

1. Reacciones

Es imprescindible saber las *cantidades* (áreas) y posiciones de centros de gravedad de cargas repartidas para sustituirlas por otras concentradas cuando ello sea posible (*TutoRES*, p. 1.3) ¹ Generalmente lo puedes hacer siempre para cálculos estáticos (reacciones), y sólo “a efectos externos” (fuera del intervalo de actuación de la carga repartida) para cálculos de esfuerzos.

Problema 1.1. Calcular las reacciones de la viga de la figura 1.1a.

No conocemos la posición del c.d.g. de la parábola *gorda* de la figura 1.1a; la descomponemos en la suma de un rectángulo (cuyo c.d.g. conocemos), *menos* una parábola *delgada*. Calculamos las reacciones para estas distribuciones en las figuras 1.1b y c. Por consiguiente, $V_A = 36,459$, $V_B = 130,208$. Comprueba que $V_A + V_B = 2 \times 20 \times 12,5/3$ y que el apoyo B produce mucha más reacción porque tiene mucha más carga en su vecindario.

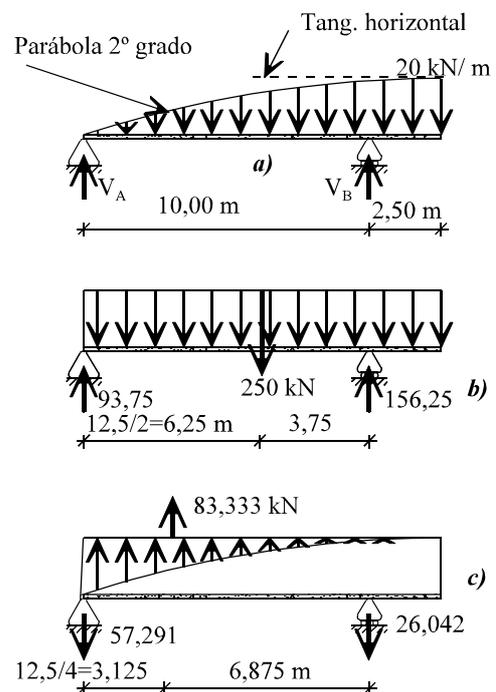


Figura 1.1
Álgebra de distribuciones de cargas

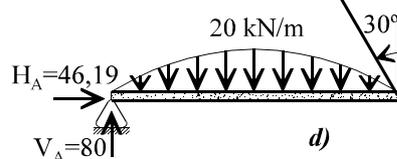
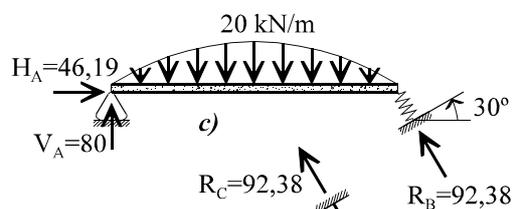
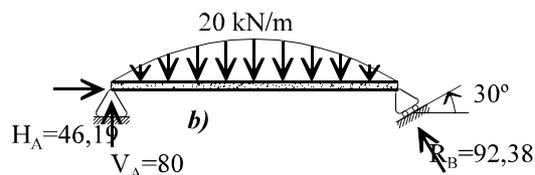
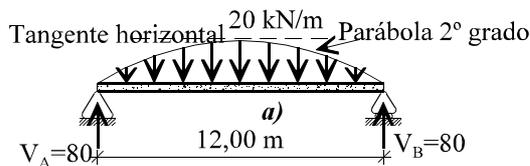


Figura 1.2
Efecto de apoyo “avieso”

Problema 1.2. Calcular las reacciones de las estructuras de la figura 1.2.

La carga total es $Q_{total} = \frac{2}{3} \times 20 \times 12 = 160$ kN por lo que en el caso a) irán 80 kN a cada apoyo.

Los demás casos también necesitan una $V_B = 80$ kN, que los proporcionará la R_B inclinada correspondiente tomando el valor $R_B = \frac{V_B}{\cos 30^\circ} = 92,376$ kN. Sin embargo, esta R_B , a la vez que proporciona la V_B deseada, introduce una carga horizontal en la estructura $F_B = -R_B \cdot \sin 30^\circ = -V_B \cdot \tan 30^\circ$. Por consiguiente, en todos los casos de apoyo inclinado (tanto si es rígido, como si es flexible como si es un cable) $H_A = 80 \cdot \tan 30^\circ = 46,188$ kN.

¹ Haremos referencia continuamente a la página apropiada del *best seller TutoRES* de este mismo autor, disponible en la Librería Caminos de la E.T.S. de Ings. de Caminos de Madrid y también en Internet, en versión reducida.

Problema 1.3. Calcular las reacciones del muro y de la compuerta de la figura 1.3.

Lo haremos para anchos de muro y compuerta de 1 m (dimensión que no se ve en la figura por ser perpendicular a ella). El muro está sometido a un empuje triangular de 100 kN/m^2 en su base y cero a la cota 10.² Al afectar a un ancho de 1 m, $q = 100 \text{ kN/m}$ en la base. El empuje total será

$$E = \frac{1}{2} 10 \rho \times 10 = 500 \text{ kN}$$

estará localizado a la cota 3,333 m por encima de la base. Por consiguiente, $H_B = 500 \text{ kN}$, $V_B = 0 \text{ kN}$ (salvo que consideremos el peso propio del muro), $M_B = -1.666,67 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

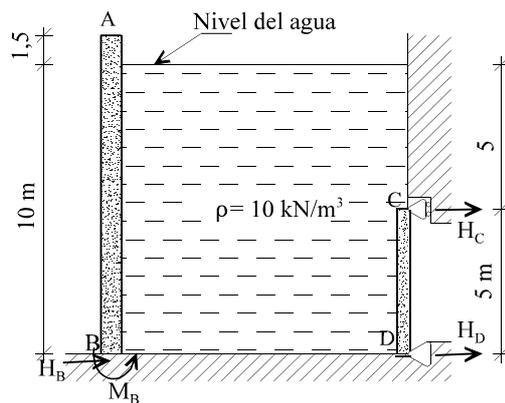


Figura 1.3
Reacciones por cargas hidrostáticas

1 m de compuerta estará sometido a un empuje trapezoidal de valor $q_C = 5\rho \text{ kN/m}$ en C y $q_D = 10\rho \text{ kN/m}$ en D. Por consiguiente:

$$-H_C = \frac{1}{2} 50 \times 5 + \frac{1}{3} \frac{1}{2} 50 \times 5 = 166,67 \text{ kN}$$

$$-H_D = \frac{1}{2} 50 \times 5 + \frac{2}{3} \frac{1}{2} 50 \times 5 = 208,33 \text{ kN}$$

Problema 1.4. La viga de la figura 1.4 soporta el recipiente de 0,5 m de ancho que contiene agua. Determinar las reacciones de la viga.

