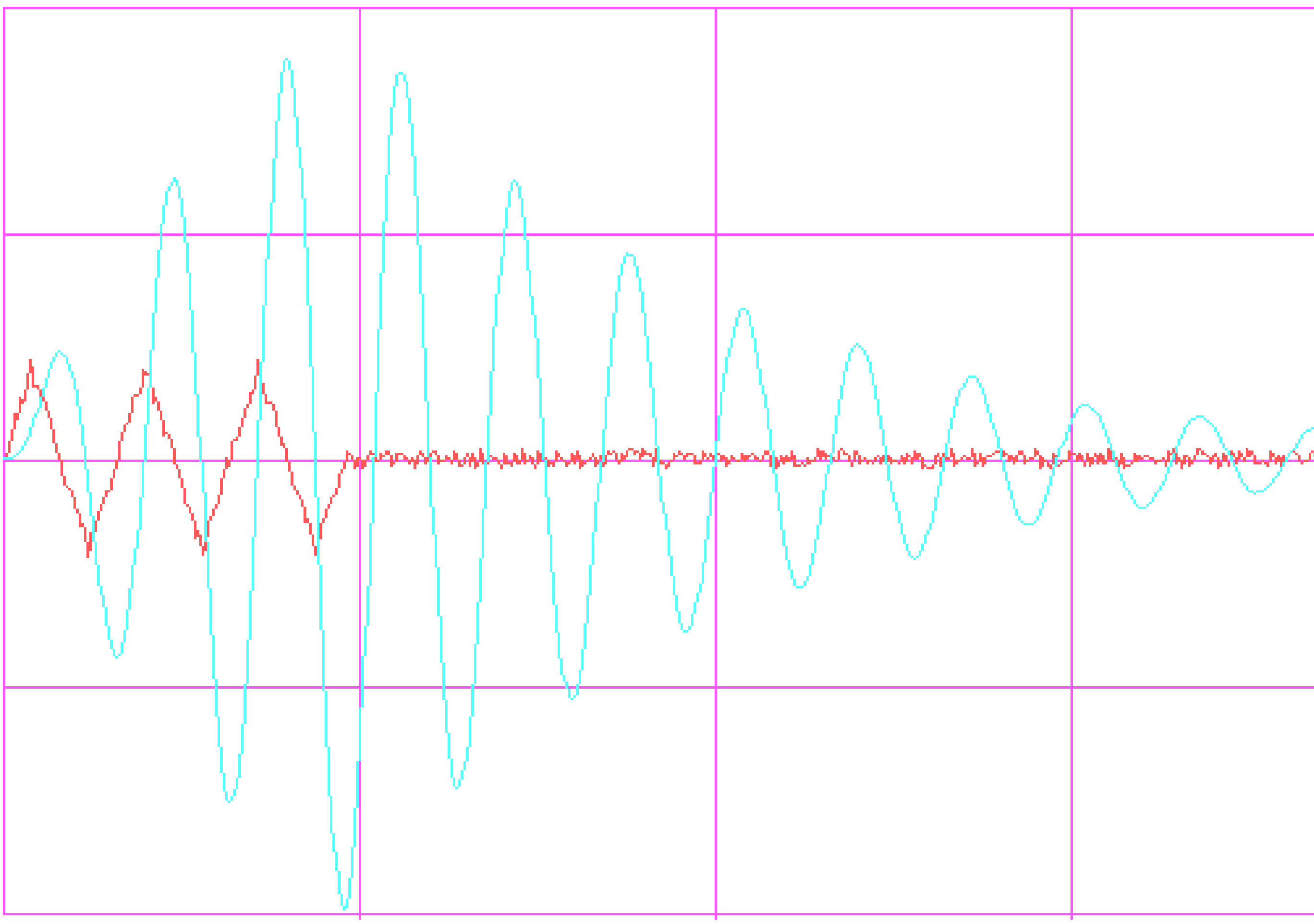
P rograma
E ducacional
A nalisis
DO minio de la
F recuencia



MANUAL
del
Programa Educacional de Análisis en el Dominio de la Frecuencia, PEADOF

1. OBJETO DEL PROGRAMA

La suficiencia de conocimientos de un estudiante en una materia científica o técnica se alcanza —y se comprueba— realizando problemas. En ellos el alumno parte de unos datos y llega a unos resultados aplicando sus conocimientos y realizando un número limitado de operaciones matemáticas. Desde la aparición hace más de 10 años de las calculadoras electrónicas de bolsillo se pueden proponer al estudiante problemas de cierta complejidad de cálculo, en los cuales el número de operaciones matemáticas alcance algunos cientos.

Hay problemas, sin embargo, cuya resolución exige un número de operaciones mucho más elevado, del orden de millones; para resolverlos se precisa del computador. La dificultad consiste entonces en que para ejecutar cualquier tarea el computador requiere un minucioso programa, lo cual le convierte en una herramienta didácticamente peligrosa que plantea un reto a la enseñanza. Si se recurre a programas comerciales, preparados casi siempre para funcionar con la menor intervención posible del usuario, el alumno se limita a introducir datos en una *caja negra* que le regurgita resultados, y no adquiere un conocimiento adecuado de los varios procesos lógico-matemáticos que el programa selecciona internamente dependiendo de ciertas condiciones. Pretender lo contrario, que el estudiante desarrolle sus propios programas de cálculo, no es realista, por el corto periodo de aprendizaje de cada disciplina y porque las técnicas numéricas que se aplican en cada tipo de análisis para que el computador trabaje eficientemente suelen ser demasiado especializadas.

Así pues, si no se dispone de un programa educacional los problemas que se pueden proponer al alumno son meramente descriptivos: enumerar la secuencia de transformaciones que la resolución de los problemas requiere. Se pierde así la valiosa experiencia que supone superar las dificultades imprevistas en la teoría, sufrir los inconvenientes y gozar las ventajas de los diversos caminos de resolución. Sin el ejercicio práctico se adquiere el "prejuicio tan extendido entre los estudiantes de que es idéntico el «saber» al «poder hacer»" (Wittenbauer).

Para solventar estos inconvenientes en un área concreta se ha desarrollado el Programa Educacional de Análisis en el Dominio de la Frecuencia, PEADOF. Sus características fundamentales son:

1) realiza bloques de operaciones complejas (como la transformada de Fourier o integrales de convolución) de manera rápida, lo cual permite resolver problemas que sólo mediante ordenador pueden abordarse, y

2) lo hace interactivamente, mediante órdenes, lo cual obliga al usuario a saber la secuencia correcta de todas las operaciones a ejecutar para la resolución de su problema.

PEADOF está orientado especialmente a la realización de ejercicios de Dinámica de Estructuras tales como:

— cálculo de respuestas de una estructura a fuerzas dinámicas o movimientos sísmicos,

— obtención de funciones de respuesta frecuencial de una estructura,

— determinación de espectros de respuestas,

— simular la realización de análisis experimental, que actualmente no podemos realizar por carecer del equipamiento material necesario.

Las órdenes disponibles en PEADOF permiten la resolución de los problemas anteriores por integración de sus ecuaciones tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. Además, permite la visualización gráfica en pantalla de las funciones resultantes mediante un buen número de tipos de gráficos (Bode, Nyquist, etc.), hacer "zooms", etc.

2. FICHEROS DE ENTRADA/SALIDA

2.1 Designación

a) Internamente los ficheros de PEADOF se designan por tres caracteres, simbólicamente *FnV*:

— el primer caracter es la inicial de la función:

* ***X*** para las funciones de excitación, que normalmente contendrán datos en forma de histogramas de fuerzas aplicadas o de movimientos impuestos en un punto de una estructura,

* ***R*** para las funciones de respuesta, que normalmente contendrán resultados con el mismo aspecto que los datos de los ficheros X, y

* ***H*** para las funciones de respuesta frecuencial (FRF) que se designan por H(ω).

— el segundo caracter es el número entero ***1****,* ***2*** *ó* ***3***, y

— el tercero caracter indica cuál es la variable independiente: ***T*** para el tiempo, ***W*** para la frecuencia.

PEADOF maneja, pues, ficheros con los nombres internos *XnT, XnW, RnT, RnW, HnT, HnW* con *n* un número entero de 1 a 3.

b) Externamente a estos nombres se les añade una extensión de tres caracteres (*".ext"*) especificada por el usuario al arrancar el programa. (Esto permite que varios usuarios trabajen en red sin "machacarse" los ficheros entre ellos.) Si a un módulo del programa se le pide (de forma explícita o implícita) leer del fichero *X2T*, deberá existir en el disco de lectura por defecto el fichero *X2T.ext* o se tendrá un mensaje de error. Si un módulo dice que ha creado el fichero *R2T*, en el disco aparecerá realmente el fichero *R2T.ext*.

2.2 Formato

Todos los ficheros tendrán uno de los dos formatos siguientes: formato *T* o formato *W*, según contengan funciones temporales o frecuenciales.

Los ficheros *T* contienen la siguiente información:

— En la primera línea: las variables **NOMBRE** del trabajo y **EXT**ensión de los ficheros, con formato alfanumérico A20,A3. El programa utiliza la variable NOMBRE como referencia del trabajo y para advertir si en una ejecución se utilizan ficheros correspondientes a distintos trabajos. La extensión EXT permite conservar en disco ficheros que, con el mismo nombre interno, corresponden a trabajos diferentes.

— En la segunda línea: los parámetros **DT**, **NT**, con formato E15.6, I15. DT es el incremento de tiempo elegido para el análisis y NT el número de puntos utilizados para definir *todos* los histogramas del análisis. Ciertos módulos del programa comprueban estos parámetros para no permitir la ejecución incorrecta de operaciones entre ficheros creados en condiciones heterogéneas.

— En las NT líneas restantes: dos cantidades reales que definen un punto, en cada línea, del histograma temporal; con formato 2E15.6. La primera cantidad es la **parte real** y la segunda la **parte imaginaria** del histograma en el instante t=(L-3)*DT, siendo L el número de la línea (contado desde el encabezamiento). Cuando el histograma es un dato de partida sus partes imaginarias serán cero en todos los puntos. En cambio, si el histograma es el resultado de un cierto análisis, la parte imaginaria no será exactamente cero, en general, debido a errores de redondeo (pero su orden de magnitud deberá ser varios grados menor que el de la parte real).

Los ficheros *W* contienen la siguiente información:

- En la primera línea: las variables **NOMBRE** y **EXT**, igual que en un fichero *T*.
- En la segunda línea: **DT** y **NT**, igual que en un fichero *T*.
- En las NT líneas siguientes: cuatro cantidades en cada una, con formato 4E15.6, que son: **parte real, parte imaginaria, amplitud y fase** (en grados) de un punto de una función frecuencial. Estas cantidades corresponden a la frecuencia $f=(L-3)*DF$ (en hercios) siendo L el número de la línea (contado desde el encabezamiento). DF es el incremento en frecuencia, $DF=(DT*NT)^{-1}$. Hay que recordar, sin embargo, que a partir de la frecuencia de Nyquist, $FNYQ=(2*DT)^{-1}$, la interpretación ha de hacerse de manera diferente.

3. GENERALIDADES SOBRE EL USO DE PEADOF

Se invoca al programa para su ejecución tecleando su nombre, PEADOF, seguido por la tecla de entrada, que aquí simbolizaremos "▸". El programa da inmediatamente el siguiente mensaje:

Pd> Ejecuta INICIA o LEER

Los tres primeros caracteres "Xx>" de un mensaje indican simplemente el módulo del programa que lo emite. *Pd*> corresponde al módulo principal de <u>P</u>EA<u>D</u>OF.

