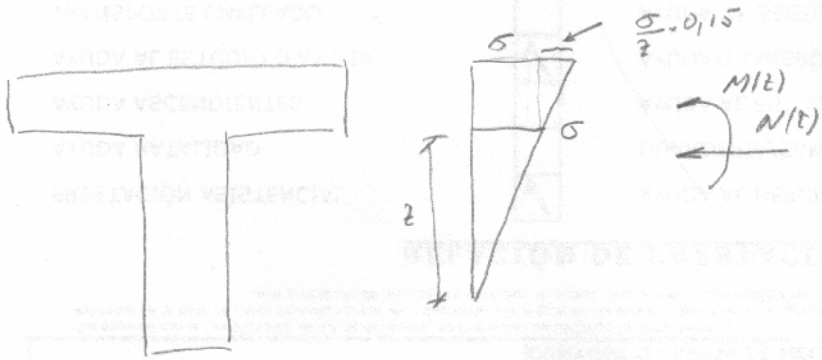
$C_i = 0,516$

$A = 0,23$





	γ	b	h	σ	N	y_G	M_G
1	1	0,60	0,15	13333	1200	0,259	310,8
2	0,5	0,60	0,15	6667	300	0,284	85,2
3	0,5	0,20	0,30	13333	400	0,084	33,6
					1900		429,6



$$N(z) = \left[0,60 \cdot 0,15 + \frac{1}{2}\frac{0,15}{z} \cdot 0,60 \cdot 0,15 + \frac{1}{2} z \cdot 0,20\right]\sigma$$

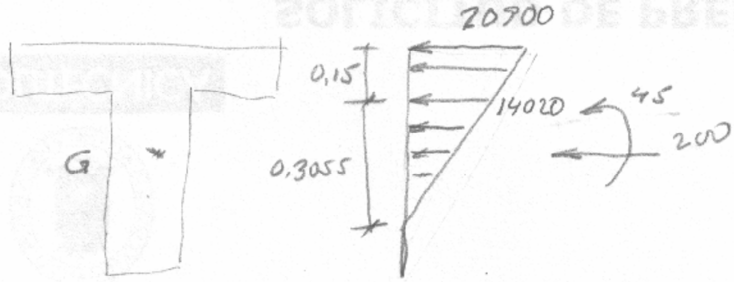
$$M(z) = \left[0,60 \cdot 0,15 \cdot \left(0,334 - \frac{0,15}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{0,15}{z} 0,60 \cdot 0,15 \cdot \left(0,334 - \frac{0,15}{3}\right) + \frac{1}{2} z \cdot 0,20 \cdot \left(0,334 - 0,15 - \frac{z}{3}\right)\right]\sigma$$

Buscamos solución $N = 200$, $M = 45 \Rightarrow \frac{M}{N} = 0,225$

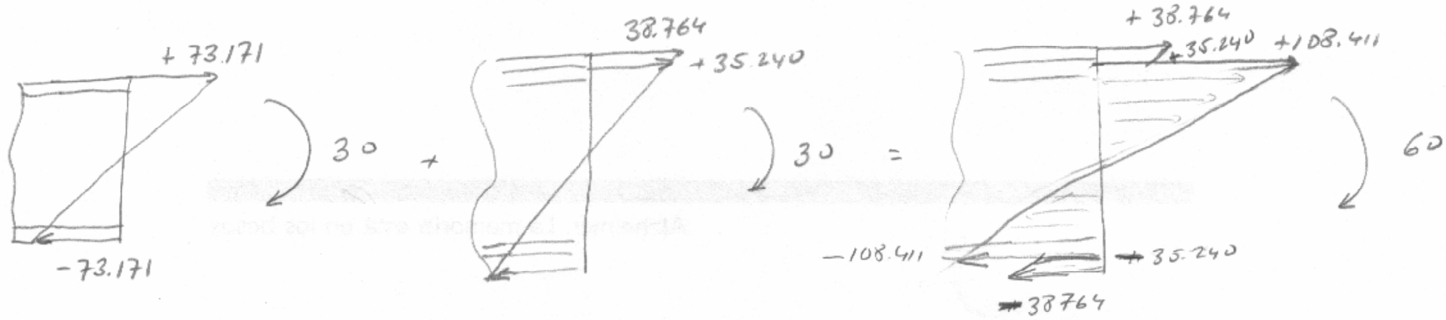
Resolvemos $\frac{M(z)}{N(z)} = 0,225 \Rightarrow z = 0,3055$ (ME LO HIZO LA MAQUINA)

Entrando con z en $N(z) = 200 \Rightarrow \sigma = 14020$

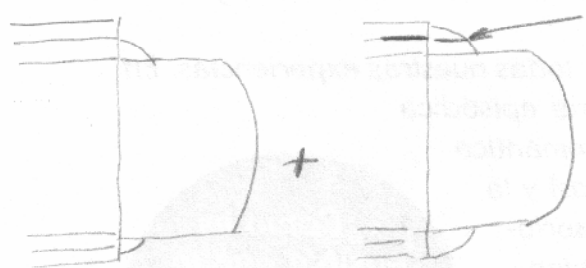
" " " $M(z) = 45 \Rightarrow \sigma = 14020$



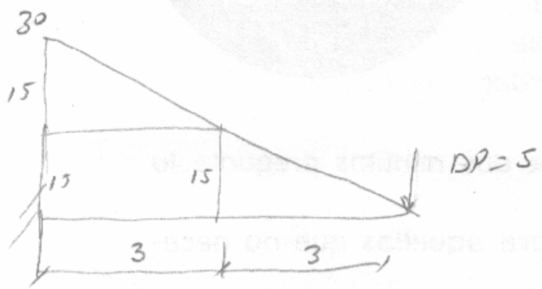
9) $I_1 = 0{,}41 \times 10^{-4}$; $I_2 = 0{,}8513 \times 10^{-4}$ $\qquad EI_1 = 17.026$



$$c = \frac{5}{0{,}8513 \times 10^{-4}} \times \frac{0{,}20 \times 0{,}01 \times 0{,}105}{0{,}20} = 61{,}67$$