La parte paralelepípedica del recipiente contiene 50 kN de agua que podemos considerar concentrados en $x = 4,5 \text{ m}$ del apoyo A. La parte piramidal contiene 10 kN de agua en $x = 7 + \frac{2}{3} \text{ m}$. Por consiguiente:

$$V_B = \frac{5\rho \times 4,5 + 1\rho \times 7,667}{10} = 30,17 \text{ kN}$$

$$V_A = \frac{5\rho \times 5,5 + 1\rho \times 2,333}{10} = 29,83 \text{ kN}$$

$$H_A = 0$$

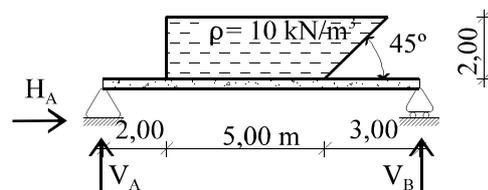


Figura 1.4
Pesos y empujes de agua

¿Por qué hemos prescindido de los empujes horizontales del agua sobre las paredes verticales del recipiente? Porque se han de anular entre sí, necesariamente. De lo contrario: (i) El recipiente (que suponemos simplemente posado sobre la viga) se movería horizontalmente y se escaparía de la viga y además (ii) habríamos construido un cuerpo que se desplaza sin consumir energía.

² Las dos características de la presión hidrostática las tienes en el TR, §1.1, p. 1.5. Conocerlas es imprescindible para el ingeniero.

Problema 1.5. La viga de la figura 1.5 soporta la carga de agua mostrada. Determinar sus reacciones.

Como siempre, tomamos un metro de ancho de estructura. Podríamos hacer el cálculo reemplazando el agua por la presión hidrostática correspondiente pero nos daría más trabajo. Lo haremos considerando los pesos de agua P_1 y P_2 y el empuje E que el agua a la izquierda de la línea AD ejerce sobre el agua a la derecha para mantenerla sin escaparse. (De otra manera: como vimos en el problema 1.4, el empuje horizontal del agua sobre un recipiente es nulo. Por consiguiente, si consideramos el recipiente imaginario $DACB$, el empuje horizontal sobre CB es igual y contrario al empuje horizontal interior sobre AD , por tanto igual al exterior sobre AD denominado E en la figura 1.5.)

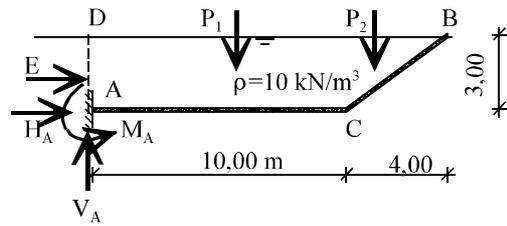


Figura 1.5

¡Cuidado con la reacción horizontal!

$$E = \frac{1}{2} 3\rho \times 3 = 45 \text{ kN en } y_E = 1$$

$$P_1 = 3\rho \times 10 = 300 \text{ kN en } x_1 = 5$$

$$P_2 = \frac{1}{2} 3\rho \times 4 = 60 \text{ kN en } x_2 = 11,333$$

Por consiguiente:

$$H_A = -E = -45 \text{ kN}$$

$$V_A = P_1 + P_2 = 360 \text{ kN}$$

$$M_A = E \times y_E + P_1 \times x_1 + P_2 \times x_2 = 2.225 \text{ kN}\times\text{m}$$

Problema 1.6. El depósito cuarto-de-cilindro circular de la figura 1.6 soporta la carga de agua mostrada. Determinar sus reacciones.

No reemplazamos el agua por su efecto sobre las paredes del recipiente sino que la consideramos encima de él, como en el ejemplo anterior, sin olvidarnos del empuje E que el agua a la izquierda de la línea OA ejerce sobre la que está a la derecha (para que no escape hacia la izquierda). Por consiguiente:

$$H_A = -E = -\frac{1}{2} \rho R^2$$

$$V_A = P = \frac{\pi}{4} \rho R^2$$

$$M_A = E \times \frac{R}{3} + P \times \frac{4R}{3\pi} = \frac{1}{2} \rho R^3$$

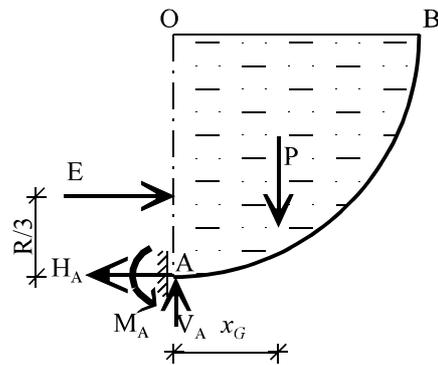


Figura 1.6

Pesos y empujes hidrostáticos

en donde hemos hecho uso de que el c.d.g. del semicírculo está en $x_G = \frac{4R}{3\pi}$, lo cual se obtiene por el segundo teorema de Guldin (TR, p.1.5).

Problema 1.7. La viga cuarto-de-circunferencia de la figura 1.7 está sometida a su propio peso q_o kN/m. Determinar sus reacciones.

Según el primer teorema de Guldin (TR, p.1.5), su centro de gravedad está en $x_G = 2R/\pi$. Por consiguiente:

$$H_A = 0 \quad ; \quad V_A = \frac{\pi}{2} q_o R \quad ; \quad M_A = q_o R^2$$

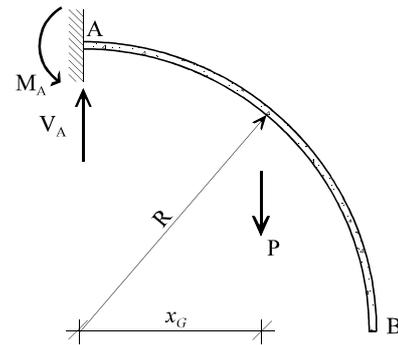


Figura 1.7
El peso siempre apunta hacia abajo

Problema 1.8. El pórtico tri-articulado de la figura 1.8 está sometido a la carga repartida por unidad de proyección que se muestra en la propia figura. Determinar sus reacciones.

Como en una viga biapoyada, el apoyo izquierdo soporta los $\frac{3}{4}$ de la carga total y el derecho, el $\frac{1}{4}$ restante. Las reacciones horizontales se obtienen con la condición de momento flector nulo en la rótula: $H_B = \frac{1}{2} V_B$. Observa que la curvatura del arco no afecta a sus reacciones porque la carga es por unidad de proyección.

$$V_A = 112,5 \text{ kN} \quad ; \quad V_B = 37,5 \text{ kN}$$

$$H_B = -18,75 \text{ kN} \quad ; \quad H_A = 18,75 \text{ kN}$$

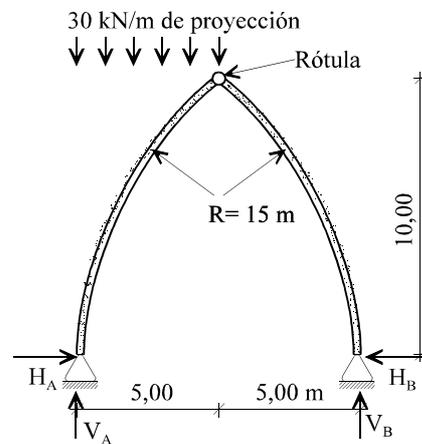


Figura 1.8
Se parece a la viga

Problema 1.9. El pórtico tri-articulado de la figura 1.9 está sometido a la carga repartida por unidad de proyección que se muestra en la propia figura. Determinar sus reacciones.