Para efectuar cualquier operación con PEADOF es preciso definir cuatro variables *de ambiente* que se mantendrán durante toda la ejecución, hasta que se cambien ejecutando LEER o INICIA de nuevo. Estas variables son: el **NOMBRE** del trabajo, la **EXT**ensión de los ficheros a crear, el intervalo de muestreo **DT** con que se definen todos los histogramas temporales y el número total de puntos **NT** que estos histogramas contienen. Todos los ficheros creados por PEADOF reflejan las variables de ambiente con las que fueron creados (ver el apartado *2.2 Formatos*) y el programa no permite transformaciones entre ficheros creados con parámetros DT, NT distintos.

Los ficheros frecuenciales se crean con el incremento de frecuencia $DF=(DT*NT)^{-1}$ hercios (aunque este valor no se guarda en ellos, sino sólo los valores DT, NT que lo determinan). Estos ficheros frecuenciales cubren aparentemente desde la frecuencia *0* hasta la *1/DT*, pero desde *FNYQ=1/(2*DT)* en adelante sus contenidos están alterados por el fenómeno del *aliasing*. En la práctica se interpreta que las frecuencias van de *0* a $1/(2*DT)$ y desde $-1/(2*DT)+DF$ a $-DF$.

Ejecutando INICIA se definen nuevas variables de ambiente, mientras que ejecutando LEER se fijan las que existían cuando el fichero a leer fué creado.

`Todas las órdenes a PEADOF tienen que ser tecleadas con letras mayúsculas`

4. ORDENES EN PEADOF

En la versión actual, PEADOF obedece las siguientes órdenes (catalogadas en orden alfabético):

CDINIC. Permite cambiar las condiciones iniciales $u(0)$, $\dot{u}(0)$ con que fué escrito un fichero *T* siempre que se sepa cuáles eran las características f_n, ζ, k del oscilador correspondiente. Lo que hace esta orden es ir al fichero __*T* indicado, leer el desplazamiento inicial $u(0)$ de la tercera línea del fichero y $u(\Delta t)$ de la cuarta, y estimar la velocidad inicial de la siguiente manera:

$$\dot{u}(0) = \frac{u(\Delta t) - u(0)}{\Delta t}$$

A continuación el programa le suma al histograma del fichero el siguiente transitorio:

$$) = -\left[u(0)\cos\omega_a t + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_a} + \zeta\, u(0)\right) sen\omega_a t\right] e^{-\zeta\omega_n t} \qquad \left(\omega_n = 2\pi f_n \;;\; \omega_a = \omega_n\sqrt{\right.$$

CIRC. Ajusta una circunferencia por el método de los mínimos cuadrados a la función compleja $\omega H(\omega)$ en el intervalo de frecuencias que se especifique. El programa lee la función $H(\omega)$ de un fichero *HnW* y la multiplica internamente por ω, de forma que el contenido del fichero no se altera. El resultado son las coordenadas *(a,b)* del centro de la circunferencia y su radio. Se utiliza para determinar la amplitud máxima de una función $H(\omega)$ en resonancia y para estimar el grado de acoplamiento (cabalgamiento) del modo en cuestión.

COPIAR. Sirve para copiar el contenido de un fichero *T* o *W* en otro fichero, que debe ser del mismo tipo *T* o *W*.

DOS. Permite salir temporalmente de la tutela de PEADOF para ejecutar una sola orden del sistema operativo.

DUHAM. Permite realizar la integral de Duhamel

$$r(t) = \frac{1}{m\omega_a}\int_0^t x(\tau)\, e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} sen\omega_a(t-\tau)\, d\tau$$

El módulo leerá *x(t)* de un cierto fichero *XnT* y escribirá la respuesta *r(t)* en el correspondiente *RnT*. La integral se realiza *NT-1* veces, desde *t=DT* a *t=TMAX=(NT-1)*DT*. El primer punto se rellena con *r(0)=0*. Como la ejecución de todo este cálculo puede ser lenta con algunos procesadores, el programa indica en pantalla el valor de *t* para el cual está trabajando.

El módulo solicita los parámetros f_n, ζ, k del oscilador y que el usuario declare si la función contenida en el fichero de entrada es una fuerza (opción por defecto) o una aceleración (opción si se teclea "A"). En este último caso todos los valores de la excitación se multiplican por $m=k/(2\pi f_n)^2$.

D/DT. Esta orden reemplaza la función *x(t)* contenida en un fichero del tipo T por su derivada, definida de la siguiente manera:

$$\dot{x}_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}$$

ESTADO. Permite preguntar al programa cuáles son actualmente las variables de ambiente. Para cambiarlas habrá que ejecutar INICIA o LEER.

FIN. Sirve para salir del programa PEADOF.

GENHW1. Genera la FRF *H(ω)* correspondiente a un oscilador con un solo grado de libertad, escribiéndola en un fichero *HnW*. Los datos solicitados son el número *n* del fichero y las características *m, ζ, k* del oscilador.

$$H(f) = \frac{1}{k}\,\frac{1-\left(\dfrac{f}{f_n}\right)^2 - 2i\zeta\dfrac{f}{f_n}}{\left[1-\left(\dfrac{f}{f_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\dfrac{f}{f_n}\right]^2} \qquad \left(i=\sqrt{-1}\right)$$

La FRF se evalúa en los intervalos de frecuencias *[0,FNYQ]* y *[-FNYQ+DF,-DF]*, con incrementos *DF*, siendo: $DF=(DT*NT)^{-1}$, $FNYQ=(2*DT)^{-1}$.

GENHW2. Genera las FRF's $H_{11}(\omega)$, $H_{22}(\omega)$, $H_{12}(\omega)$ correspondientes a un oscilador con dos grados de libertad, y las coloca en los ficheros *H1W*, *H2W* y *H3W* respectivamnete. Los datos de entrada son: la matriz de masa, la matriz de rigidez y las fracciones de amortiguamiento modal.

Para generar las $H_{jk}(\omega)$ este módulo necesita determinar previamente las frecuencias naturales, los modos de vibración, las masas y rigideces modales y la matriz de amortiguamiento proporcional (consistente con las fracciones de amortiguamiento impuestas). Por ello habrá ocasiones en que se quiera ejecutar esta orden sólo para obtener los resultados intermedios mencionados.

Las frecuencias naturales resultan de la ecuación

$$\begin{vmatrix} k_{11}-\omega_n^2 m_{11} & k_{12}-\omega_n^2 m_{12} \\ k_{21}-\omega_n^2 m_{21} & k_{22}-\omega_n^2 m_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad \left(f_n=\frac{\omega_n}{2\pi}\right)$$

y los modos de vibración de

$$\begin{pmatrix} k_{11}-\omega_n^2 m_{11} & k_{12}-\omega_n^2 m_{12} \\ k_{21}-\omega_n^2 m_{21} & k_{22}-\omega_n^2 m_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

con normalización a longitud unidad, $\phi_{1n}=\cos\theta_n$, $\phi_{2n}=\mathrm{sen}\,\theta_n$. Las masas, rigideces modales y amortiguamientos modales son

$$m_n^* = m_{rs}\phi_{rn}\phi_{sn}$$

$$k_n^* = k_{rs}\phi_{rn}\phi_{sn}$$

$$c_n^* = 2m_n^*\zeta_n\omega_n$$

La matriz de amortiguamiento se recobra mediante

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}^{-T} \begin{pmatrix} c_1^* & 0 \\ 0 & c_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

A partir de los resultados anteriores se forma la matriz de flexibilidad dinámica de coeficientes $z_{rs}=-\omega^2 m_{rs}+i\omega c_{rs}+k_{rs}$. Las funciones $H_{jk}(\omega)$ resultan de los sistemas

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyas soluciones, por Cramer, son

$$H_{11}(\omega) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z_{21} \\ 0 & z_{22} \end{vmatrix}}{|Z|} = \frac{z_{22}}{z_{11}z_{22}-z_{12}^2} \quad ; \quad H_{12}(\omega) = H_{21}(\omega) = \frac{-z_{21}}{|Z|} \quad ; \quad H_{22}(\omega) = \frac{z_{1}}{|Z|}$$

GENRB. Genera una función temporal de "ruido blanco", escribiéndola en un fichero *XnT*. Un "ruido blanco" es un histograma cuyo espectro de Fourier es de amplitud constante hasta una cierta frecuencia de corte f_c, y cero para frecuencias superiores. Su expresión es:

$$rb(t) = \int_{-f_c}^{f_c} 1 . e^{2\pi ift} df = \left. \frac{e^{2\pi ift}}{2\pi it} \right]_{-f_c}^{f_c} = 2f_c \frac{sen 2\pi f_c t}{2\pi f_c t}$$

En $t=0$ la función es de la forma $0/0$. Tomando límites (regla de L'Hopital o primer término del desarrollo en serie) se llega a que en $t=0$ la función vale $2f_c$. Este es el valor máximo de la función, la cual para t>0 se propaga en forma de oscilaciones que se amortiguan rápidamente (ver figura 7).

Para normalizar su máxima amplitud a 1 y para no empezar con un salto unitario en $t=0$, PEADOF define la función ruido blanco de la siguiente manera:

$$rb(t) = \frac{sen 2\pi f_c (t-t_o)}{2\pi f_c (t-t_o)} \quad ; \quad t_o = \frac{n_p}{f_c}$$

La traslación $t_o=n_p/f_c$ la fija el usuario seleccionando el número de periodos n_p que se traslada la función hacia la derecha. Con ello se consigue que la función arranque con un desplazamiento inicial nulo y una velocidad inicial pequeña, tanto más pequeña cuanto mayor sea n_p, para que no suponga un fuerte impacto inicial. La función saldrá aproximadamente centrada en el tiempo si n_p se aproxima a la parte entera de $(NT-1)*DT*f_c/2$, siendo f_c la frecuencia de corte seleccionada para el ruido blanco.

Los datos que pide este módulo son el número *n* del fichero *XnT* a generar, la frecuencia de corte f_c y n_p. Para éste último se recomienda la mitad del valor que centraría la función en el intervalo *[0,TMAX]*

GENXAL. Genera los NT valores de una función *x(t)* aleatoria, de amplitudes entre -1 y +1, escribiéndola en un fichero *XnT*.

GENXT. Genera una función temporal cualquiera escribiéndola en un fichero *XnT*.

En la versión actual las funciónes generadas sólo pueden ser de la forma

$$\left[e^{-\zeta\omega_n t} sen\left(\omega_a t+\phi\right)\right] V(t) \quad ; \quad \left(\omega_n = 2\pi f_n \quad ; \quad \omega_a = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

siendo V(t) una función *ventana* lineal por tramos. Seleccionando $f_n=0$ se genera solamente la función *ventana*.

Los datos para este módulo son: el número *n* del fichero *XnT*, las características f_n, ζ, ϕ de la onda armónica (ϕ fase en grados) y la definición por tramos de la *V(t)*. Los tramos para definir esta última pueden ser trapezoidales o "nulos". La opción de tramo trapezoidal se selecciona mediante una "*T*"; seguidamente el módulo pide A_o, T_1 y A_1 que son, respectivamente, la amplitud en el instante previo, la coordenada *t* del nuevo instante y su amplitud. Un tramo nulo, de amplitud 0, se selecciona con "0" y se define dando el instante donde acaba (empezaba en el anterior).