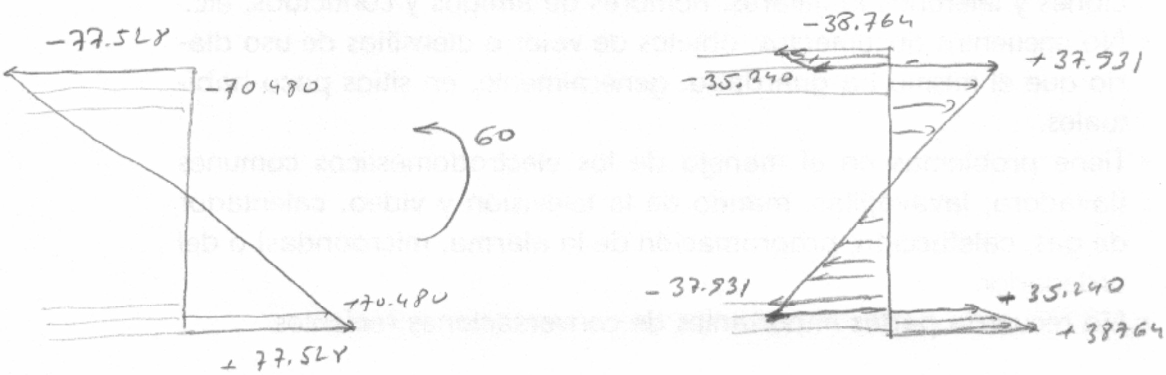


$$v_1 = \frac{PL^3}{3EI} = 0{,}44 \times 10^{-3}\ m. \Rightarrow 44\ mm.$$



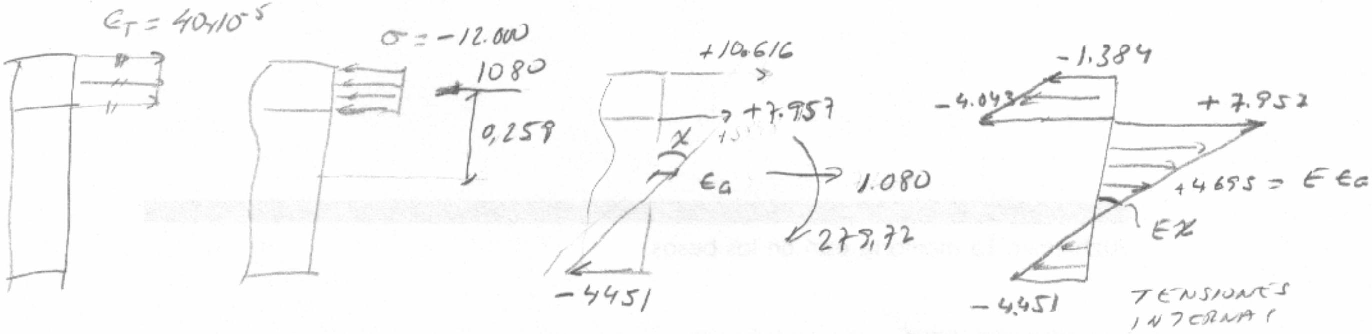
$$\Delta V = \frac{1}{2} \frac{15}{EI_2} \times 3 \times \left(6 - \frac{1}{3} 3\right) + \frac{15}{EI_2} \times 3 \times 4{,}5$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{15}{EI_2} \times 3 \times 2 = 24 \times 10^{-3}\ m.$$

$$v_B = 44 + 24 = 68\ mm.$$

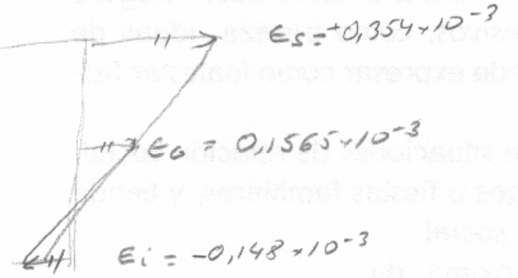


$\Delta V = 2 \times 24 = 48\,mm \uparrow$ $\qquad V_f = 68 - 48 = 20\ mm.$

10) $I = 0{,}01578$; $A = 0{,}23$; $c_s = 0{,}334$; $c_i = 0{,}516$ VER PRACTICA 8



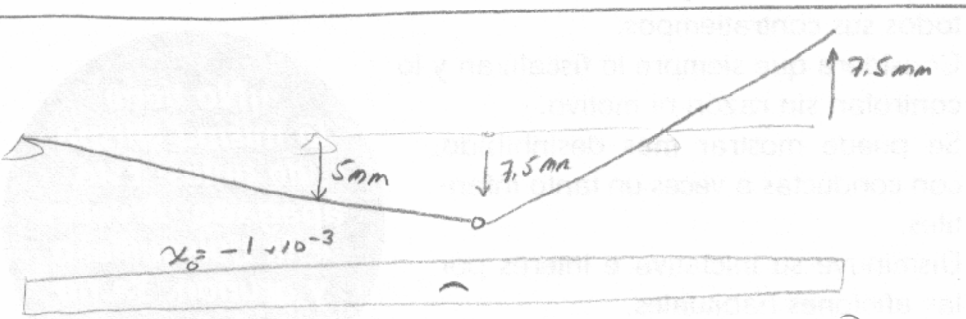
$$\epsilon_G = \frac{1080}{3 \times 10^7 \times 0{,}23} = 0{,}1565 \times 10^{-3} \qquad \chi = \frac{-279{,}72}{3 \times 10^7 \times 0{,}01578} = -0{,}591 \times 10^{-3}\ \text{rad/m}$$



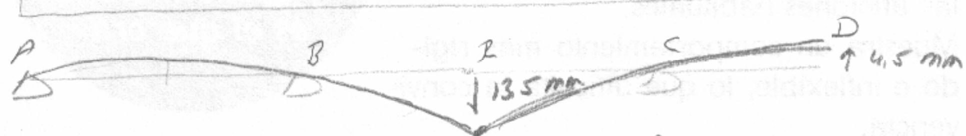
---

11)

a)



b)