En este caso el reparto de la carga vertical entre los dos apoyos no es igual que en la viga simple porque los apoyos no están a la misma altura. En la ecuación, por ejemplo, de suma de momentos *totales* en A participa la reacción H_B , que no lo hacía en la viga biapoyada. Usamos las siguiente ecuaciones:

$$M_A(R) \equiv V_B \times 5 - H_B \times 8 = 0$$

$$\Sigma M_T(A) \equiv V_B \times 10 - H_B \times 2 - 30 \times 5 \times \frac{5}{2} = 0$$

El resultado final es:

$$V_A = 116,67 \text{ kN}$$

$$V_B = 33,33 \text{ kN}$$

$$H_A = H_B = 20,83 \text{ kN}$$

En la primera ecuación del sistema de más arriba, calculamos el momento *flector* en la rótula *por la derecha*. Comprueba los valores anteriores calculándolo *por la izquierda*.

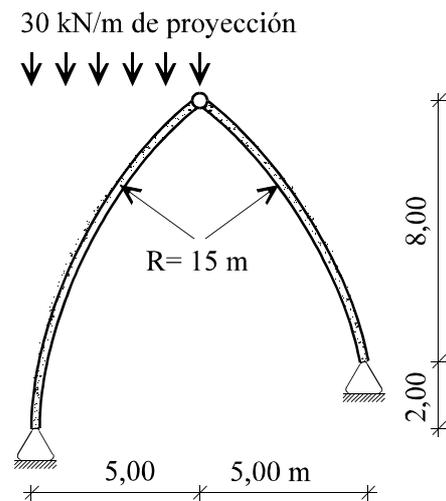


Figura 1.9
No se parece a la viga

2. Esfuerzos

Problema 2.1. Calcular el máximo momento flector en todas las vigas de la figura 1.2.

Es obvio que en todos los casos de la figura 1.2 el máximo momento flector se produce en el centro de la luz. (Si ocurre ahí para carga uniforme, con más razón lo hará para esta carga escorada hacia el centro. Además, es claro que el cortante en el centro es nulo.) Reemplazamos la reacción inclinada R_B por sus componentes V_B y H_B . Tomamos momentos en C (figura 2.1) de todas las cargas a su derecha. Reemplazamos mentalmente la carga parabólica $CBEC$ por una uniforme $CBDEC$ (que sustituimos por su resultante en $z=6/2$) menos otra parabólica $BDEB$ (que también sustituimos por su resultante en $z=6/4$):

$$M_C = 80 \times 6 - 120 \times \frac{6}{2} + 40 \times \left(6 - \frac{6}{4}\right) = 300 \text{ kN}\times\text{m}$$

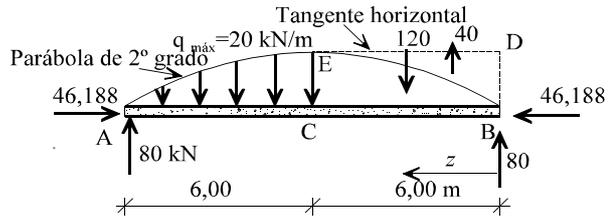


Figura 2.1
Cargas actuantes sobre las vigas de la figura 1.2

Problema 2.2. Dibujar la ley de momentos flectores de la viga de dos vanos con rótula de la figura 2.2a, sometida a la carga mostrada, y acotar sus valores máximos positivo y negativo.

La viga es isostática por la rótula. La ley de momentos flectores ha de ser una parábola de 2º grado en el tramo BC sometido a carga uniforme (TR tabla 2.1) y una recta que una el valor que resulte en B con el cero en A .

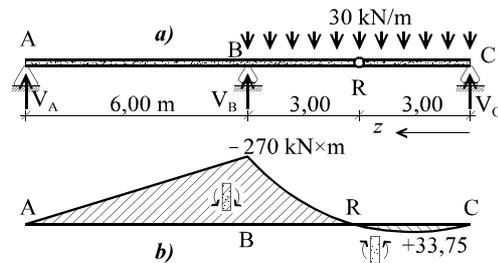


Figura 2.2
Viga de dos vanos con rótula

Anulando el momento *flector* en R resulta $V_C = 45 \text{ kN}$ y con este valor se obtiene $M(B) = -270 \text{ kN}\times\text{m}$. El valor máximo positivo se localiza en el lugar $z_{\text{máx}}$ donde el cortante $Q(z) = V_C - qz$ es nulo y vale $M_{\text{máx}} = V_C z_{\text{máx}} - qz_{\text{máx}} \frac{z_{\text{máx}}}{2}$. El gráfico acotado se da en la figura 2.2b

Problema 2.3. Dibujar y acotar la ley de momentos flectores en la viga empotrada-apoyada y con una rótula de la figura 2.3a, sometida a la carga mostrada.

La viga es isostática por causa de la rótula. Calculamos V_A con la condición de momento *flector* nulo en R .

$$M_f(R) = -q \times \overline{CR} \times \frac{\overline{CR}}{2} + V_A \times \overline{AR} = 0 \Rightarrow V_A = 180 \text{ kN}$$

El resto es aplicar las huellas (TR tabla 2.1) y poner números:

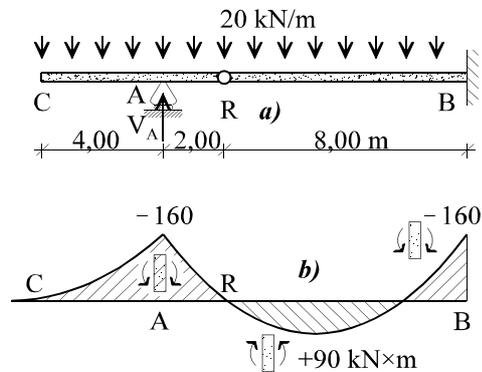


Figura 2.3
Viga empotrada-apoyada con rótula

- El tramo CA se comporta como una ménsula que se *agarra* a la viga principal. Una carga repartida dará momentos negativos en parábola de 2° grado (TR fig. 2.16d).

$$M_f(A) = -q \times \overline{CA} \times \frac{\overline{CA}}{2} = -160 \text{ kN}\times\text{m}$$

- En la viga AB la ley de momentos flectores será una parábola de 2° grado que parte del valor encontrado en A y pasa por R . El valor en B lo dará el cálculo:

$$M_f(B) = -q \times \overline{CB} \times \frac{\overline{CB}}{2} + V_A \times \overline{AB} = -160 \text{ kN}\times\text{m}$$

La igualdad de momentos flectores en A y en B es casual. Cambiando la posición de la rótula saldrían en B otros valores, que podrían incluso resultar positivos.

Problema 2.4. Dibujar y acotar la ley de esfuerzos axiles de la estructura de la figura 2.4a, sometida a las cargas puntuales mostradas.

El resultado se dibuja en la figura 2.4b, Conviene calcular las reacciones en B para observar consistencia entre ellas y los esfuerzos en este punto.