En el apartado 5 se pueden encontrar algunos ejemplos de cómo generar excitaciones.

GRAF. Genera un gráfico en pantalla. El dato pedido es el nombre interno de un fichero. Si éste es de tipo *T* lo ejecutará directamente. Si es de tipo *W* solicitará que el usuario seleccione un tipo de gráfico.

Una vez mostrado el gráfico en pantalla se puede seguir mediante ▸, pedir un "zoom" pulsando Z▸ o solicitar una escala fija en ordenadas mediante E▸. En el segundo caso el programa pide los extremos X_{min}, X_{max} del intervalo y en el tercero los valores extremos Y_{min}, Y_{max} del gráfico.

GRAFL. Muestra en pantalla un gráfico de $|F(\omega)|$ en escala logarítmica doble, siendo F(ω) una función contenida en un fichero tipo *W*. (El valor correspondiente a ω=0 se omite).

GRAF2. Igual que GRAF, pero mostrando en pantalla dos gráficos superpuestos de ficheros del mismo tipo (ambos *T* o ambos *W*). Se utiliza fundamentalmente para comparar resultados obtenidos por procedimientos distintos. Es útil, sobre todo, para valorar la calidad del ajuste de una función *sintetizada* analíticamente con parámetros estimados.
HW*XW. Realiza el producto complejo de las funciones contenidas en los ficheros *HnW* y *XnW* y pone el resultado en el fichero *RnW*. Comprueba si los nombres en los dos ficheros coinciden, y emite un mensaje de advertencia si no es así. Comprueba también si los parámetros DT y NT son iguales en los dos ficheros, y detiene la ejecución emitiendo un mensaje de error si no es así.

El único dato es el número *n* que fija los tres ficheros *HnW, XnW, RnW*.

INICIA. Inicializa las variables de *ambiente* NOMBRE, EXT, DT y NT. Estas variables permenecerán en vigor hasta que se cambien mediante una nueva orden INICIA o una orden LEER. Debe ser la primera orden a ejecutar cuando se inicia un trabajo nuevo.

El número de puntos en el tiempo NT debe ser de la forma 2^n para que pueda efectuarse la transformada rápida de Fourier de manera eficiente (la orden TRFOUR comprueba esta condición y aborta la ejecución si no se cumple). NT debe tomar, pues, alguno de los siguientes valores: 2, 4 , 8, 16, 32, 64, 128, 256 ó 512, si bien en la práctica sólo los tres últimos parecen razonables. Aumentando el número de puntos de descripción de las funciones se favorece la precisión tanto en el dominio del tiempo (alargándolo) como en el de la frecuencia (introduciendo más puntos intermedios).

DT marca la resolución en el tiempo. Es muy importante, sin embargo, observar que mucha resolución en el dominio del tiempo (DT pequeño) lleva a poca resolución en el dominio de la frecuencia, DF=(DT*NT)$^{-1}$, y viceversa. La frecuencia máxima alcanzada es FNYQ=(2*DT)$^{-1}$ y el intervalo [0,FNYQ] se subdivide mediante incrementos DF.

LEER. Lee las variables de ambiente con las que fué creado un fichero y las asume hasta que se cambien de nuevo. (En realidad solo lee las dos primeras líneas del fichero pedido.) Sirve para reanudar un trabajo anterior del cual quedan ciertos ficheros en el disco. El módulo pide el nombre de un fichero PEADOF con su extensión. (Es el único caso en que hay que especificar la extensión de un fichero requerido por PEADOF.)

OPERA. Proporciona un menú de las posibles operaciones matemáticas a efectuar con los contenidos de uno o más ficheros; como, por ejemplo, multiplicar el contenido de un fichero *W* por $i\omega$ (que equivale a derivar en el dominio del tiempo), o hallar el cociente de dos ficheros *W*, (que es la operación necesaria para calcular una $H(\omega)$), etc. Los datos que el programa solicita varían según el tipo de operación seleccionada.

SAL o **SALIR**. Realizan la misma función que FIN.

TRFOUR. Solicita la ejecución de la transformada rápida de Fourier. La transformada directa consiste en realizar:

$$X(f) = \int_{o}^{t_{\max}} x(t)\, e^{-i2\pi ft}\, dt$$

Su entrada es un fichero *_nT* y su salida el correspondiente *_nW*. La transformada inversa consiste en realizar:

$$x(t) = \int_{-f_{\max}}^{f_{\max}} X(f)\, e^{i2\pi ft}\, df$$

en cuyo caso la entrada será un fichero *_nW* y la salida el *_nT* correspondiente.

Los datos a introducir son el parámetro *-1* o *+1* según se solicite transformada directa o inversa (que recuerdan al usuario el signo del exponente en la transformación solicitada) y el nombre del fichero de partida.

Naturalmente, el programa realiza una transformada discreta a incrementos fijos. La transformada directa es:

$$X(f = k\Delta f) = X_k = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N} \right) \Delta t \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1)$$

La transformada inversa es

$$x(t = n\Delta t) = x_n = \left(\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i2\pi nk/N} \right) \Delta f \qquad (n = 0, 1, \ldots, N-1)$$

?. Sirve para pedir al programa el listado de las órdenes que puede ejecutar.

$. Este caracter al principio de una línea hace que el programa la ignore. Se utiliza para incluir comentarios en ficheros de órdenes que se procesan en *batch*.

5. EJEMPLOS DE USO DE PEADOF

5.1 Ejemplo 1: Factor de amplifiación dinámica

Queremos determinar el factor de amplificación dinámica de una fuerza impulsiva cuyo histograma sea un lóbulo de seno (medio periodo) sobre un oscilador de periodo los 4/3 de la duración del histograma.

Sea *t=0,1 seg* la duración del impulso. Corresponderá al primer lóbulo de una función seno de periodo *T=0,2 seg*, *f=5 Hz*. El oscilador será, pues, de periodo *T=0,4/3*, *f=7,5 Hz*. Para representar con 10 puntos el lóbulo necesitamos *DT=0,01*. Tomaremos *NT=512* que es el máximo valor aceptado por el programa.

La tabla 1 muestra la secuencia de órdenes a PEADOF.

Este ejercicio (y cualquier otro) se puede ejecutar también en *batch* de la siguiente manera:

1) Se construye con un editor cualquiera un fichero ASCII (llamémosle FAD.ORD) con las órdenes de la tabla 1, excepto la primera. (Conviene prescindir también de las órdenes GRAF.)

2) Se ejecuta PEADOF<FAD.ORD.

En pantalla van apareciendo desordenadamente los mismos mensajes que se dan en ejecución interactiva, y en el disco aparecen los ficheros *X1T.DAT* y *R1T.DAT* resultados del ejercicio. A continuación se ejecuta PEADOF interactivamente para ver los gráficos, reiniciando con la orden LEER.

Tabla 1

Cálculo de un factor de amplificación dinámica

ORDEN	Comentario
PEADOF▸	Llamada al programa
INICIA▸ EJEMPLO 1▸ DAT▸ .01▸ 512▸ ▸	Selección de variables de "ambiente": NOMBRE, EXT, DT, NT, (vale).
GENXT▸ 1▸ 5▸ 0▸ 0▸ T▸ 1 .1 1▸ 0▸ 6▸	Generamos en X1T la función medio seno de la figura 1 definiendo una función armónica, f_n=5, sin amortiguamiento y con fase nula, y cortándola por una ventana de valor 1 entre t=0 y t=0,1, y 0 desde el valor anterior hasta t=6 (mayor que TMAX).
GRAF▸ X1T▸ Z▸ 0,.2▸ ▸	Comprobaremos si la función fue generada correctamente pidiendo un gráfico de su fichero. Aparece figura. Pedimos "zoom." Aparece la figura 1. Continuar.
DUHAM▸ 1▸ 7.5▸ 0▸ 1▸ ▸	Determinaremos la respuesta a la excitación en X1T del oscilador de 7,5 Hz, sin amortiguamiento y con rigidez 1 (1), (fuerza).
GRAF▸ R1T▸ Z▸ 0,.2▸ ▸	Pedimos una gráfica del resultado en R1T. Aparece figura. Solicitamos "zoom." Aparece la figura 2 (2). Continuar.
FIN▸	Concluir.

(1) Para que la respuesta estática $u(t)_{max}/k$ sea unidad.

(2) El factor de amplificación dinámica se ve que es 1,76. El exacto es 1,77.

