Prácticas de Elasticidad 13-14

Clase 1. Tensiones

1) El tetraedro irregular de vértices *A(0,1,0), B(0,1,1), C (0,0,1) y D(1,0,0)* de la figura 1 se encuentra en el interior de un sólido elástico sometido a unas cargas exteriores que producen en su interior un estado de tensión constante.Se conocen los vectores tensión total sobre tres de las cuatro caras del tetraedro, que son (en MPa): sobre la cara *ABD* $<2{,}121;0{,}707;2{,}450>^T$; sobre la cara *BCD* $<4{,}571;0;1{,}742>^T$ y sobre la cara *ABC* $<-3;0;-3{,}464>^T$. Se pide:

a) Tensor de tensiones en cualquier punto del sólido.
b) Tensión total sobre la cuarta cara del tetraedro.
c) Tensiones principales y sus direcciones.
d) Tensiones tangenciales máximas y sus direcciones.
e) Coeficiente de seguridad a rotura del sólido si las tensiones de rotura son en (MPa) a tracción 25, a compresión 300 y a cortante 15, e indicar la causa de la rotura. (Se acepta la hipótesis de que las tensiones crecen linealmente con la carga exterior hasta la rotura.)

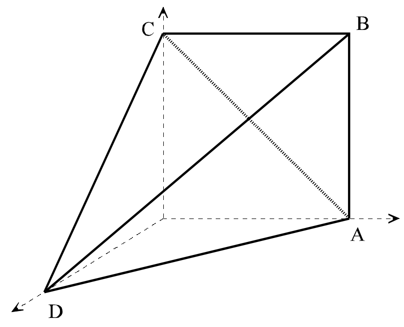

Figura 1

2) En un punto *O* de un sólido elástico se sitúan unos ejes coordenados cartesianos. Al someter el sólido a dos estados de cargas distintos se obtienen en un cierto punto las siguientes tensiones y direcciones principales:

$$\text{Estado 1}\begin{cases}\sigma_1 = 10 & \langle 0.\ \ 1.\ \ 0.\rangle^T\\ \sigma_2 = 2 & \langle 0.\ \ 0.\ \ 1.\rangle^T\\ \sigma_3 = -5 & \langle 1.\ \ 0.\ \ 0.\rangle^T\end{cases}\qquad \text{Estado 2}\begin{cases}\sigma_1 = 4 & \langle 1.\ \ 0.\ \ 0.\rangle^T\\ \sigma_2 = -2 & \langle 0\ \ 1/2\ \ \sqrt{3}/2\rangle^T\\ \sigma_3 = -10 & \langle 0\ \ \sqrt{3}/2\ \ -1/2\rangle^T\end{cases}$$

Si los estados de carga anteriores actuaran a la vez, determinar:
a) Valores y signos de las tensiones.
b) Valores con signo de las tensiones principales y direcciones correspondientes, definidas por sus cosenos directores.

Clase 2. Deformaciones, movimientos

3) El cuerpo elástico de la figura 3 está sometido a un estado de deformación plana definido por las siguientes *deformaciones principales*:

$$\vec{\epsilon}_I = 2\left(x^2+y^2\right)\times 10^{-6}\begin{Bmatrix}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{Bmatrix}$$

$$\vec{\epsilon}_{II} = -2\left(x^2+y^2\right)\times 10^{-6}\begin{Bmatrix}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{Bmatrix}$$

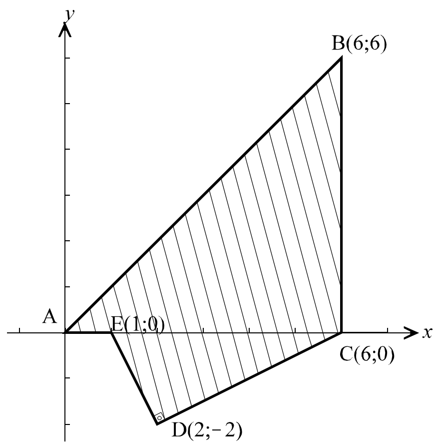

Figura 3

(La expresión entre llaves $\{d\}$ contiene el vector unitario de la dirección correspondiente.) Se pide:
a) Determinar el tensor de deformaciones en cualquier punto *x, y*.
b) Probar que tal estado de deformaciones es posible.
c) En el polígono *ABCDE* de la figura, determinar la variación del ángulo recto en *D* y el alargamiento del lado *AB*.(Examen junio 2006.)

4) La barra de la figura 4, de longitud *L* y sección *A*, gira en torno a su extremo *O* con velocidad angular Ω constante. Se conocen las características del material: peso específico γ, módulo de elasticidad *E* y coeficiente de Poisson ν. La única fuerza que actúa sobre la barra es la centrífuga. El alargamiento está impedido por la sustentación. Para este problema de *elasticidad unidimensional* se pide:
a) Obtener su ecuación de equilibrio en tensiones.
b) Obtener su ecuación de equilibrio en desplazamientos
c) Integrar dicha ecuación para obtener el desplaza-miento longitudinal de cada punto de la barra.
d) Determinar la ley de esfuerzos axiles y la máxima tensión en la barra.
Notas:
1) No se puntuarán resultados basados en la Resistencia de Materiales.
2) El particularizar las ecuaciones generales de la Elasticidad para este caso conduce fácilmente a error.
(Examen junio 2005.)