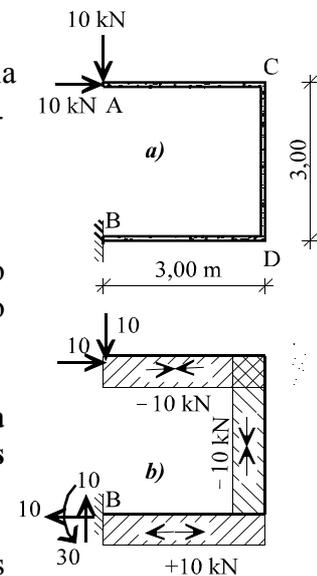


Figura 2.4
Pórtico con cargado y ley de esfuerzos axiles

Problema 2.5. Dibujar y acotar la ley de esfuerzos cortantes de la estructura de la figura 2.4a, sometida a las cargas puntuales allí mostradas.

Los resultados se muestran en la figura 2.5. Obsérvese que lo que es cortante en una viga es axil en la perpendicular y recíprocamente.

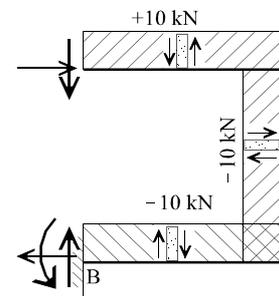


Figura 2.5
Esfuerzos cortantes en la estructura de la figura 2.4a

Problema 2.6. Dibujar y acotar la ley de momentos flectores de la estructura de la figura 2.4a, sometida a las cargas puntuales allí mostradas.

Los resultados se muestran en la figura 2.6.

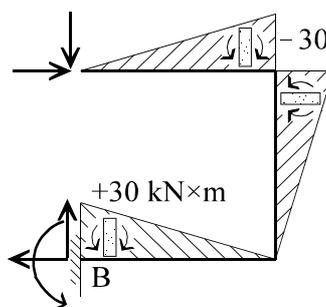


Figura 2.6
Leyes de momentos flectores en la estructura de la figura 2.4a

Problema 2.7. Calcular el esfuerzo axial en la viga BR del pórtico triarticulado de la figura 2.7.

Las reacciones son las mismas calculadas en el problema 1.8 y se muestran en la figura 2.7. De ellas:

$$N_{BR} = -37,5 \cos\alpha - 18,75 \sin\alpha = -41,93 \text{ kN}$$

Si observamos que en la viga BR no debe haber esfuerzo cortante, el cálculo resulta más fácil porque la resultante de las fuerzas que actúan en B debe de coincidir con el axil pedido:

$$N_{BR} = -\sqrt{37,5^2 + 18,75^2} = -41,93 \text{ kN}$$

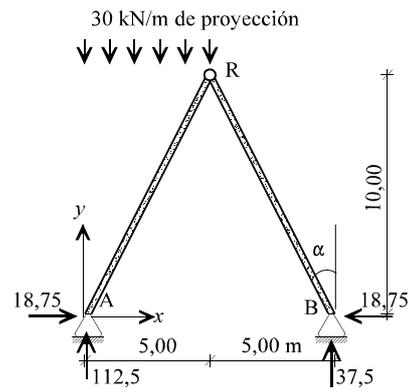


Figura 2.7
Pórtico triarticulado,
con cargas y reacciones

Problema 2.8. Dibujar y acotar la ley de momentos flectores de la viga AR del pórtico triarticulado de la figura 2.7.

La viga AR sólo puede resistir sus cargas trabajando como biapoyada, desarrollando las consabidas leyes de flectores y cortantes. (La vigas AR y BR sufrirán los esfuerzos axiles globales que les transmite la viga AR trabajando como biapoyada y ésta soportará además los esfuerzos cortantes y flectores de su carga local. Comprueba que el esfuerzo cortante en la viga BR es nulo.) Por consiguiente, la ley de momentos flectores en la viga AR será una parábola de 2º grado con su máximo $q_n L_r^2 / 8$ en el punto medio (figura 2.8), siendo q_n su carga normal por metro de longitud real L_r . Sin embargo, no haremos uso de esta fórmula sino que mejor calcularemos directamente con las cargas que vemos en la figura 2.7:

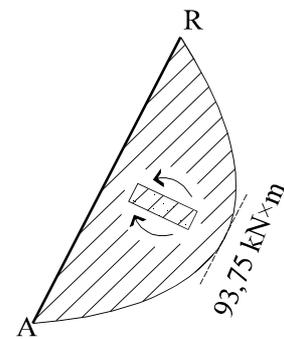


Figura 2.8
Ley de momentos flectores
en la viga AR de la figura 2.7

$$M_M = V_A \times 2,5 - H_A \times 5 - q \times 2,5 \times \frac{2,5}{2} = 93,75 \text{ kN} \times \text{m}$$

Usa tú la otra fórmula y comprueba que sale lo mismo. Y si no crees que es una parábola, mira esta ley:

$$M(x) = V_A x - H_A y(x) - qx \frac{x}{2}$$

con $y(x) = 2x$, la ecuación de la recta AR.

Problema 2.9. Dibujar y acotar la ley de esfuerzos cortantes en la viga AR del pórtico triarticulado de la figura 2.7.

Si derivamos la ley de momentos flectores (figura 2. 8) del problema anterior (ver propiedad de la tangente a la parábola en TR §2.8, p. 2.35) obtendremos una recta con valores en los extremos:

$$-Q_A = Q_R = \frac{4 \times 93,75}{\sqrt{5^2 + 10^2}} = 33,54 \text{ kN}$$

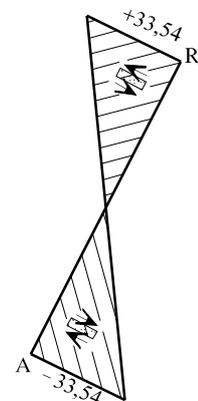


Figura 2.9
Ley de cortantes en la
viga AR de la figura 2.7

Si en lugar de tomar este camino optamos por el de proyectar las fuerzas apropiadas de la figura 2.7:

$$Q_A = -V_A \operatorname{sen} \alpha + H_A \operatorname{cos} \alpha = -33,54 \text{ kN}$$

$$Q_R = V_B \operatorname{sen} \alpha + H_B \operatorname{cos} \alpha = 33,54 \text{ kN}$$

La ley resultante es la recta con estos valores en sus extremos.

Problema 2.10. Dibujar y acotar la ley de esfuerzos axiles en la viga AR del pórtico triarticulado de la figura 2.7.

$$N_A = -V_A \operatorname{cos} \alpha - H_A \operatorname{sen} \alpha = -109,00 \text{ kN}$$

$$N_R = V_B \operatorname{cos} \alpha - H_B \operatorname{sen} \alpha = +25,16 \text{ kN}$$

La diferencia es la compresión producida por la carga exterior: $30 \times 5 \times \operatorname{cos} \alpha$. La ley resultante se muestra en la figura 2.10.

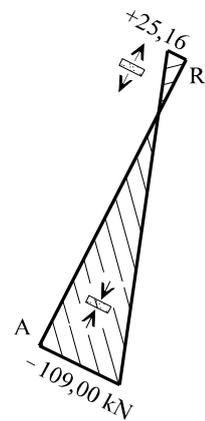


Figura 2.10 Ley de axiles en la viga AR de la figura 2.7

Problema 2.11. Dibujar un croquis mostrando el equilibrio del nudo R del pórtico triarticulado de la figura 2.7.