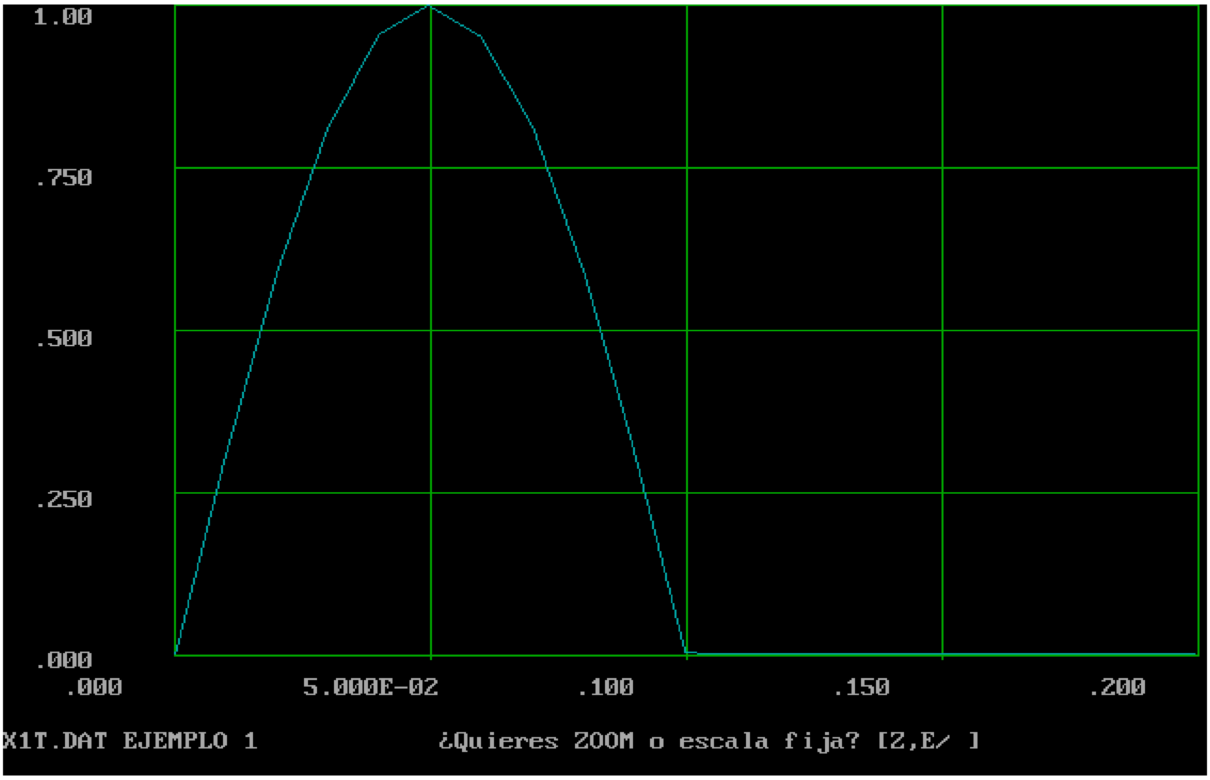


Figura 1
La excitación es un impacto con forma de un lóbulo de senc

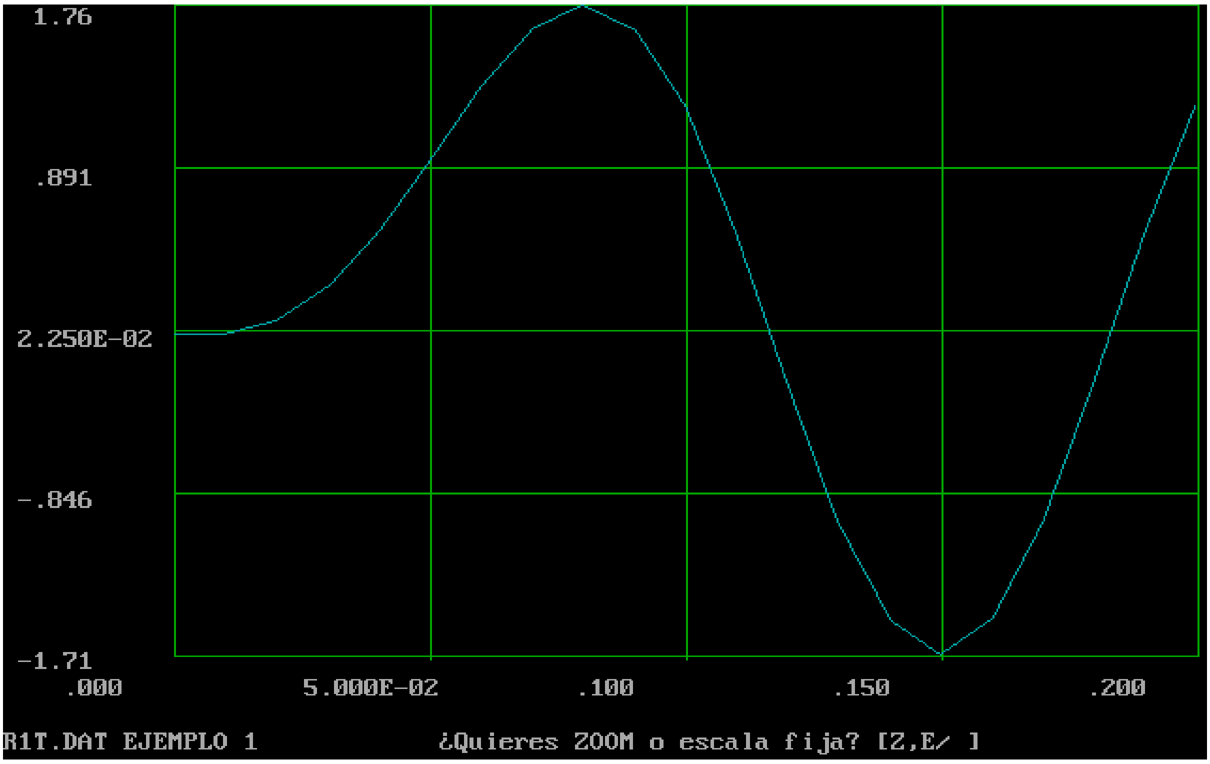


Figura 2
Respuesta del oscilador al impacto de la figura 1

5.2 Ejemplo 2: Punto del espectro de respuestas

Queremos determinar el máximo desplazamiento relativo que sufre un oscilador de frecuencia 2,5 Hz y 5% de amortiguamiento cuando su base sufre el acelerograma de la figura 2.

(Con este dato se podrá determinar la fuerza elástica máxima en el oscilador, que será $k.u_{max}$. Es de notar que se ha elegido el oscilador cuya frecuencia natural coincide con la frecuencia fundamental del acelerograma; la respuesta máxima de osciladores con otra frecuencia natural deberá será menor. La curva que une los puntos $u_{max}(f,\zeta=0,05)$ es el espectro de respuestas (desplazamiento relativo para un amortiguamiento del 5%) del acelerograma dado. Sólo pretendemos obtener el punto supuestamente más alto. El acelerograma muestra una aceleración máxima de aproximadamente 0,5*g*, que correspondería a un terremoto bastante severo, si bien de corta duración, con una banda de frecuencias centrada en torno a los 2,5 Hz, pero más estrecha que la de un terremoto típico.)

Realizaremos el análisis por dos procedimientos.

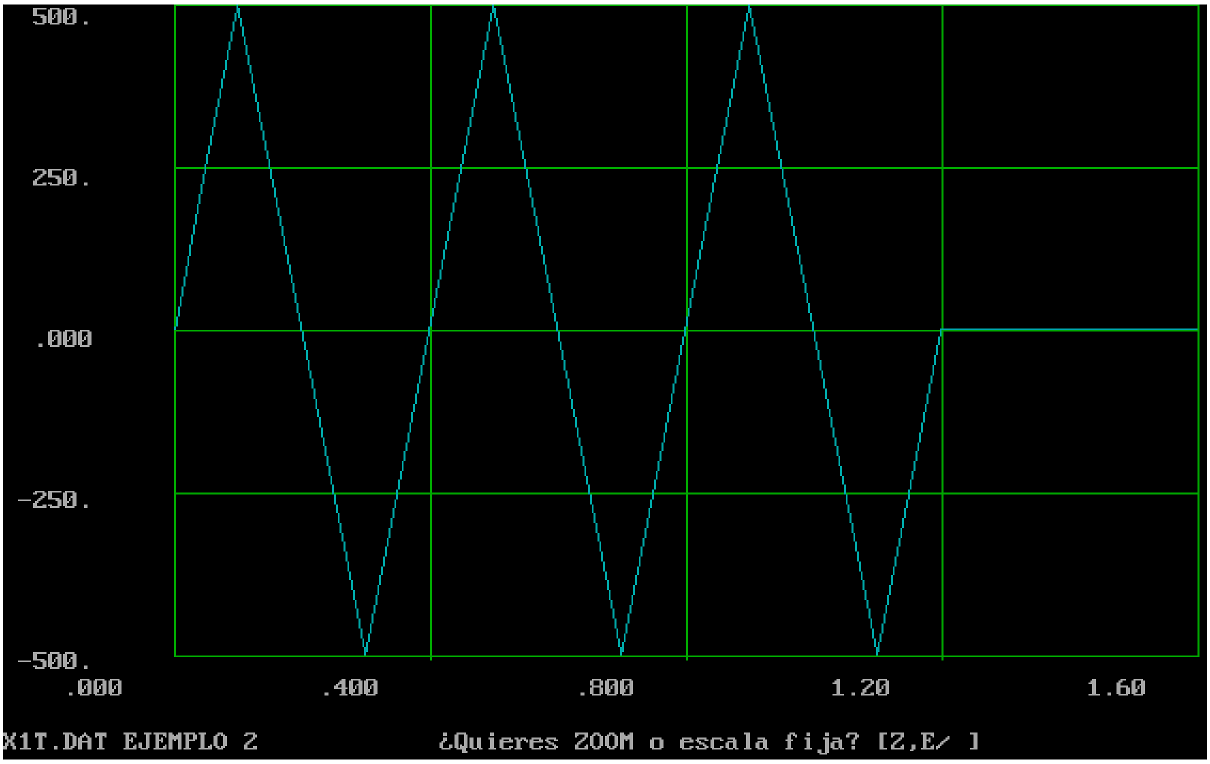


Figura 3
Acelerograma de un supuesto movimiento sísmico, $a_{max}=½g$

Análisis en el dominio del tiempo.

Cuando la excitación corresponde a un movimiento de la base la respuesta es independiente de la magnitud de la masa *m*, o de la rigidez *k*, siempre que $k/m=\omega_n^2$, de lo cual se ocupa el programa.

La tabla 2a muestra la secuencia de operaciones que resuelve el problema en el dominio del tiempo. El valor buscado del espectro es el máximo, en valor absoluto, de la figura 4.

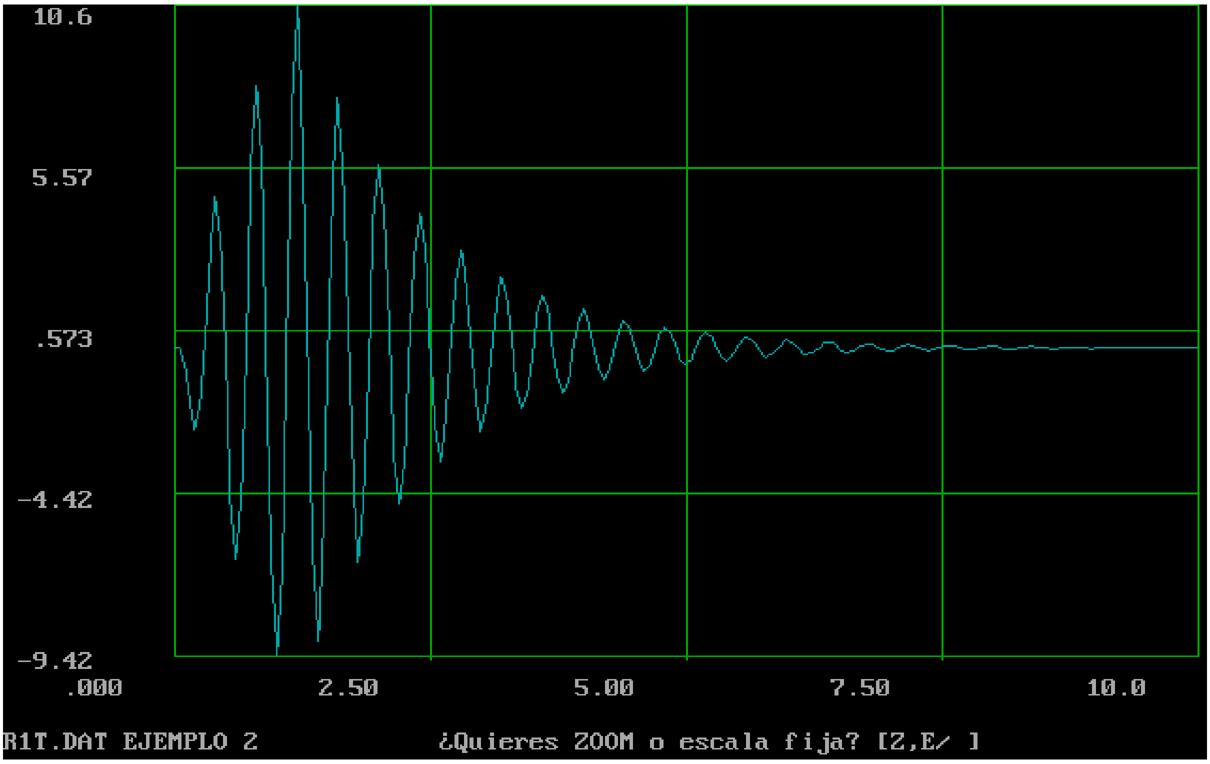


Figura 4
Respuesta de un oscilador al acelerograma de la figura 3

Tabla 2a
Obtención de un punto del espectro de respuesta.
Análisis en el dominio del tiempo

ORDEN	Comentario
PEADOF▸	Llamada al programa
INICIA▸ EJEMPLO 2▸ DAT▸ .05▸ 512▸ ▸	

GENXT▸ 1▸ 0▸ T▸ 0 .1 1▸ T▸ 1 .3 -1▸ T▸ -1 .5 1▸ T▸ 1 .7 -1▸ T▸ -1 .9 1▸ T▸ 1 1.1 -1▸ T▸ -1 1.2 0▸ 0▸ 26▸	Generamos una excitación afín a la de la figura 3, en X1T, frecuencia nula. Ventana trapezoidal... ... y cero todo el resto hasta TMAX (o pasado éste).
GRAF▸ X1T▸ Z▸ 0,1.6▸ ▸	Nos cercioramos de haber generado bien la función anterior. Aparece figura. Seleccionamos "zoom." Aparece figura. Continuar.
OPERA▸ T▸ 1▸ X1T▸ 500▸	La figura resultante es satisfactoria pero fuera de escala. Multiplicaremos su amplitud por ½g=500.
GRAF▸ X1T▸ Z▸ 0,1.6▸ ▸	Comprobamos la nueva figura. Aparece figura. Aparece la figura 3. Continuar.
DUHAM▸ 1▸ 2.5▸ .05▸ 1▸ A▸	Respuesta del oscilador... a la excitación en X1T, del oscilador con f_n=2,5 Hz, 5% de amortiguamiento, y rigidez 1, a una aceleración de la base.
GRAF▸ R1T▸ Z▸ 0,10▸ ▸	Visualizacón de resultados. Aparece figura. Aparece la figura 4. [1] Continuar.
SALIR▸	Fin de la ejecución.