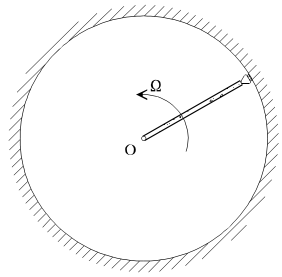

Figura 4

Clase 3. Aplicaciones

5) Un recipiente esférico delgado de radio *R* y espesor *e* (muy pequeño en comparación con *R*) se encuentra sometido a una presión interior *p* uniforme. Las constantes elásticas del material son módulo de Elasticidad *E=200.000 MPa* y coeficiente de Poisson ν= 0,30. Se pide:
a) Determinar las tensiones σ_θ y σ_φ en cualquier punto del recipiente. (Se sugiere hacerlo escribiendo la ecuación de equilibrio del casquete esférico elemental de la figura, cuyos bordes son circunferencias máximas. O, alternativamente, mediante el equilibrio de la semiesfera. La componente σ_r se desprecia por pared delgada.)
b) Calcular el movimiento radial u_r de cualquier punto de la esfera.
c) Calcular el aumento de volumen unitario de la esfera.
(Examen julio 2007.)

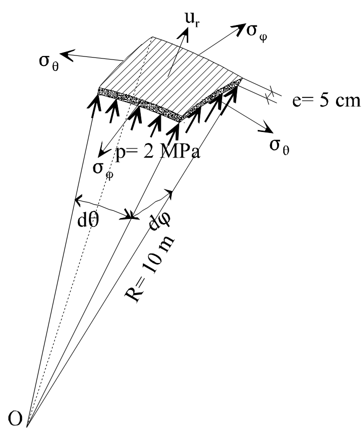

Figura 5

6) La figura muestra una chapa plana, cuadrada, de 700 cm de lado, y delgada sobre cuyo contorno actúa una tensión tangencial τ_{xy} = *10* MPa, uniforme. Sobre la chapa se señalan los puntos *A* $(-7\sqrt{2},-7\sqrt{2})$, *B* (−14 , 0) y *C* (−14 , +14) (coordenadas en cm). Posteriormente se taladra en su centro *O* un agujero circular de 7 cm de radio. Se pide determinar en el punto *B*:
a) las tensiones principales, con sus direcciones,
b) la tensión normal y tangencial sobre el plano *BA*, y
c) la tensión normal y tangencial sobre el plano *BC*
para cada uno de los dos estados siguientes:
1) Antes de taladrar el agujero.
2) Después de taladrar el agujero.
(Examen junio 1993.)

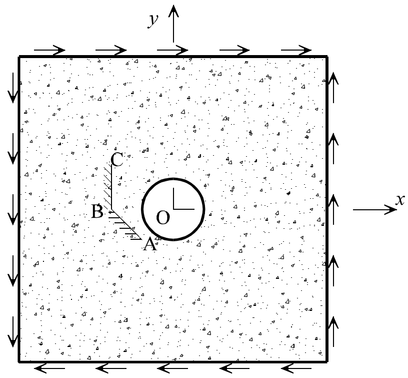

Figura 6

Clase 4. Torsión. Airy

7) Dado el siguiente campo de movimientos en un sólido (en metros):

$$u = -zy \times 10^{-4}$$
$$v = zx \times 10^{-4}$$
$$w = -Axy \times 10^{-4}$$

a) Demostrar que es posible.
b) Obtener el campo de tensiones (en kN/m^2) que sufre el sólido mencionado. Las características elásticas del material se dan en la figura.
c) Probar que el campo de tensiones obtenido es solución del problema elástico de la figura (cilindro recto de base elíptica sometido a torsión). Enumerar con claridad qué condiciones, adicionales a las del apartado *a)*, le exigimos cumplir. Obtener los valores numéricos del semieje *b* de la elipse y del momento torsor que actúa sobre sus caras extremas, indicando de qué condición se obtiene cada uno.
(Examen mayo 2001.)

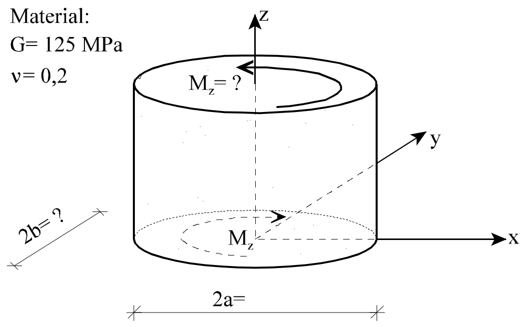

Figura 7

8) Prueba que la función:

$$\Phi(x,y) = A\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right)$$

es una función de tensiones exacta para el problema de la torsión en un cilindro recto de longitud *L* y sección una elipse de semiejes *a, b*. Dado M_z en las caras extremas, determinar la máxima tensión tangencial, su punto de aplicación, dirección y el ángulo que gira una cara extrema con relación a la otra.

9) En la presa de la figura 9 se pide:
a) Demostrar que las tensiones producidas por el empuje de un líquido de peso específico $\rho = 20$ kN/m^3 que actúa sobre su paramento vertical pueden derivarse de la función de tensiones siguiente:

$$\Phi = r^3 (A\cos 3\theta + B\,\mathrm{sen}\,3\theta + C\cos\theta + D\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

b) Determinar los valores de las constantes *A, B, C, D* y las expresiones de las tensiones para $\alpha = 30°$.

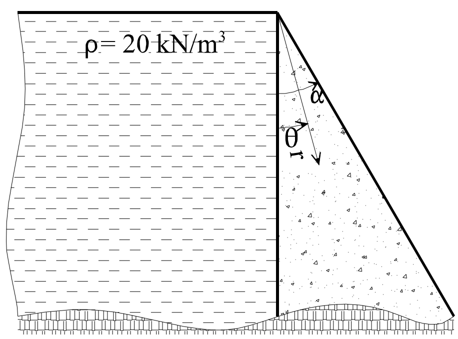

Figura 9