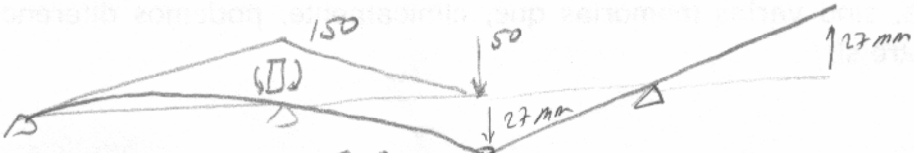
$$\theta_B = -\frac{\chi_0 \times 6}{3} - \frac{\chi_0 6}{6} = -\frac{\chi_0 \times 6}{2} = -3 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

$$v_R = -3 \times 10^{-3} \times 3 - 1 \times 10^{-3} \times 3 \times \frac{3}{2} = -13{,}5 \times 10^{-3}\ m.$$

$$v_R \equiv -\theta_C \times 3 - 1 \times 10^{-3} \times 3 \times \frac{3}{2} = -13{,}5 \times 10^{-3}\ m \Rightarrow \theta_C = 3 \times 10^{-3}$$

$$v_D = 3 \times 10^{-3} \times 3 - 1 \times 10^{-3} \times 3 \times \frac{3}{2} = 4{,}5 \times 10^{-3}$$

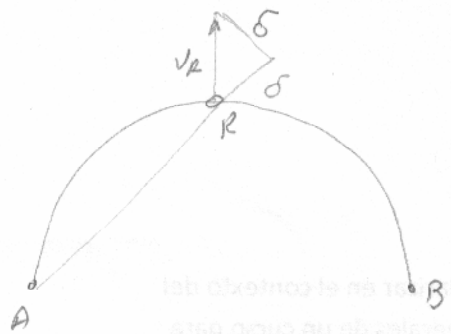
c)



$$\theta_B = -\frac{150 \times 6}{3EI} = -\frac{300}{EI}$$

$$v_R = -\frac{300}{EI} \times 3 - \frac{1}{2}\frac{150}{EI} \times 3 \times \frac{2}{3} 3 = -\frac{1350}{EI} = -27 \times 10^{-3}\ m$$

12)



a) $\epsilon = 0,5\times10^{-3}$

$$v_R = 0,5\times10^{-3}\times10 - \vartheta_A\times10 = 0 \Rightarrow \vartheta_A = 0,5\times10^{-3}$$

$$V_R = \vartheta_A\times10 + 0,5\times10^{-3}\times10 = 10\times10^{-3}$$

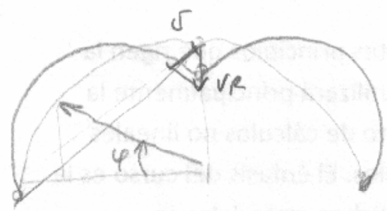
$$\vartheta_B = -\vartheta_A = -0,5\times10^{-3}$$

OTRO MODO

$$\delta = 0,5\times10^{-3}\times10\sqrt{2} \quad ; \quad v_R = \delta\sqrt{2} = 10\times10^{-3}$$

$$\vartheta_A = \frac{\delta}{10\sqrt{2}} = 0,5\times10^{-3}$$

b) $\chi = -0,6\times10^{-3}$



$$v_R = -\vartheta_A\times10 + 0,6\times10^{-3}\,10^2\underbrace{\int_0^{\pi/2}(1-\operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi}_{\pi/2-1} = 0$$

$$\Rightarrow \vartheta_A = 3,425\times10^{-3}$$

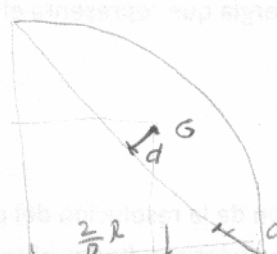
$$V_R = \vartheta_A\times10 - 0,6\times10^{-3}\times10^2\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi}_{1} = -25,75\times10^{-3}$$

OTRO MODO

Por curvatura: $\vartheta_A = \frac{1}{2}0,6\times10^{-3}\times\frac{\pi}{2}\times10 = 4,712$

Acortamiento

$$\delta = 0,6\times10^{-3}\times\frac{\pi}{2}\times10\times1,932 = 18,209\times10^{-3}$$



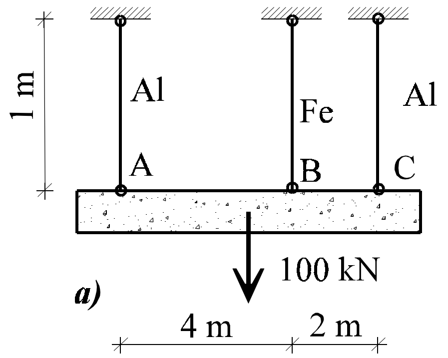
Por acortamiento $\vartheta_A = -\frac{\delta}{10\sqrt{2}} = -1,288\times10^{-3}$

$$d = \left(\frac{2}{\pi}10 - 5\right)\sqrt{2} = 1,932 \text{ m}$$

$$\vartheta_A = 4,712 - 1,288 = 3,425\times10^{-3}$$

$$V_R = -\delta\sqrt{2} = -25,75\times10^{-3}$$

13) Tomaremos como incógnita hiperestática el esfuerzo axil N_2 en la barra intermedia. La estructura isostática asociada es, pues, la de la figura 6.9*b*, en la que la carga N_2 es la necesaria para conseguir $v_B^{(viga)}= v_B^{(barra)}$.



a) Debido al peso propio, $N_1= N_3= 50\ t$:

$$v_A= v_C=-\frac{50\times 1}{0{,}7\times 10^8\times 2\times 10^{-4}}=-3{,}571\times 10^{-3}\ m$$