[1] El gráfico muestra que el desplazamiento relativo máximo es de 10,6 cm. Para valorar el orden de magnitud calculamos que para una excitación armónica con la misma frecuencia y duración indefinida el desplazamiento relativo máximo teórico es $m.\ddot{u}_{max}/2k\zeta = \ddot{u}_{max}/2\omega_n^2\zeta = 20{,}26$ cm.

Análisis en el dominio de la frecuencia

Supongamos que queremos reanudar el cálculo anterior para efectuarlo en el dominio de la frecuencia. Ejecutaremos las órdenes mostradas en la tabla 2b. El valor buscado del espectro es el máximo, en valor absoluto, de la figura 5.

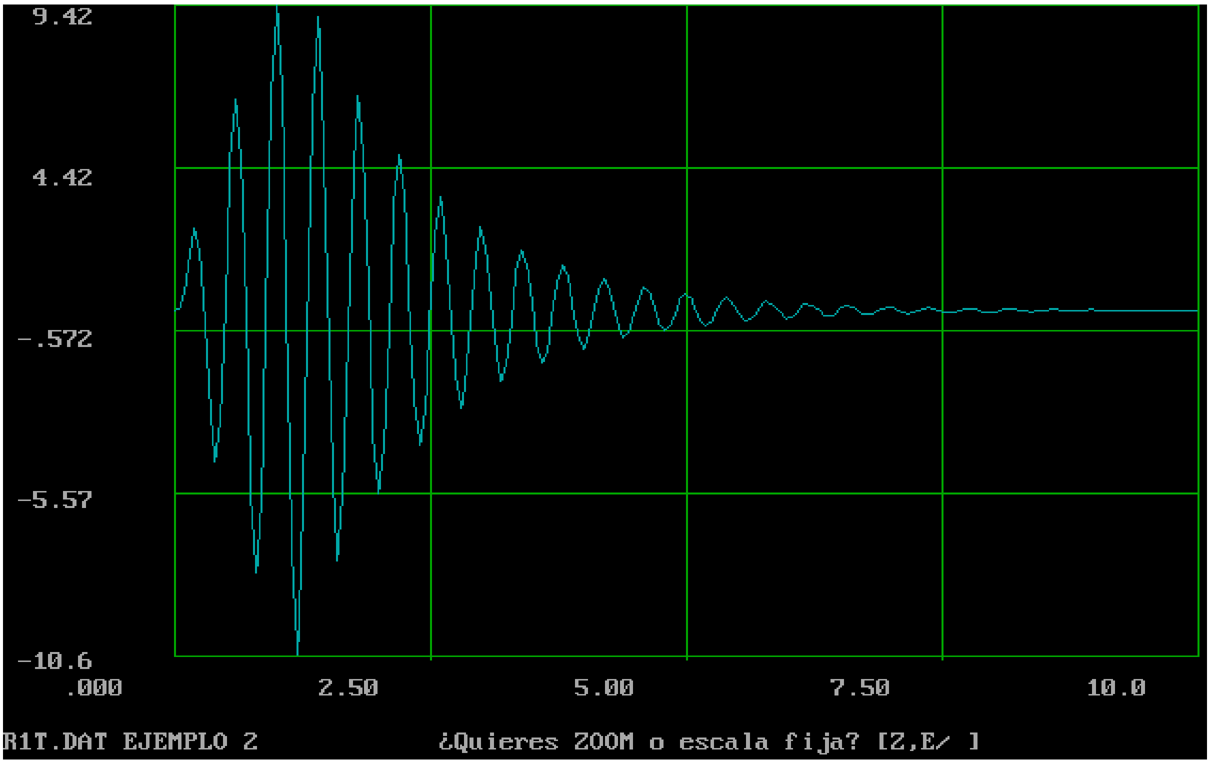


Figura 5
Respuesta de un oscilador al acelerograma de la figura 3

Tabla 2b

Obtención de un punto del espectro de respuestas.
Análisis en el dominio de la frecuencia

ORDEN	Comentario
PEADOF▸	Llamamos al programa.
LEER▸ X1T.DAT▸	Reanudamos el análisis anterior, con los mismos parámetros.
GRAF▸ X1T▸ Z▸ 0, 1.6▸ ▸	Nos cercioramos de haber cogido la excitación correcta. Aparece figura. Aparece la figura 3.
GENHW1▸ 1▸ 2.5▸ .05▸ 246.74▸	Generamos la H(ω) del oscilador en el fichero H1W, f_n, ζ, y tomamos $k=\omega_n^2$ [1]

TRFOUR▸ -1▸ X1T▸	Transformada de Fourier directa del fichero X1T. El resultado irá a X1W
HW*XW▸ 1▸	Realizamos H(ω)*X(ω), que están en los ficheros H1W y X1W. El resultado irá a R1W
TRFOUR▸ +1▸ R1W▸	Transformada de Fourier inversa del fichero R1W. El resultado irá a R1T (2)
GRAF▸ R1T▸ Z▸ 0,10▸ ▸	Visualización de resultados. Aparece figura. Aparece la figura 5. (3)
SALIR▸	Fin de la ejecución

(1) En este análisis no podemos especificar más excitación que la de fuerza, por lo que hacemos *m=1* tomando $k=\omega_n^2=246,74$. La respuesta saldrá con el signo cambiado, lo que podremos olvidar con toda tranquilidad porque el espectro se construye con las máximas respuestas en valor absoluto.

(2) Esta operación reemplaza el fichero R1T.DAT donde teníamos los resultados del análisis en el dominio del tiempo. De haber querido salvarlo lo habríamos copiado sobre otro, con nombre aceptable para PEADOF mediante la orden COPIAR, o con nombre cualquiera a través del sistema operativo al que se accede con la orden DOS. El primer procedimiento permitiría calcular posteriormente la diferencia entre los resultados por ambos procedimientos. El segundo, con nombre inaceptable para PEADOF, impediría su borrado por una ejecución posterior.

(3) El resultado coincide perfectamente con el del método anterior. El cambio de signo se debe a que aquí tomamos $f(t)=m.\ddot{u}_b(t)$ cuando debe ser opuesta. En todo caso, el espectro de respuestas recoge el mayor resultado en valor absoluto.

5.3 Ejemplo 3: Obtención empírica de una H(ω)

Queremos obtener empíricamente la *H(ω)* de un oscilador de $f_n=10$ *Hz*, $\zeta=7\%$, *k=12000*.

La *H(ω)* de un oscilador se obtiene como cociente *R(ω)/X(ω)* entre las transformadas de Fourier de una excitación cualquiera *x(t)* y de su correspondiente respuesta *r(t)*. Sin embargo, a efectos prácticos la *x(t)* no debe ser "tan cualquiera" porque si su transformada posee ceros a ciertas frecuencias el cociente anterior quedará teóricamente indefinido, impredecible en la práctica. Por ello es necesario utilizar excitaciones x(t) tal que sus transformadas $|X(\omega)|>0$ en el intervalo de cálculo $[0, \omega_{max}]$. La excitación ideal para ello es la llamada de "ruido blanco", que exhibe $|X(\omega)|=cte.$ en $[-\omega_c, \omega_c]$ y $|X(\omega)|=0$ fuera del intervalo anterior.

Supongamos que nos basta obtener *H(ω)* hasta *f=25 Hz*. Procediendo como se muestra en la tabla 3a se obtiene la *H(ω)* de la figura 8.

En este punto queremos comprobar el error cometido en esta obtención numérica; para ello comparamos con la *H(ω)* construida analíticamente. Procedemos como se muestra en la tabla 3b. La figura 9 muestra los errores relativos cometidos a diferentes frecuencias; se observa que aumentan cuadráticamente con la frecuencia. Se sospecha que ello se debe a que las frecuencias altas están discretizadas con menos puntos cada vez en un periodo. Nos podemos cerciorar de ésto repitiendo todo el análisis con *DT=.005*. Así doblaremos el número de puntos de discretización de *x(t)* y *r(t)* en cada periodo; el precio por ello es que la *H(ω)* saldrá calculada en la mitad de puntos que en el caso anterior. Esto merece una glosa.

En el análisis con *DT=0,01* se tiene *DF=0,1953*. La resonancia a *f=10 Hz* se esconde entre los puntos correspondientes a *f=9,96 Hz*. y *f=10,16 Hz*. En el nuevo análisis con *DT=0,005* se tiene *DF=0,3906*; la resonancia se ocultará entre los puntos *f=9,77 Hz* y *f=10,16 Hz*. Así pues, el punto que teníamos más próximo a la resonancia lo hemos perdido.

El análisis con *DT=0,005* da los errores absolutos de la figura 10.

Tabla 3a

Obtención de H(ω) mediante R(ω)/X(ω)

ORDEN	Comentario
PEADOF▸	Llamada al programa.
INICIA▸ EJEMPLO 3▸ DAT▸ .01▸ 512▸ ▸	El DT tomado permitiría la obtención de H(ω) hasta FNYQ=50 Hz, pero para este valor extremo el resultado sería muy inexacto. Esta frecuencia se cubre con dos puntos por periodo, luego la de 25 se cubrirá con 4 puntos por periodo.
GENRB▸ 1▸ 25▸ 32▸	Generamos una excitación x(t) de ruido blanco en fichero X1T con contenido en frecuencias hasta f_c=25 Hz. Trasladamos el centro del histograma hasta aproximadamente ¼ de la ventana.
GRAF▸ X1T▸ Z▸ 0 3▸ ▸	Queremos ver el aspecto del ruido blanco; que es el que se muestra en la figura 6.
DUHAM▸ 1▸ 10▸ .07▸ 12000▸ ▸	Calculamos la respuesta r(t) del oscilador a la excitación de ruido blanco. Quedará en R1T.
TRFOUR▸ -1 X1T▸	Obtenemos X(ω).
GRAF▸ X1W▸ 4▸ ▸	Comprobamos que la transformada de Fourier del ruido blanco es de amplitud constante hasta 25 Hz y cero en adelante. Ver figura 7.
TRFOUR▸ -1▸ R1T▸	Obtenemos R(ω).
OPERA▸ W▸ 5▸ R1W▸ X1W▸ H1W▸	Obtenemos el cociente de R(ω)/X(ω), y ponemos H(ω) en fichero H1W.