En la figura 2.11 se recogen los valores de los axiles y cortantes en el extremo R de las vigas que concurren en él. Es fácil comprobar:

$$\Sigma F_x \equiv 33,54 \operatorname{cos} \alpha + (-41,93 - 25,16) \operatorname{sen} \alpha = 0$$

$$\Sigma F_y \equiv (41,93 - 25,16) \operatorname{cos} \alpha - 33,54 \operatorname{sen} \alpha = 0$$

siendo $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2}$ de la figura 1.7.

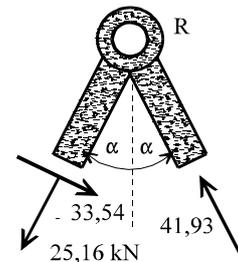


Figura 2.11 Equilibrio del nudo R de la figura 2.7

Problema 2.12. Conocida la ley de momentos flectores que sufre la viga de la figura 2.112a, hallar las cargas que la producen.

El procedimiento está descrito en TR §2.8. Como no vemos ningún salto en la ley de momentos flectores deducimos que no hay ningún momento exterior aplicado.

Derivando visualmente la ley de momentos flectores de la figura 2.12a (midiendo las pendientes en cada tramo) obtenemos la de cortantes de la figura 2.12b (no hay que cambiar el signo porque la ley de momentos ya estaba dibujada al revés). Los saltos en la ley de cortantes nos indican las posiciones y magnitudes de las cargas puntuales, que son las indicadas en la figura 2.12c. El método no discrimina entre acciones y reacciones.

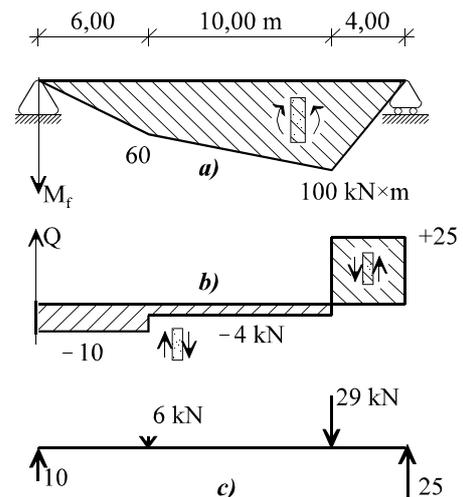


Figura 2.12 Obtención de las cargas a partir de los esfuerzos

Como todas las derivadas de la ley de cortantes son nulas, deducimos que no hay cargas repartidas aplicadas. El resultado final es el que se muestra en la figura 2.12c. Puedes comprobar que se cumple el equilibrio y que de las cargas obtenidas deduces la ley de momentos flectores de partida.

Problema 2.13 La viga *AMB* de la figura 2.13a se apoya como un balancín sobre un terreno indeformable en montículo de perfil circular cuyo radio se acota en la propia figura. El terreno puede limitar la libre deformación de la viga. Se pide: Dibujar y acotar la ley de momentos flectores de la viga.

La máxima curvatura que puede adquirir la viga es la del terreno subyacente que limita su deformación: $\chi_{m\acute{a}x} = 1/R = 4,167 \times 10^{-3}$ rad/m. Por consiguiente el máximo momento flector en la viga es $M_{m\acute{a}x} = EI\chi_{m\acute{a}x} = 416,667$ kN×m. Este momento lo alcanza la viga a la distancia $z = M_{m\acute{a}x}/P = 8,333$ m del extremo. La ley de momentos resultante es la de la figura 2.13b.

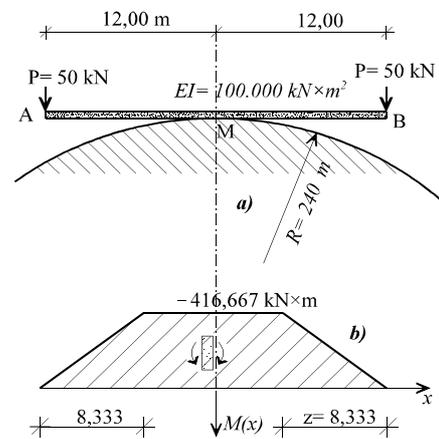


Figura 2.13
Flexión limitada

Si tienes curiosidad por saber qué fuerzas opone el terreno a la libre deformación de la viga, opera como en el problema anterior: encuentra qué cargas producen la ley de momentos de la figura 2.13b.

3. Tensiones y deformaciones

Problema 3.1. Dibujar, acotar y establecer el equilibrio entre las tensiones normales y tangenciales que afectan a la mitad izquierda de la cabeza superior de la viga de la figura 3.1a (en negro en dicha figura). Las dimensiones de la sección de la viga se dan en la figura 3.1b.

Para la sección dada $I = 0,0386 \text{ m}^4$. En la sección C se tiene $M = 500 \text{ kN}\cdot\text{m}$ y en la cabeza de esa sección las tensiones normales varían entre $\sigma_s = -6.482 \text{ kN/m}^2$ y $\sigma_a = -4.538 \text{ kN/m}^2$ (ver figura 3.1c). La cabeza superior recibe en forma de tensiones normales una fuerza total:

$$F_\sigma = \frac{\sigma_s + \sigma_a}{2} 0,60 \times 0,15 = -495,9 \text{ kN}$$

La cabeza superior recibe del alma unas tensiones tangenciales τ_a , calculadas en la fibra a , cuello de unión del ala con el alma (ver figura 3.1b), de valor:

$$\tau_a = \frac{100}{I} \frac{0,60 \times 0,15 \times \left(\frac{0,70}{2} + \frac{0,15}{2} \right)}{0,20} = 495,9 \text{ kN/m}^2$$

Estas tensiones tangenciales dan una resultante $F_\tau = \tau_a \times 0,20 \times 5 = 495,9 \text{ kN}$ (figura 3.1c) ya que las τ_a actúan sobre la superficie del "cuello a " solo en la longitud AD (que es en la que el cortante Q vale 100; el cortante es nulo entre D y C .) Como efectivamente $F_\sigma = -F_\tau$, queda demostrado el equilibrio de la cabeza superior entre las secciones A y C . Hemos comprobado numéricamente que las tensiones tangenciales surgen por el desequilibrio de las tensiones normales entre dos secciones de una viga.

Las τ_a van hacia la derecha en el tramo AD de la cabeza superior porque van hacia arriba en el plano perpendicular de la sección A : ambas manifestaciones de la tensión tangencial se alejan de la arista de intersección S (figura 3.1c) de los dos planos perpendiculares sobre los que actúan.

Problema 3.2. La tensión tangencial máxima en una sección es de la forma $\tau_{m\acute{a}x} = \beta \frac{Q}{A}$, siendo β un coeficiente adimensional que depende de la sección; Q , el esfuerzo cortante y A , el área de la sección. (Por ejemplo, $\beta = 1,5$ para la sección rectangular, $\beta = 1,33$ para la sección circular, etc.). Se pide calcular β para la sección de la figura 3.2. (Se recuerda que para la sección circular $I_{dd} = \pi R^4/4$, siendo dd cualquier eje diametral; y que para el semicírculo $y_G = \frac{4}{3\pi}R$ desde el semidiámetro.)