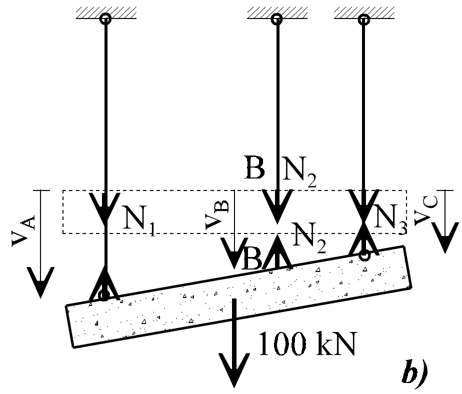
$$v_B=-3{,}571\times 10^{-3}\ m$$

Debido a la carga N_2, $N_1=-N_2/3$, $N_3=-2N_2/3$:

$$v_A=\frac{\frac{N_2}{3}\times 1}{0{,}7\times 10^8\times 2\times 10^{-4}}= 0{,}0238N_2\times 10^{-3}\ m$$

$$v_C= 2v_A= 0{,}0476N_2\times 10^{-3}\ m$$

$$v_B=v_A+\frac{4}{6}(v_C-v_A)= 0{,}0397N_2\times 10^{-3}\ m$$



La ecuación de compatibilidad resulta:

$$-3{,}571+0{,}0397N_2=-\frac{N_2\times 1}{2{,}1\times 10^8\times 12\times 10^{-4}}\times 10^3$$

$$N_2= 81{,}78\ kN$$

Observa que los coeficientes de N_2 se *suman* en la ecuación hiperestática. Los valores finales son: $N_1= 5-N_2/3= 22{,}74$ *kN*, $N_2= 81{,}78$ *kN*, $N_3= 5-2\times T_2/3=-4{,}52$ *kN*.

b) Consideraremos la carga térmica *aislada*. Su ecuación de compatibilidad variará sólo en el término independiente:

$$v_A= v_C=-15\times 27\times 10^{-6}\times 1=-0{,}405\times 10^{-3}\ m$$

$$v_B^{(viga)}=-0{,}405\times 10^{-3}\ m$$

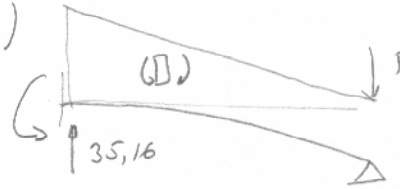
$$v_B^{(barra)}= 20\times 12\times 10^{-6}\times 1= 0{,}240\times 10^{-3}\ m$$

La nueva ecuación de compatibilidad es:

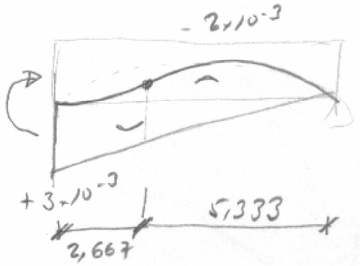
$$-0{,}405+0{,}0397N_2=-0{,}00397N_2+0{,}240 \quad \Rightarrow \quad N_2= 14{,}77\ kN$$

La carga de temperatura aislada da: $T_1=-4{,}92$ *kN*, $N_2= 14{,}77$ *kN*, $T_3=-9{,}85$ *kN*. Equilibran una carga nula. Superpuesta con la de peso propio resulta: $N_1= 17{,}80$ *kN*, $N_2= 96{,}55$ *kN*, $N_3=-14{,}36$ *kN*, que equilibran una carga exterior de 100 kN.

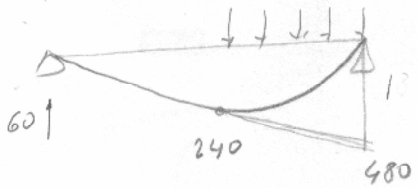
14)



$$\frac{PL^3}{3EI} = 0{,}03 \Rightarrow P = 35{,}156$$



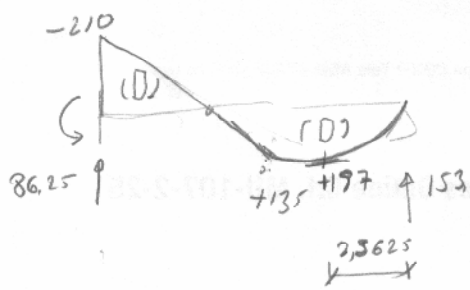
$$\theta_B = \frac{+2\times10^{-3}\times 8}{2} - \frac{M\times 8}{3EI} = 0 \Rightarrow M = 600$$

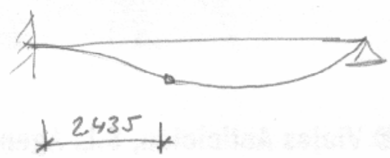


$$\theta_A \times 8 + \frac{1}{2}\,\frac{480}{EI}\times 8 \times \frac{1}{3}\,8 - \frac{1}{3}\,\frac{480}{EI}\times 4 \times \frac{1}{4}\,4 = 0$$

$$\theta_A = -\frac{560}{EI}$$

$$\frac{M_A\times 8}{3EI} = \frac{560}{EI} \Rightarrow M_A = 210$$





15)

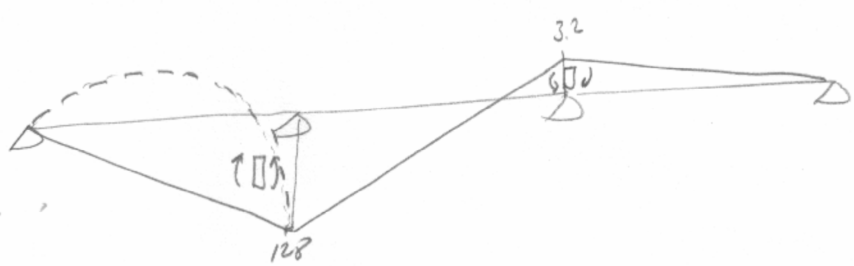
$$\theta_B \cdot \overline{BC} = \frac{p\times 20^3}{24EI_x}\times 10 = 0{,}02 \Rightarrow p = 4{,}8\ kN/m$$

$$\theta_B^{①} = -\frac{4{,}8\times 20^3}{24EI} + \frac{M_B\times 20}{3EI} = -\frac{M_B\times 20}{3EI} + \frac{M_C\times 20}{6EI} = \theta_B^{②}$$