GRAF▸ H1W▸ 4▸ ▸	Pedimos el gráfico de la H(ω) resultante, el cual se incluye en la figura 8.

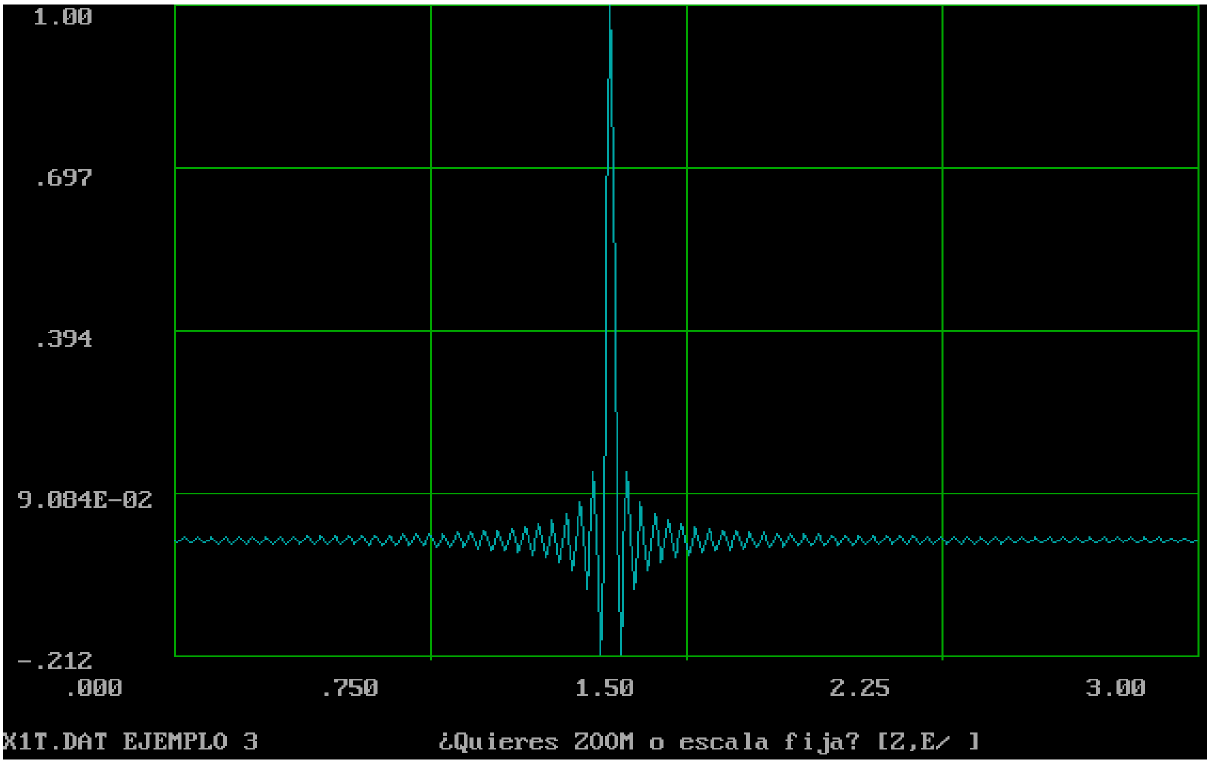


Figura 6
Excitación de ruido blanco

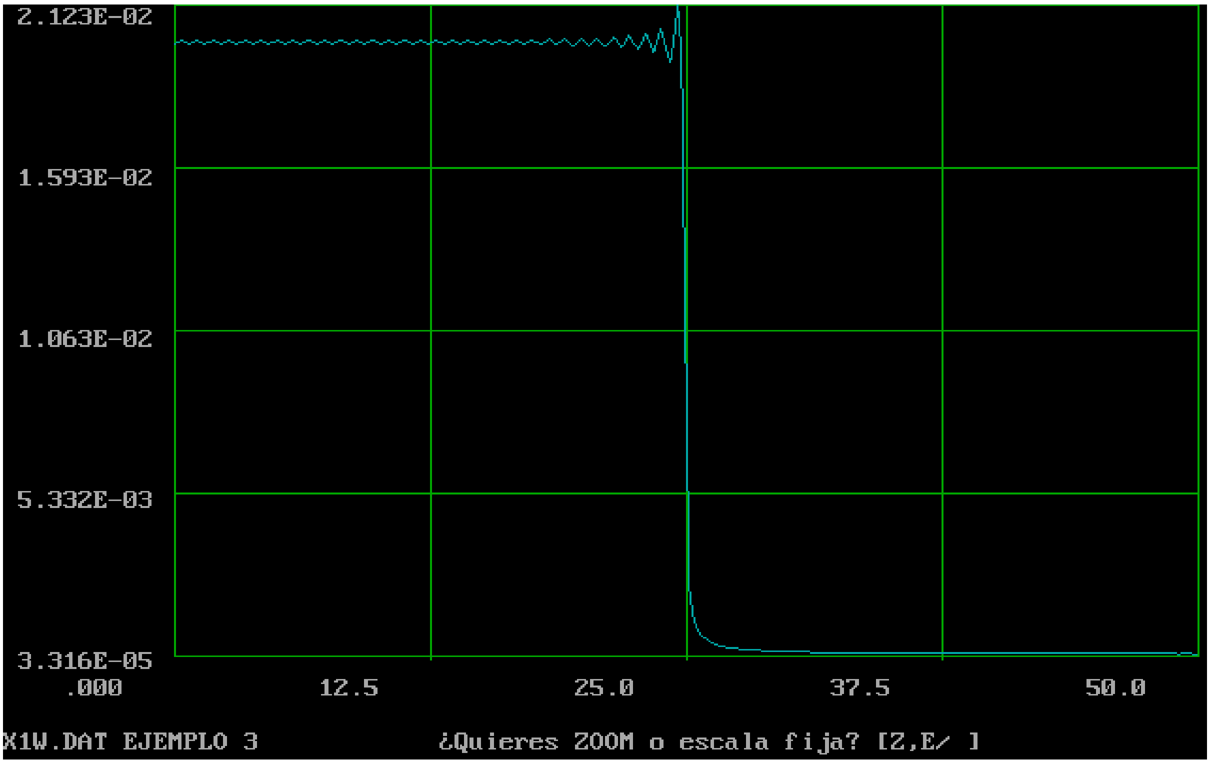


Figura 7
Espectro de Fourier de un ruido blanco

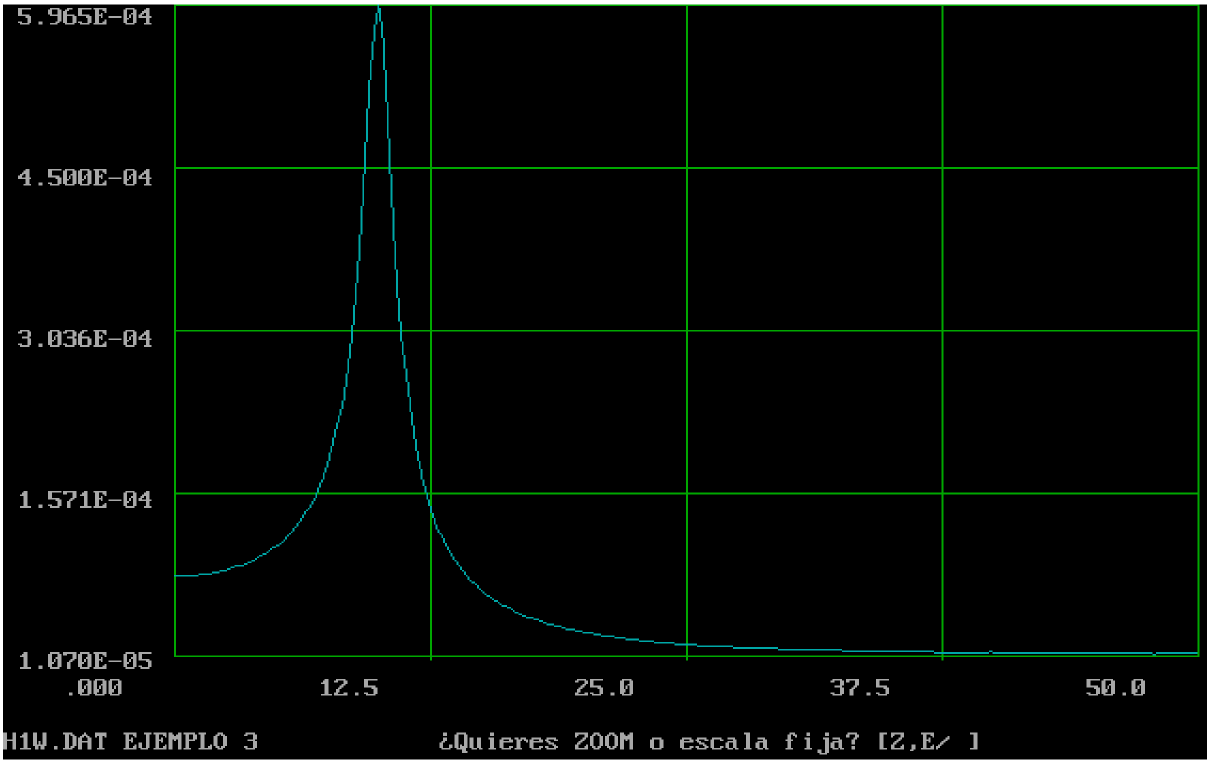


Figura 8
$H(\omega)$ obtenida empíricamente como $R(\omega)/X(\omega)$

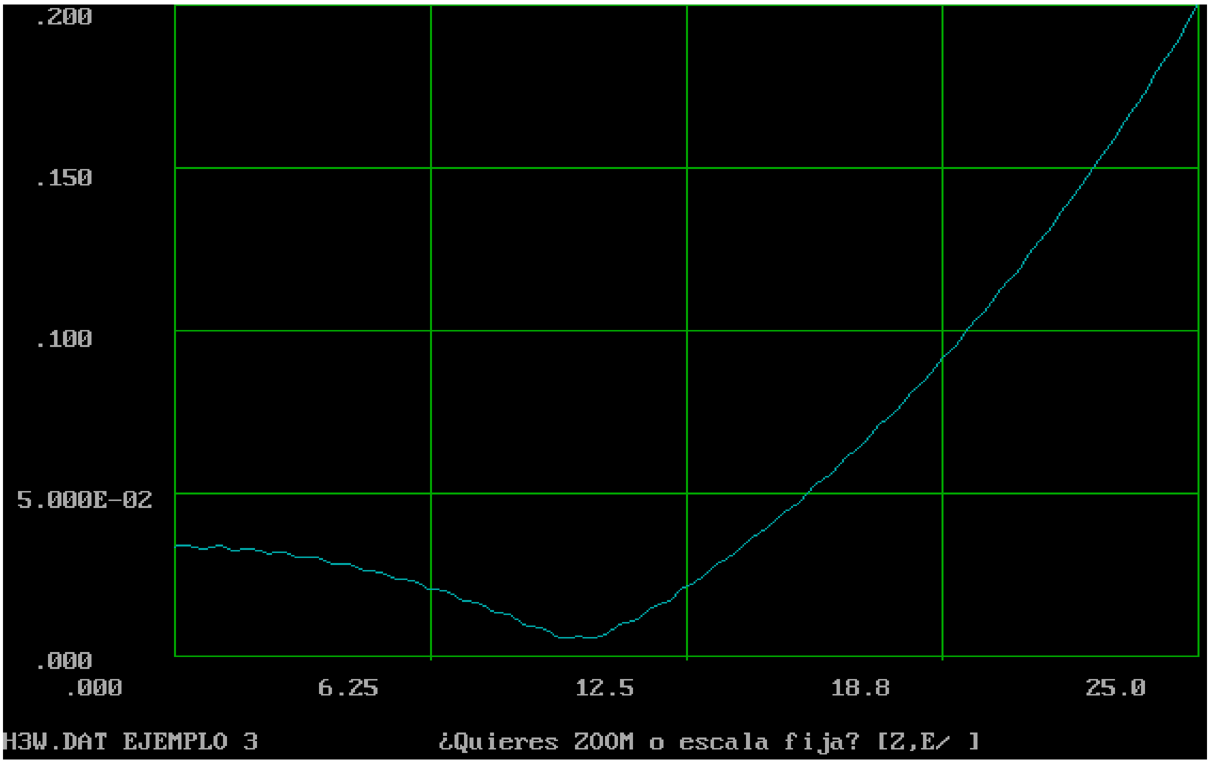


Figura 9
Error relativo en el cálculo de H(ω) con Δt=0,01

Tabla 3b
Cálculo del error en la H(ω) obtenida en la tabla 3a

ORDEN	Comentario
GENHW1▸ 2▸ 10▸ .07▸ 12000▸	Generamos la misma $H_a(\omega)$ analíticamente[(1)]; la ponemos en el fichero H2W.
OPERA▸ W▸ 3▸ H2W▸ -1 0▸ 0▸	Calculamos $-H_a(\omega)$. Sigue en fichero H2W