La teoría en que se demuestra la fórmula aplicable:

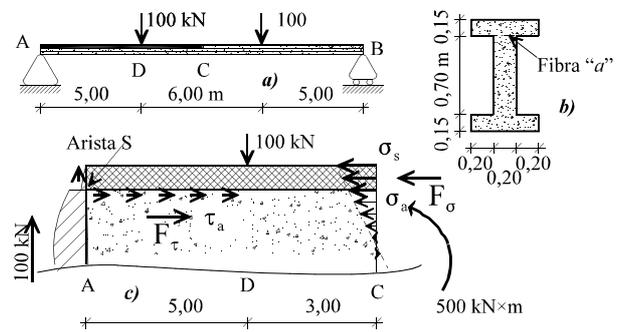


Figura 3.1
Equilibrio entre tensiones normales y tangenciales en el tramo AC de cabeza superior

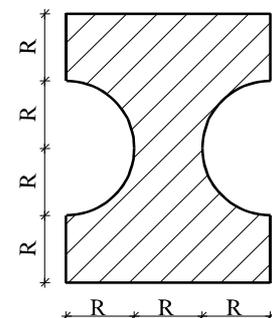


Figura 2
Sección sometida a esfuerzo cortante

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{Q}{I_{GG}} \frac{\mu_G}{b_G}$$

y el significado de cada término en ella puede encontrarse en TR §3.4. Los valores son:

$$I_{GG} = \frac{1}{12}(4R)^3 \times 3R - \frac{\pi R^4}{4} = 15,21R^4$$

$$\mu_G = 3R \times 2R \times R - \frac{\pi R^2}{2} \frac{4R}{3\pi} = 5,333R^2$$

$$A = 12R^2 - \pi R^2 = 8,858R^2$$

Por consiguiente:

$$\tau_G = \frac{Q}{15,21R^4} \frac{5,333R^3}{R} \frac{8,858R^2}{A} = 3,11 \frac{Q}{A}$$

Así pues, $\beta = 3,11$.

Problema 3.3. La sección de la figura 3.3a es evolutiva. Primero se construye en taller el alma (con rayado simple en la figura y hormigón de alta calidad, módulo de elasticidad alto), se coloca en obra y queda sometida al momento flector dado en la figura 3.3b. A continuación (sin retirar las cargas que producen el momento dado) se hormigonan en obra las alas (doblemente rayadas en la figura 3.3a con hormigón de calidad inferior, módulo de elasticidad menor). Una vez endurecido el nuevo hormigón, la sección final recibe el incremento de momento dado en la figura 3.3c. Se pide: dibujar el estado tensional en la sección definitiva.

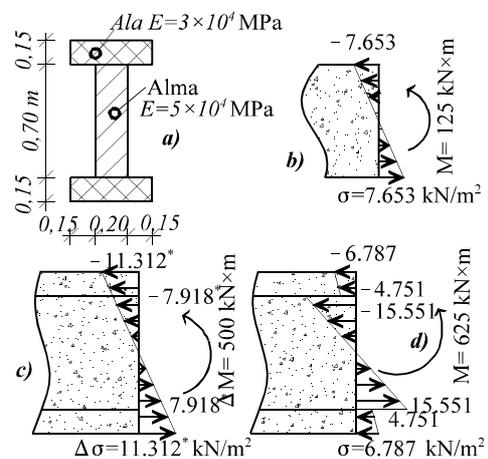


Figura 3.3

Diagramas de tensiones en sección evolutiva

En la figura 3.3b se han dibujado las tensiones que el momento flector produce en la sección activa en ese momento, que es el rectángulo del alma.

En la figura 3.3c se ha dibujado el estado tensional ficticio debido al *incremento* de momento que afecta a la sección completa. Para obtenerlas hemos calculamos el valor de I de la sección *doble-T homogeneizada* de la siguiente manera: reduciendo el ancho de cálculo de las alas de 0,50 m a 0,30 m para compensar por el menor módulo de elasticidad del hormigón de las alas respecto del hormigón del alma, $b_{c\acute{a}lculo} = b_{real} \times E_{real} / E_{c\acute{a}lculo}$.

$$I = \frac{1}{12} [0,30 \times (0,70 + 2 \times 0,15)^3 - (0,30 - 0,20) \times 0,70^3] = 0,0221 \text{ m}^4$$

Hemos adoptado como $E_{c\acute{a}lculo}$ el del alma (ver TR §3.3, “sección no homogénea”). A los valores encontrados para los incrementos de tensiones se les ha añadido un asterisco en la figura 3.3c para recordar que están calculados sobre sección *homogeneizada*.

En la figura 3.3d se han dibujado los valores finales de las tensiones, que son la suma de los de la figura 3.3b que ya tenía el alma más los incrementos de la sección completa homogeneizada de la figura 3.3c, que pone tensiones en alas y alma; con una salvedad. Estos valores totales se dibujan ya *deshomogeneizados*, de forma que coinciden con la suma hallada en el alma (cuyo cálculo se hizo con el módulo de elasticidad real) y son los de las alas *reducidos* por el factor

de 0,6 con el que antes habíamos reducido su ancho. Dicho con palabras: antes calculamos tensiones en un ala más estrecha porque su hormigón era peor. Estas tensiones las tenemos que redistribuir ahora al ancho real, mayor, por lo cual disminuyen.

Notas. (i) Para que el cálculo resultara sencillo y no ocultara las ideas fundamentales, hemos usado una sección evolutiva poco real. En la vida real la sección inicial suele incluir el alma y el ala inferior, y en obra se añade el ala superior (y no ambas como aquí). Esto hace que el centro de gravedad de la sección se desplace, que la sección no sea doblemente simétrica y que los cálculos se compliquen. (ii) Aquí hemos partido de los momentos que afectan a cada parte; en un problema normal hay que saberlos calcular (ver problema 3.5). Así, el momento flector que soporta la sección inicial debe incluir entre otras posibles causas, el peso *total* de la sección, porque el peso del hormigón fresco suele ser soportado por la sección inicial.

Problema 3.4. En el problema anterior, dibujar el diagrama de deformaciones de la sección final y calcular su curvatura.

Sabemos que la curvatura coincide con la pendiente del diagrama de deformaciones (TR §3.3 y §3.5); y que en una sección homogénea, la pendiente del diagrama de deformaciones es la pendiente del diagrama de tensiones dividida por E . Por ello todo lo que tenemos que hacer es ir al diagrama de tensiones de la figura 3.3d medir su pendiente y dividirla por E :

$$\chi_{final} = \frac{15.551}{5 \times 10^7 \cdot 0,35} = 0,889 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$$

La deformación en las fibras extremas será $\epsilon_{i,s} = \pm \chi \times 0,50 = \pm 0,444 \times 10^{-3}$ (figura 3.4).