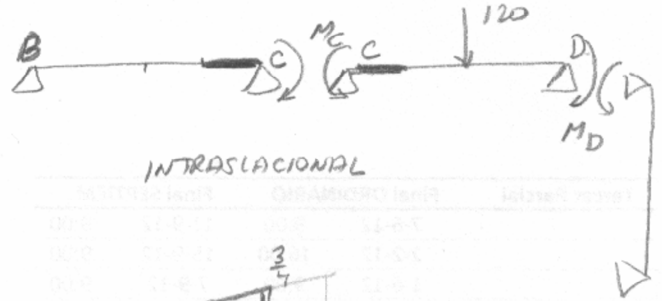
$$\theta_C^{②} = \frac{M_B\times 20}{6EI} - \frac{M_C\times 20}{3EI} = \frac{M_C\times 20}{3EI} = \theta_C^{③}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{40}{3} & -\frac{20}{6} \\ -\frac{20}{6} & \frac{40}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1600 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

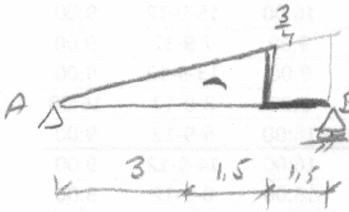
$M_B = 128$; $M_C = 32$



16)



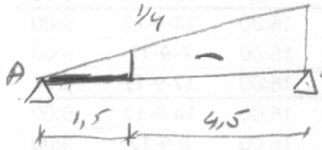
INTRASLACIONAL



$$v_A \equiv -\theta_B \cdot 6 - \frac{1}{2}\frac{3}{4EI}\cdot 4,5\cdot\frac{2}{3}4,5 = 0 \Rightarrow \theta_B = -\frac{0,84375}{EI}$$

$$v_B \equiv \theta_A \cdot 6 - \frac{1}{2}\frac{3}{4EI}\cdot 4,5\left(1,5+\frac{1}{3}4,5\right) = 0 \Rightarrow \theta_A = \frac{0,84375}{EI}$$

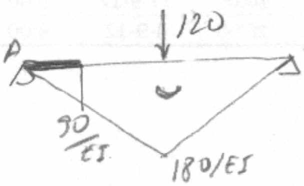
Comprobación: $\theta_A - \theta_B = \text{Area } \chi = \frac{1}{2}\frac{3}{4EI}\cdot 4,5$



$\theta_A = \frac{0,84375}{EI}$ por reciprocidad

$$v_A \equiv -\theta_B\cdot 6 - \frac{1}{2}\frac{1}{EI}\cdot 6\cdot\frac{2}{3}6 + \frac{1}{2}\frac{1}{4EI}\cdot 1,5\cdot\frac{2}{3}1,5 = 0 \Rightarrow \theta_B = -\frac{1,96875}{EI}$$

comprobación: $\theta_B - \theta_A = \text{are } \chi = \frac{1+\frac{1}{4}}{2}\cdot\frac{4,5}{EI}$



$$v_B \equiv \theta_A\cdot 6 + \frac{1}{2}\frac{180}{EI}\cdot 6\cdot 3 - \frac{1}{2}\frac{90}{EI}\cdot 1,5\cdot\left(6-\frac{2}{3}1,5\right) = 0$$

$$\Rightarrow \theta_A = -\frac{213,75}{EI}$$

$$v_A \equiv -\theta_B\cdot 6 + \frac{1}{2}\frac{180}{EI}\cdot 6\cdot 3 - \frac{1}{2}\frac{90}{EI}\cdot 1,5\cdot\frac{2}{3}1,5 = 0$$

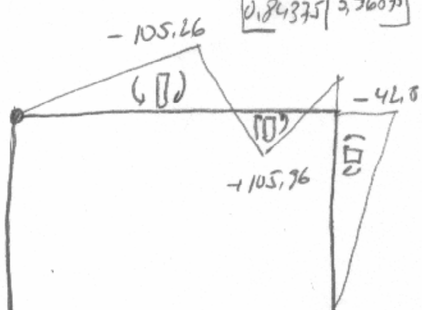
$$\Rightarrow \theta_B = \frac{258,75}{EI}$$

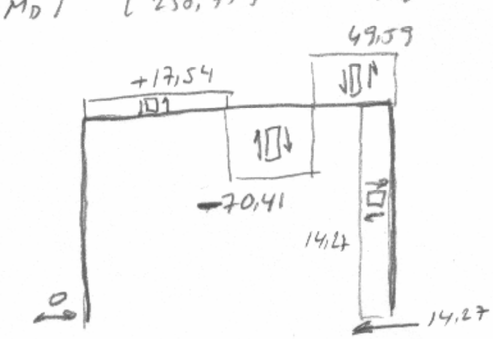
Comprobación: $\theta_B - \theta_A = \frac{1}{2}\left(\frac{180}{EI}\cdot 6 - \frac{90}{EI}\cdot 1,5\right)$

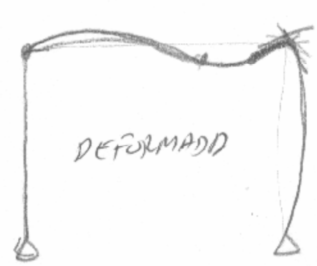
$$\theta_C^{(1)} \equiv -\frac{0,84375}{EI}M_C = \frac{0,84375}{EI}M_C + \frac{0,84375}{EI}M_D - \frac{213,75}{EI} \equiv \theta_C^{(2)}$$