OPERA▸ W▸ 6▸ H1W▸ H2W▸ H3W▸	Calculamos el error absoluto $H_n(\omega)$-$H_a(\omega)$; $H_n(\omega)$ estaba en H1W. Ponemos la diferencia en H3W.
OPERA▸ W▸ 5▸ H3W▸ H2W▸ H3W▸	Calculamos el error relativo $(H_a(\omega)$-$H_n(\omega))/H_a(\omega)$. Numerador en H3W. Denominador en H2W. Cociente en H3W.
GRAF▸ H3W▸ 4▸ Z▸ 0, 25▸ E▸ 0,.2▸ ▸	Pedimos un gráfico de la función resultante. Sólo tiene sentido en el intervalo [0,25] Se muestra en la figura 9
FIN▸	

(1) Designamos con el subíndice *a* a la función obtenida analíticamente, y con el subíndice *n* a la obtenida numéricamente.

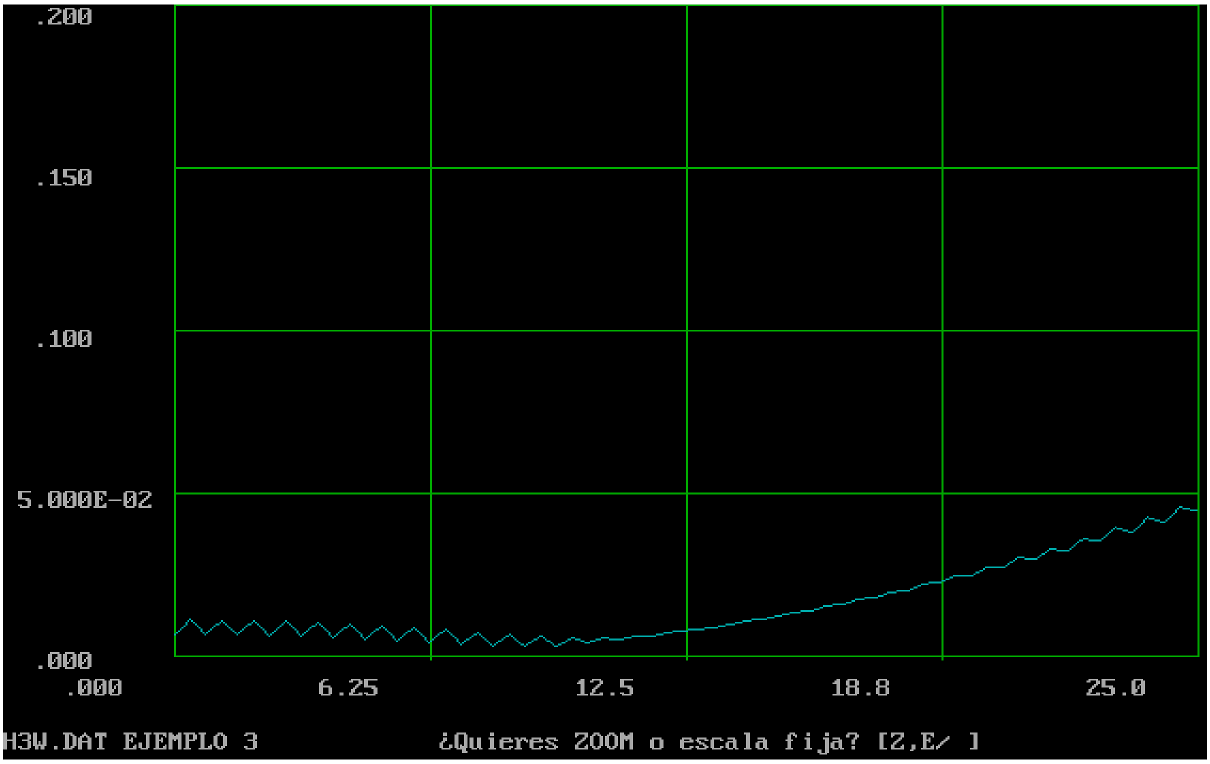


Figura 10
Error relativo en el cálculo de H(ω) con Δt=0,001

5.4 Ejemplo 4: Análisis sísmico de un edificio

El pórtico de la figura 11 está formado por forjados rígidos. Se quiere determinar el movimiento del piso superior de dicha estructura cuando su base es sacudida en dirección horizontal por el terremoto cuyo acelerograma se muestra en la figura 3. Los amortiguamientos serán del 5% para modos de frecuencias entre 0 y 5 Hz, del 4% entre 5 y 10 Hz y del 3% para modos con frecuencias superiores a los 10 Hz.

Las masas de los forjados son (ojo a las unidades de masa)

$$m_1=3600 \text{ kp/m}_x 5 \text{ m} / 1000 \text{ cm/seg}^2 = 18 \text{ kp}_x\text{seg}^2\text{/cm}$$
$$m_2=4200 \text{ kp/m}_x 5 \text{ m} / 1000 \text{ cm/seg}^2 = 21 \text{ kp}_x\text{seg}^2\text{/cm}$$

Las rigideces de las columnas frente a la traslación horizontal sin giro son $k=2_x 12\,EI/L^3$: $k_1=7600$ *kg/cm*, $k_2=16000$ *kg/cm*. Por tanto, las matrices de masa y rigidez serán:

$$[m]=\begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} \quad ; \quad [k]=\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7600 & -7600 \\ -7600 & 23600 \end{pmatrix}$$

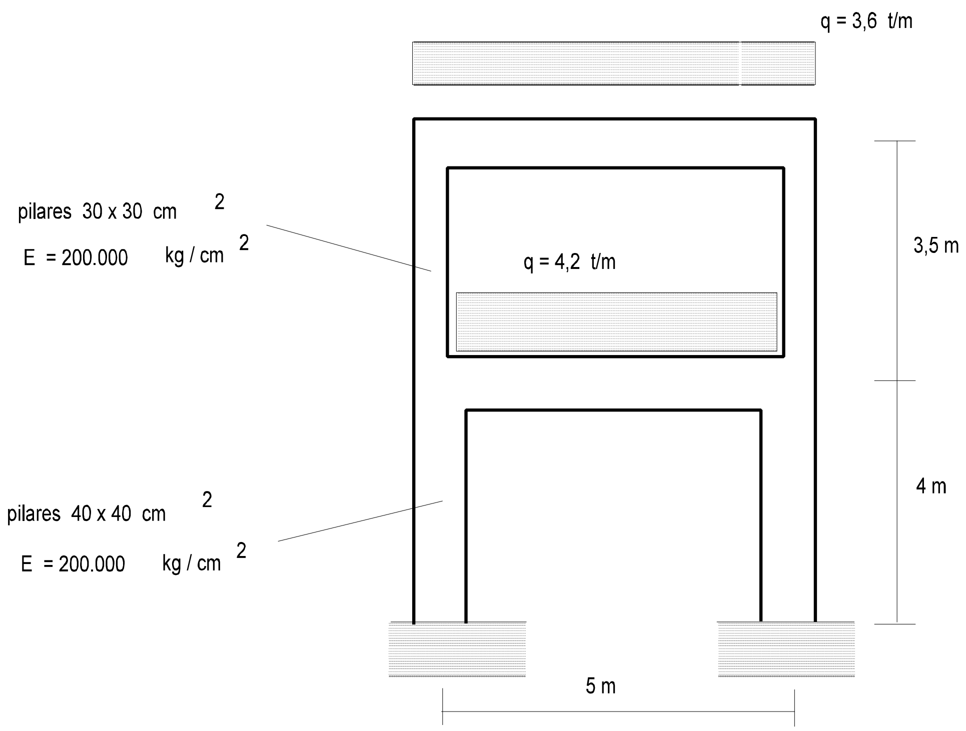


Figura 11
Estructura porticada del ejemplo 4

Tabla 4a
Cálculo de la respuesta sísmica de un edificio.
Análisis en el dominio de la frecuencia

ORDEN	Comentario
PEADOF▸	
INICIA▸ EJEMPLO 4▸ DAT▸ .05▸ 512▸ ▸	
GENXT▸ 1▸ 0▸ T▸ ... (etc.)	Generamos un acelerograma afín al de la figura 3, igual que hicimos en el ejemplo 2.
OPERA▸ T▸ 1▸ X1T▸ 500▸	Multiplicamos el acelerograma unitario por 500, para obtener el de la figura 3.
GENHW2▸ 18 0 21▸ 7600 -7600 23600▸ .05▸ .04▸	Generamos $H_{11}(\omega)$, $H_{22}(\omega)$, $H_{12}(\omega)$. Matriz de masas. Matriz de rigidez. Amortiguamientos modales.
OPERA▸ W▸ 3▸ H1W▸ -18,0▸ 0▸	Multiplicamos la $H_{11}(\omega)$ por $-(m_{11}+m_{12})$
OPERA▸ W▸ 3▸ H3W▸ -21,0▸ 0▸	Multiplicamos la $H_{12}(\omega)$ por $-(m_{21}+m_{22})$
OPERA▸ W▸ 6▸ H1W▸ H3W▸ H1W▸	Sumamos los resultados anteriores. Obtenemos la función de transmisibilidad $T_{1b}(\omega) = -(m_{11}+m_{12})H_{11}(\omega)-(m_{21}+m_{22})H_{12}(\omega)$ y la colocamos en H1W
TRFOUR▸ -1▸ X1T▸	Obtenemos $\ddot{U}_b(\omega)$.
HW*XW▸ 1▸	Multiplicamos $T_{1b}(\omega).\ddot{U}_b(\omega)$. $R_1(\omega)$ queda en R1W.
TRFOUR▸ 1▸ R1W▸	Pasamos $R_1(\omega)$ al dominio del tiempo. $r_1(t)$ sale en R1T
GRAF▸ R1T▸ Z▸ 0,5▸ ▸	Pedimos la gráfica de $r_1(t)$. Resulta la figura 12.
FIN▸	

Analisis en el dominio de la frecuencia

Las órdenes que se dan a PEADOF son las que se muestran en la tabla 4a.