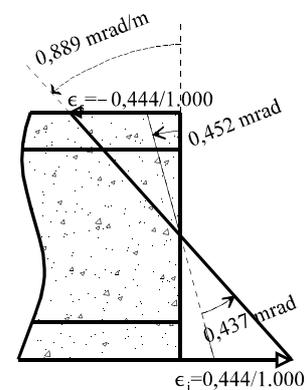


Figura 3.4
Diagrama de deformaciones

Discusión. En la figura 3.3d parece haber dos curvaturas desiguales: la del alma (que es la que hemos medido) y la del ala, que en atención a sus tensiones es:

$$\chi_{\sigma, ala} = \frac{6.787 - 4.751}{3 \times 10^7 \cdot 0,15} = 0,452 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$$

La discrepancia surge de que, cuando se colocaron las alas, el alma tenía ya una curvatura (figura 3.3b):

$$\chi_{inicial} = \frac{7.653}{5 \times 10^7 \cdot 0,35} = 0,437 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$$

y debemos suponer que el hormigón fresco de las alas adquirió esta curvatura sin tensionarse.

Nota: Si no hubiéramos tenido los diagramas de tensiones disponibles, las curvaturas las habríamos calculado con la fórmula tradicional $\chi = M/EI$:

$$\chi_{inicial} = \frac{125}{5 \times 10^7 \cdot 0,00572} = 0,437 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$$

$$\Delta \chi = \frac{500}{5 \times 10^7 \cdot 0,0221} = 0,452 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$$

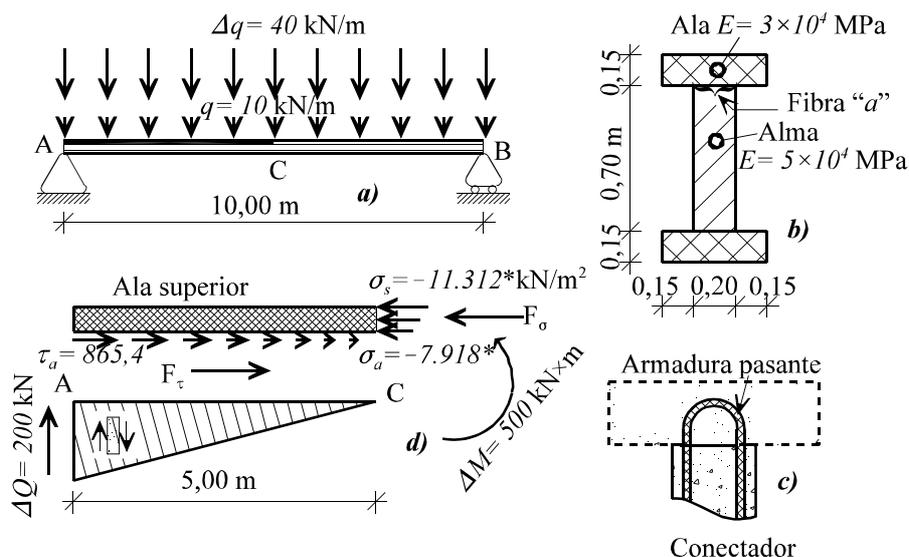


Figura 3.5
Tensiones rasantes en los conectadores de una sección evolutiva

Problema 3.5. La viga de la figura 3.5a se construye como en el problema 3.3: Se coloca primero el alma construida en taller, que inicialmente sufre ella sola la sobrecarga q de la figura 3.5a, y posteriormente, sin retirar q , se le adhieren en obra las alas, de un hormigón de menor calidad, hasta completar la sección de la figura 3.5b (idéntica a la de la figura 3.3a). Una vez endurecido el hormigón de las alas (conseguida la sección completa), se aplica el incremento de sobrecarga Δq de la figura 3.5a. Para conseguir una correcta unión entre los hormigones, se usan de trecho en trecho conectadores como el mostrado en la figura 3.5c. Se pide calcular la fuerza rasante total que deberán resistir los conectadores repartidos entre el apoyo A y el centro del vano C (conectando la porción de ala superior que se muestra en negro en la figura 3.5a).

En el problema 3.3 aprendimos que el ala solo sufre las tensiones debidas al ΔM debido al Δq . Lo mismo sucede con el esfuerzo rasante en la conexión (no había alas que conectar cuando aplicamos q). En el problema 3.1 aprendimos que el esfuerzo rasante se puede calcular de dos maneras: (i) integrando las tensiones tangenciales en el intervalo deseado o (ii) calculando el desequilibrio entre las tensiones normales en los extremos del intervalo. Lo haremos de las dos maneras:

$$(i) \quad \tau_a = \frac{200}{0,0221} \frac{0,30 \times 0,15 \left(\frac{0,70}{2} + \frac{0,15}{2} \right)}{0,20} = 865,4 \text{ kN/m}^2$$

$$F_\tau = \frac{1}{2} 865,4 \times 0,20 \times 5 = 432,7 \text{ kN}$$

El ancho de 0,30 m es el efectivo u homogeneizado del ala. La τ_a se calcula en la fibra a del alma (figura 3.5b), en cuello de unión del alma con el ala, donde pondríamos el pegamento si este fuera el medio de unión, en vez de los conectadores). El valor del momento de inercia lo obtuvimos en el problema 3.3 para la sección homogeneizada. El factor de $\frac{1}{2}$ sale de integrar la distribución lineal de esfuerzos cortantes (figura 3.5d) sobre la superficie de unión.

Las tensiones normales debidas al ΔM en la cabeza de la sección central (homogeneizada) las teníamos dibujadas en la figura 3.3c y las copiamos a la figura 3.5d. Estas producen la fuerza:

$$(ii) \quad F_{\sigma} = -\frac{11.312+7.918}{2} 0,30 \times 0,15 = -432,7 \text{ kN}$$

Esta es la fuerza que los conectadores tendrán que repartirse en todo el intervalo de conexión AC , pero no deberán estar uniformemente espaciados sino que $\frac{3}{4}$ de ellos deberán estar en los 2,5 m más próximos a los apoyos, y $\frac{1}{4}$ en los siguientes 2,5 m más próximos al centro de la luz.

¿Cuál de las dos procedimientos es más sencillo? Creo que el segundo, que nos evita (i) usar la compleja fórmula de las tensiones tangenciales e (ii) integrarlas cuando la ley de cortantes sea complicada. El método basado en las tensiones normales solo precisa calcularlas en los extremos del intervalo. Además, pone de relieve que el alumno sabe perfectamente cuál es el origen de las tensiones tangenciales.

Problema 3.6. Para la zapata rectangular rígida de la figura 3.6a, se pide dibujar y acotar el diagrama de tensiones en el terreno bajo la zapata, sabiendo que el suelo no admite tracciones.

Si aplicáramos la fórmula de Navier en el borde derecho de la zapata nos resultaría:

$$\sigma_d = \frac{-120}{1,20 \times 0,90} + \frac{36}{\frac{1}{12} 0,90 \times 1,20^3} \frac{1,20}{2} = +55,55 \text{ kN/m}^2$$

una tensión de tracción que el suelo no nos va a dar. Lo podríamos haber anticipado observado que la resultante N de las cargas está desplazada del c.d.g. la excentricidad $e = M/N = 0,3 > h/6 = 0,2$ m, fuera, pues, del núcleo central de la sección rectangular (ver TR §3.3). Habremos de buscar una distribución de tensiones bilineal como la de la figura 3.6b, en la que desconocemos los valores de σ_{\max} y d , incógnitas que determinaremos con las condiciones de que el diagrama de tensiones encierre los esfuerzos N y M dados:

$$\left. \begin{aligned} N &\equiv \frac{1}{2} \sigma_{\max} 0,90 d = 120 \\ M &\equiv 120 \left(\frac{h}{2} - \frac{d}{3} \right) = 36 \end{aligned} \right\}$$

De la segunda ecuación resulta $d = 0,90$ m y entrando en la primera, $\sigma_{\max} = 172,8 \text{ kN/m}^2$, con lo que se dibuja el diagrama de tensiones pedido en la figura 3.6b.