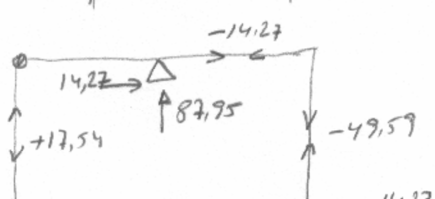
$$\theta_D^{(1)} \equiv -\frac{0,84375}{EI}M_C - \frac{1,96875}{EI}M_D + \frac{258,75}{EI} = \frac{M_D\cdot 6}{3EI} \equiv \theta_D^{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1,6875 & 0,84375 \\ 0,84375 & 3,96875 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} M_C \\ M_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 213,75 \\ 258,75 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} M_C = 105,26 \\ M_D = 42,82 \end{matrix}$$

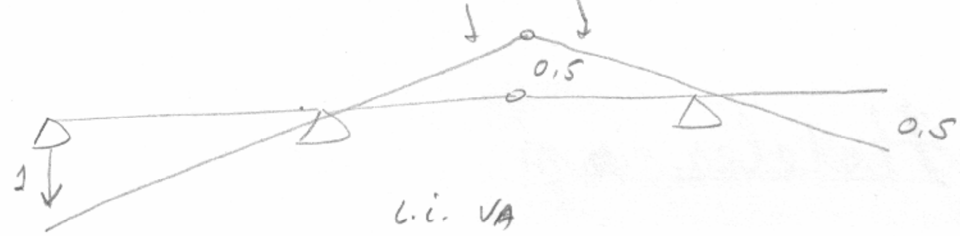




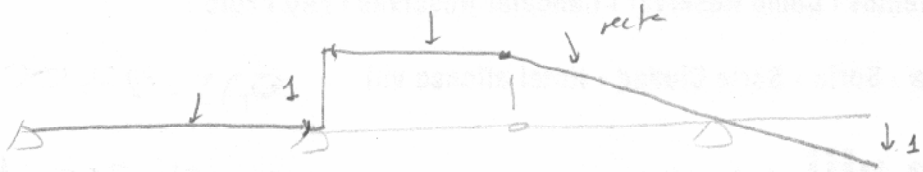




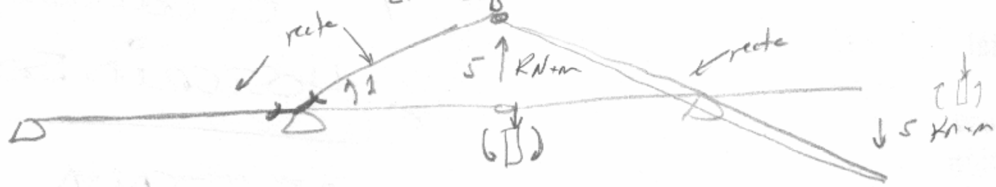
17)



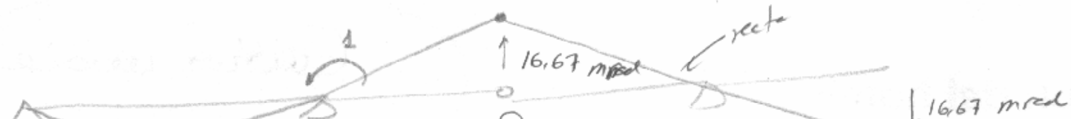
l.i. V_A



l.i. Q_B^+

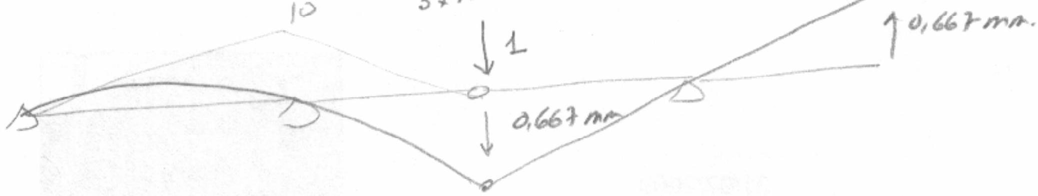


l.i. M_B



l.i. ϑ_B

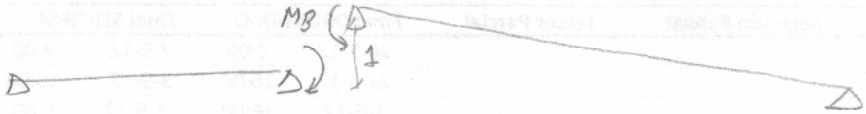
$v_R = \dfrac{1\times 10}{3\times 10^6}\times 5 =$



$$\overset{\downarrow}{v_R} = \frac{10\times 10}{3\times EI}\times 10 + \frac{1}{2}\,\frac{10}{EI}\times 10\times\frac{2}{3}\,10 = 0{,}667\times 10^{-3}\ m$$

18)

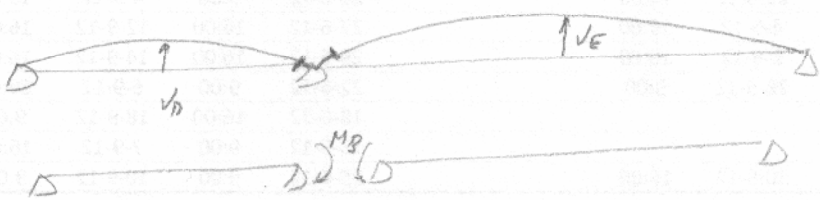
2).



$$-\frac{M_B \cdot 10}{3EI} = \frac{M_B \cdot 14}{3EI} - \frac{1}{14} \Rightarrow M_B = 0{,}008929\,EI$$

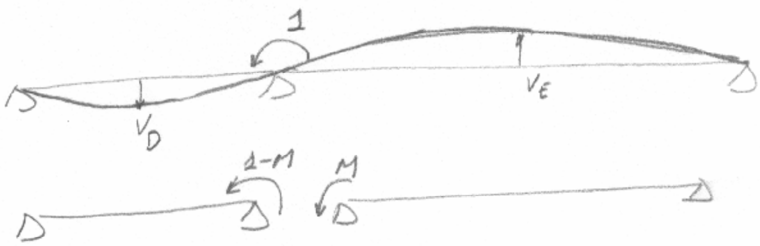
$$v_D = \frac{0{,}008929\,EI \cdot 5 \cdot 5 \cdot 15}{6 \cdot 10 \cdot EI} = 0{,}0558^{-3} \; (1)$$

$$v_E = 0{,}5 + \frac{0{,}008929\,EI \cdot 7 \cdot 7 \cdot 21}{6 \cdot 14 \cdot EI} = 0{,}609$$



$$\frac{M_B \cdot 14}{3EI} + \frac{M_B \cdot 10}{3EI} = 1 \Rightarrow M_B = 0{,}125\,EI$$