Durante la ejecución de GENHW2 anotaremos los siguientes resultados:

$$f_1 = 2{,}505\,Hz \quad ; \quad f_2 = 5{,}735\,Hz$$

$$[\Phi] = \left[\{\phi_1\}\{\phi_2\}\right] = \begin{pmatrix} 0{,}9242 & 0{,}4342 \\ 0{,}3818 & -0{,}9008 \end{pmatrix}$$

a la vista de los cuales introducimos los coeficientes de amortiguamiento modal que figuran en la tabla anterior. Anotaremos también las matrices modales

$$[m^*] = \begin{pmatrix} 18{,}437 & 0 \\ 0 & 20{,}435 \end{pmatrix}$$

$$[k^*] = \begin{pmatrix} 4568{,}6 & 0 \\ 0 & 26528{,}8 \end{pmatrix}$$

Calculamos manualmente las fuerzas sísmicas que excitan nuestra estructura:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = -\begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{u}_b(t) = -\begin{Bmatrix} 18 \\ 21 \end{Bmatrix} \ddot{u}_b(t)$$

Necesitamos realizar las siguientes operaciones

$$R_1(\omega) = \left(-18H_{11}(\omega) - 21H_{12}(\omega)\right)\ddot{U}(\omega)$$

La combinación de *H*'s entre paréntesis es la función de transmisibilidad $T_{1b}(\omega)$ (desplazamiento relativo/aceleración).

De manera semejante se puede obtener el histograma $u_{2,rel}(t)$. Con ambos se pueden calcular inmediatamente los cortantes en la columna superior $Q_1(t)= k_1(u_{1,rel}(t)-u_{2,rel}(t))/2$ e inferior $Q_2(t)=k_2u_{2,rel}(t)/2$. El divisor tiene en cuenta la colaboración de dos columnas por planta. Los momentos en los extremos de las columnas son $M_j=\pm Q_jL_j/2$.

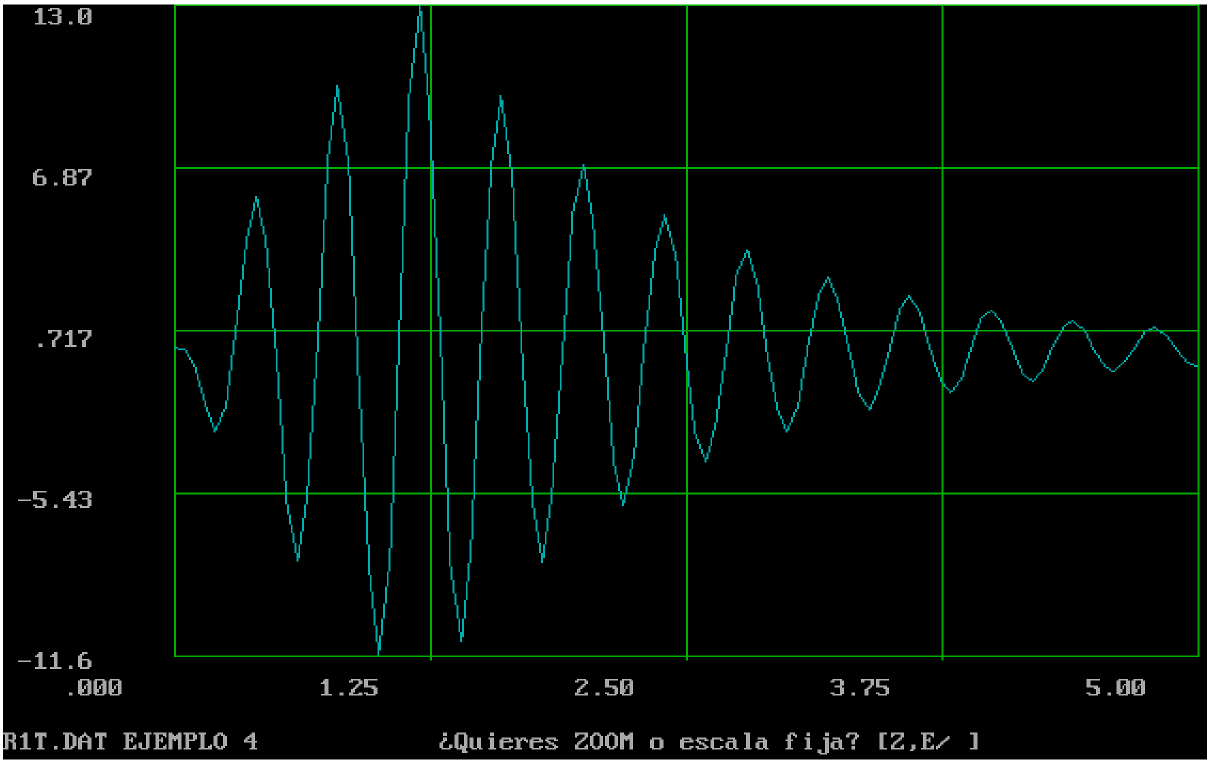


Figura 12
Respuesta del piso superior obtenida por análisis frecuencial

Analisis en el dominio del tiempo

Un análisis alternativo se basa en el método de superposición modal. La relación entre los desplazamientos físicos **r** y modales **z** viene dada por **r=Φz**. La matriz modal **Φ** se obtiene al ejecutar GENHW2. Los desplazamientos modales **z** resultan del sistema

$$[m^*]\{\ddot{z}\}+[c^*]\{\dot{z}\}+[k^*]\{z\}=\{\Gamma\}\ddot{u}_b(t)$$

Los factores de participación modal son:

$$\{\Gamma\}=-[\Phi]^T[m]\{1\}=-\begin{pmatrix}0{,}9242 & 0{,}3818\\ 0{,}4342 & -0{,}9008\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18 & 0\\ 0 & 21\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-24{,}653\\ 11{,}101\end{Bmatrix}$$

y las correspondientes fuerzas modales $f_j^*(t)=\Gamma_j\ddot{u}_b(t)$.

LLamando z^* a las respuestas correspondientes a Γ=1, es decir, a las soluciones de las siguientes ecuaciones modales,

$$m_j^*\ddot{z}_j^*+2\zeta_j m_j^*\omega_j\dot{z}_j^*+k_j^*z_j^*=\ddot{u}_b$$

las respuestas físicas resultan ser

$$\begin{Bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9242 & 0{,}4342 \\ 0{,}3818 & -0{,}9008 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -22{,}784 & 4{,}820 \\ -9{,}413 & -10{,}000 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{Bmatrix}$$

El análisis por superposición modal se ejecuta mediante las órdenes de la tabla 4.b

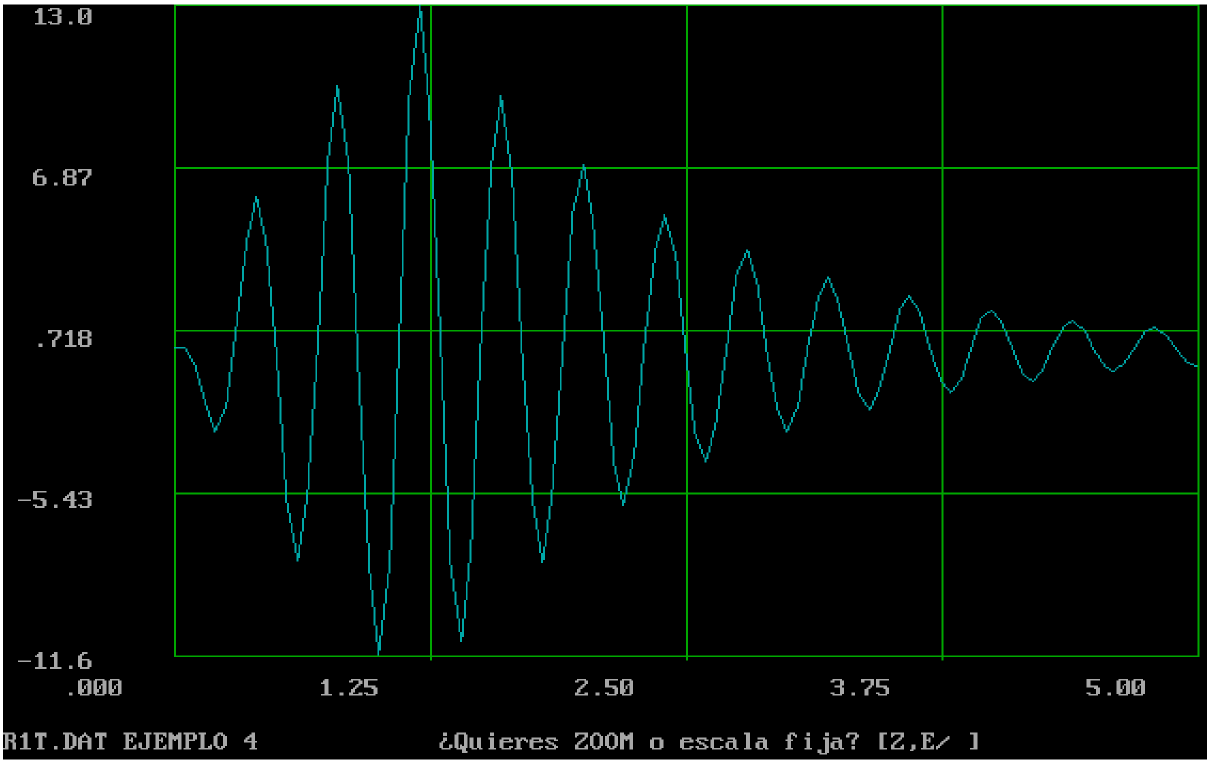


Figura 13
Respuesta del piso superior obtenida por superposición modal

Tabla 4b
Cálculo de la respuesta sísmica de un edificio
Análisis en el dominio del tiempo (superposición modal)

ORDEN	Comentario
PEADOF▸	
LEER▸ X1T.DAT▸	Reanudamos del trabajo anterior.
DUHAM▸ 1▸ 2.505▸ .05▸ 4568.6▸ ▸	Cálculo de la respuesta modal $z_1^*(t)$. $\ddot{u}_b(t)$ en X1T (respuesta a R1T). f_1, ζ_1, k_1^*, excitación fuerza.
COPIAR▸ X1T▸ X3T▸	Copiamos $\ddot{u}_b(t)$ a fichero X3T, para uso siguiente.
DUHAM▸ 3▸ 5.735▸ .04▸ 26528.8▸ ▸	Cálculo de la respuesta modal $z_2^*(t)$. Excitación en X3T (respuesta a R3T). f_2, ζ_2, k_2^*, excitación fuerza.
OPERA▸ T▸ 1▸ R1T▸ -22.784▸	Obtención de la componente de $z_1^*(t)$ en $r_1(t)$. $\Gamma_1\phi_{11}$
OPERA▸ T▸ 1▸ R3T▸ 4.820▸	Obtención de la componente de $z_2^*(t)$ en $r_1(t)$. $\Gamma_2\phi_{21}$
OPERA▸ T. 2▸ R1T▸ R3T▸	Suma de las componentes anteriores. Resultado en R1T.
GRAF▸ R1T▸ Z▸ 0, 5▸	Visualización del resultado. Aparece la figura 13.
FIN▸	Conclusión.