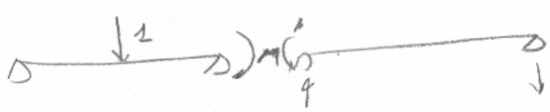
$$v_D = \frac{0{,}125\,EI \cdot 5 \cdot 5 \cdot 15}{6 \cdot 10\, EI} = 0{,}781 \; (2) \qquad v_E = \frac{0{,}125\,EI \cdot 7 \cdot 7 \cdot 21}{6 \cdot 14 \cdot EI} = 1{,}531$$



$$\frac{(1-M) \cdot 10}{3EI} = \frac{M \cdot 14}{3EI} \Rightarrow 0{,}4167$$

$$v_D = \frac{(1-0{,}4167) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 15}{6 \cdot 10 \cdot EI} = 3{,}646 \cdot 10^{-6}\ m. \; (3) \quad ; \quad v_E = \frac{0{,}4167 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 21}{6 \cdot 14 \cdot EI} = 5{,}105 \cdot 10^{-6}$$

COMPROBACIONES



$\downarrow 0{,}0558$ (1) ver (1) arriba

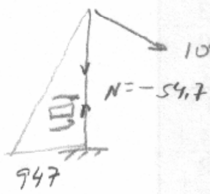
$$\frac{1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 15}{6 \cdot 10\, EI} - \frac{M \cdot 10}{3EI} = \frac{M \cdot 14}{3EI} \Rightarrow M = 0{,}78125 \; (2)$$ ver (2) arriba

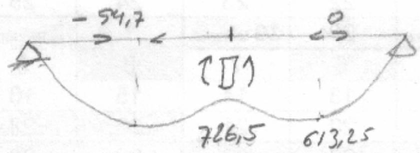
$$\theta_B = \frac{0{,}78125 \cdot 14}{3 \cdot EI} = 3{,}646 \cdot 10^{-6} \; (3)$$ ver (3) arriba

19) Compatibilidad $\quad \delta_{BE} = \overset{\downarrow}{v}_E \cos 60^\circ - \vec{u}_B \cos 30^\circ$

$$\frac{T \times \frac{15}{\sin 60}}{EA} = \left(\frac{5 \times 20 \times 20^4}{384\, EI_1} - \frac{T \cos 60^\circ\, 20^3}{48\, EI_1} \right) \cos 60^\circ - \frac{T \sin 60^\circ\, 10^3}{3EI_2} \cdot \cos 30^\circ$$

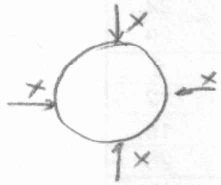
$T = 109{,}25 \qquad T\,(17{,}32 + 8{,}333 + 12{,}5) = 4166{,}67$

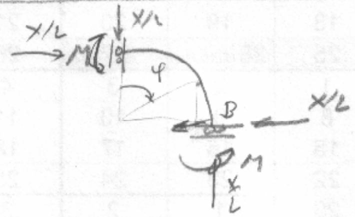




$v_E = \frac{32.550}{EI} = 65 \times 10^{-3}\ m$

20)





$M(\varphi) = M + \frac{X}{2}\left[R(1-\sin\varphi) - R\cos\varphi \right]$

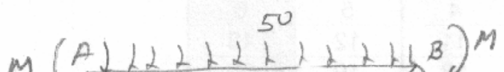
$\int_0^{\pi/2} M(\varphi) R\, d\varphi = 0 \Rightarrow$

$M \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{X}{2} R \left[\frac{\pi}{2} - 1 - 1 \right] = 0$

$M = \frac{4-\pi}{2\pi} R X = 0{,}410\, X$

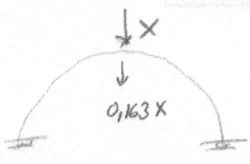
$u_B = \int_0^{\pi/2} \frac{M(\varphi)}{EI} R\cos\varphi\, R\, d\varphi = \frac{9X}{EI} \int_0^{\pi/2} \left[0{,}410 + 1{,}5(1 - \sin\varphi - \cos\varphi) \right] \cos\varphi\, d\varphi =$

$\frac{9X}{EI}\left[0{,}410 \times 1 + 1{,}5\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] = -0{,}163 \frac{X}{EI}$



$\overset{\curvearrowleft}{\theta}_A = -\frac{50 \cdot 6^3}{24EI} + \frac{81}{36EI} X + \frac{M \cdot 6}{2EI} = 0$

$\overset{\downarrow}{v}_M^{(\text{viga})} = \frac{5 \times 50 \times 6^4}{384 EI} - \frac{X \times 6^3}{48 EI} - \frac{M 6^2}{8 EI} = 0{,}163 \frac{X}{EI} = v_M^{(\text{arco})}$

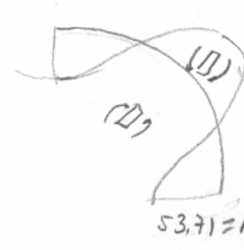


$$\begin{bmatrix} 3 & 2{,}25 \\ 4{,}5 & 4{,}5 + 0{,}163 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M \\ X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 450 \\ 843{,}75 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} M = 51{,}74 \\ X = 131{,}02 \end{matrix}$$

¿POR QUÉ NO ES SIMÉTRICA?

$\frac{ql^2}{8} - M - \frac{XL}{4} = -23{,}27$

$\frac{3}{4}\frac{ql^2}{8} - M - \frac{XL}{8} = 18{,}75$



$-29{,}67 = M + \frac{X}{2} \times 3\,(1 - \sqrt{2})$

$\overset{\downarrow}{v}_M = 0{,}163 \frac{X}{E} = 0{,}213 \times 10^{-3}\ m.$

Para que el esfuerzo axil en la clave del arco alcance las −5 t es preciso que la fuerza en el tirante tenga ese mismo valor *T= 5 t*.

La ecuación hiperestática es

$$\left[u_B^{(H=1)}+\frac{1}{k}\right]\{H_B\}=-\left\{u_B^{(ext)}\right\}$$

con $H_B=-T=-5\ t$. Expresa que el movimiento horizontal del cable, por los conceptos de carga exterior y reacción $H_B=-5$ del tirante, es igual al alargamiento del tirante. Los términos u_B corresponden al arco y el $1/k$ es el coeficiente de flexibilidad del cable, L/EA.

El movimiento horizontal correspondiente a $H_B=1\ t$ es, por proporción con el del dato, $u_B^{(H=1)}=0{,}005/25=0{,}2\times10^{-3}\ m$. El cálculo de $u_B^{(ext)}$ se hace invocando el principio de superposición como sigue.

Si una fuerza $H_B=1$ en B produce en x una flecha vertical de valor $v(x)/25$, una carga unidad en x producirá en B un $u_B=v(x)/25$. Si en vez de una carga unidad en x aplicamos una de valor $q(x)dx$, en B tendremos un movimiento de valor $d(u_B)=v(x)q(x)dx/25$. El desplazamiento total debido a *toda* la carga repartida será:

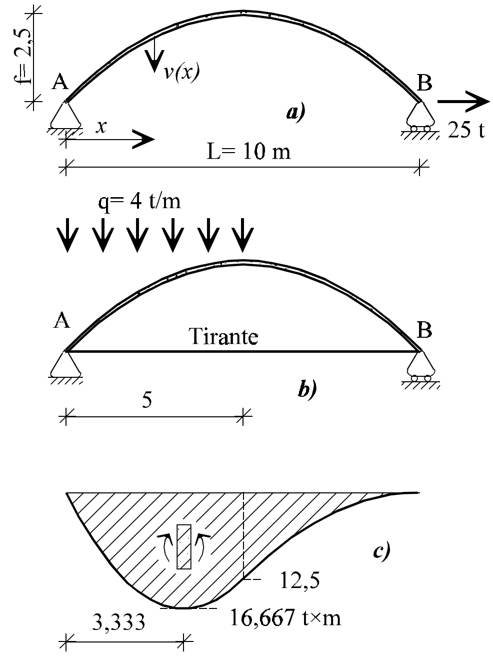


Figura 8.5
Estructura y resultados del problema 8.2

$$u_B^{(ext)}=\frac{1}{25}\int_{x=0}^{x=5}v(x)q(x)dx\;4\,\frac{0{,}0125}{25}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x}{10}\right)^5-\frac{2}{4}\left(\frac{x}{10}\right)^4+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{10}\right)^2\right]_0^5 10=0{,}002\ m$$

Con $H_B=-5\ t$, el movimiento horizontal del apoyo B del arco será:

$$u_B=-5\times u_B^{(H=1)}+u_B^{(ext)}=-0{,}001+0{,}002=0{,}001\ m$$

Para que el cable de $L=10\ m$, $E=2\times10^7\ t/m^2$, $T=5\ t$ se alargue esta misma cantidad es preciso que su área sea de $25\times10^{-4}\ m^2=25cm^2$. (Esta igualdad es la misma escrita en la ecuación hiperestática de más arriba.)

Las reacciones horizontales son $H_A=-H_B=5\ t$. La reacción vertical V_A será los 3/4 de la carga vertical total, 15 t, y la V_B, el 1/4 restante, 5 t, como en una viga biapoyada. La ley de momentos flectores tiene la siguiente expresión:

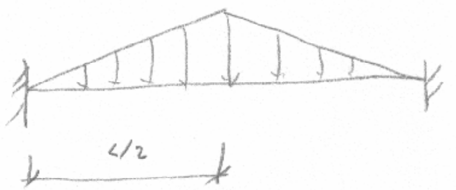
$$0\le x\le 5\quad M(x)=15x-5y-4\frac{x^2}{2}$$
$$5\le x\le 10\quad M(x)=5(10-x)-5y$$

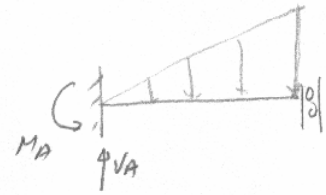
con

$$y=\frac{4f}{L^2}x(L-x)=x-0{,}1x^2$$

El aspecto aproximado de esta ley se muestra en la figura 8.5*c*.

22)





$$q(x) = -2q_0\frac{x}{L}\ ; \qquad EI\,v'''' = -2q_0\frac{x}{L}$$

$$EI\,v''' = -2q_0L\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 + C_1\right] \qquad v'''\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{8}$$

$$EI\,v'' = -2q_0L^2\left[\frac{1}{6}\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \frac{1}{8}\frac{x}{L} + C_2\right]$$

$$EI\,v' = -2q_0L^3\left[\frac{1}{24}\left(\frac{x}{L}\right)^4 - \frac{1}{16}\left(\frac{x}{L}\right)^2 + C_2\frac{x}{L} + C_3\right]$$

$$v'(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0\ ; \quad v'\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{5}{192}$$

$$EI\,v = -2q_0L^4\left[\frac{1}{120}\left(\frac{x}{L}\right)^5 - \frac{1}{48}\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{5}{384}\left(\frac{x}{L}\right)^2 + C_4\right]$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$v(x) = -\frac{q_0L^4}{960EI}\left[16\left(\frac{x}{L}\right)^5 - 40\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 25\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{7q_0L^4}{3840EI} \qquad M_A = -EI\,v''(0) = \frac{5}{96}q_0L^2$$

$$V_A = +EI\,v'''(0) = \frac{q_0L}{2} \qquad M_{max} = EI\,v''\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{32}q_0L^2$$