Problema 3.7. La sección T de la figura 3.7a corresponde a una viga sustentada isostáticamente; sufre un calentamiento uniforme que afecta sólo a la cabeza de la sección. Se pide calcular el alargamiento unitario y la curvatura producidos por dicho incremento de temperatura (no lineal sobre el canto).

Los valores mecánicos de la sección son $A = 0,24 \text{ m}^2$, $c_s = 0,30$ m, $c_i = 0,50$ m, $I = 0,0136 \text{ m}^4$.

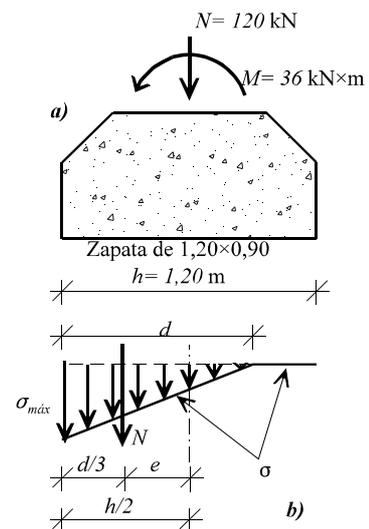


Figura 3.6
Diagrama de tensiones bajo zapata con carga fuera del núcleo central

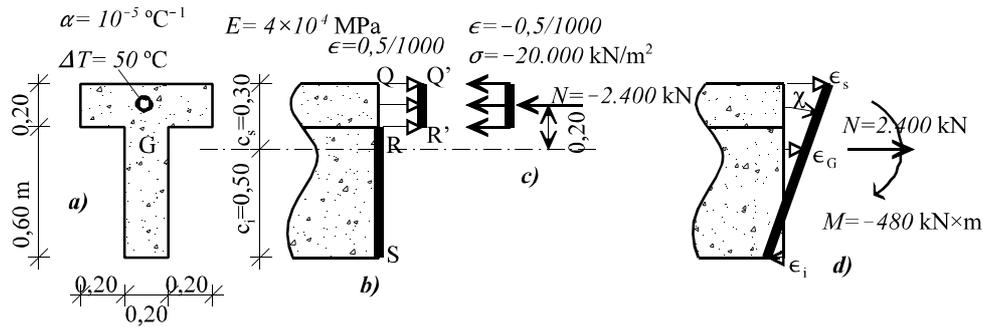


Figura 3.7

Deformaciones de una sección con calentamiento no lineal sobre el canto

Para conseguir que la sección se mantenga plana cumpliendo el mandato de Navier, utilizamos el *método del dictador* (TR §3.6). Si las fibras se deformaran independientemente, al dilatarse la cabeza la sección tomaría la forma quebrada $SRR'Q'$ de la figura 3.7b. El dictador trata inicialmente de impedir toda deformación aplicando sobre el área díscola las tensiones que hacen retornar $R'Q'$ a RQ (figura 3.6c). Como no dispone del axil necesario para ello durante largo tiempo, en cuanto recompone la sección libera dicho axil excéntrico; entonces la sección, cumpliendo la ley de Navier, se deforma como en la figura 3.7d. El estado final de deformaciones es el de la figura 3.7d:

$$\epsilon_G = \frac{N}{EA} = \frac{2.400}{4 \times 10^7 \cdot 0,24} = 0,250 \times 10^{-3}$$

$$\chi = \frac{M}{EI} = \frac{-480}{4 \times 10^7 \cdot 0,0136} = -0,882 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$$

$$\epsilon_s = \epsilon_G - \chi c_s = 0,515 \times 10^{-3}$$

$$\epsilon_i = \epsilon_G + \chi c_i = -0,191 \times 10^{-3}$$

Problema 3.8. En la misma sección del problema 3.7, sometida al incremento térmico en su cabeza, calcular las tensiones residuales internas que hacen cumplir la hipótesis de Navier.

Igual que antes sumamos las deformaciones de todo el proceso del dictador, ahora sumamos las tensiones. Antes las deformaciones en las figuras 3.7b y c se anulaban entre sí: pero ahora las tensiones no, porque las deformaciones en b tienen un origen térmico, no se corresponden con tensiones. Las tensiones resultantes de liberar se dibujan en la figura 3.8a. Coinciden con las deformaciones de la figura 3.6d multiplicadas por E. Aquí las obtendremos de nuevo:

$$\sigma_s = \frac{2.400}{0,24} - \frac{-480}{0,0136} \cdot 0,30 = +20.588 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_a = \frac{2.400}{0,24} - \frac{-480}{0,0136} \cdot 0,10 = +13.529 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_i = \frac{2.400}{0,24} + \frac{-480}{0,0136} \cdot 0,50 = -7.647 \text{ kN/m}^2$$

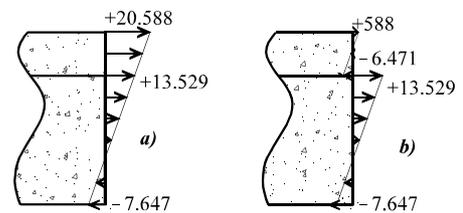


Figura 3.8

Diagrama no lineal de tensiones internas por calentamiento no lineal de la sección

La distribución total es la suma de la de la figura 3.8a más la del dictador de la figura 3.7c y se dibuja en la figura 3.8b. Sería interesante comprobar que esta última distribución de tensiones es *autoequilibrada*: no contiene ni axil ni momento.

4. Movimientos

Problema 4.1. La viga de la figura 4.1a sufre un descenso de 2 cm en su apoyo B. Calcular los movimientos y giros de todos sus puntos.

Por semejanza de triángulos, $v_R = 1,5 \cdot v_B = -3$ cm.

$\theta_A = v_B/6 = -3,333 \times 10^{-3}$ radianes es el giro de todos los puntos del tramo AR; y sus $v(x) = \theta_A \cdot x$

$\theta_C = -v_B/3 = 10 \times 10^{-3}$ radianes es el giro de todos los puntos del tramo RC y sus $v(z) = -\theta_C \cdot z$

El giro relativo en la rótula es $\theta_R^{rel} = \theta_C - \theta_A = 13,333 \times 10^{-3}$ radianes.

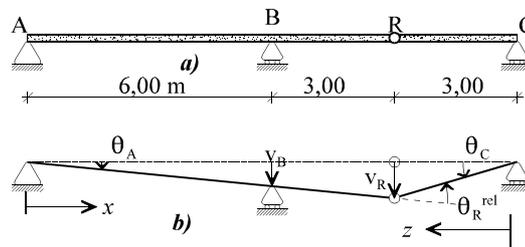


Figura 1

Viga que sufre un descenso de apoyo

Se comprueba que una viga isostática admite movimientos impuestos sin generar esfuerzos, sin deformarse.

Problema 4.2. La viga de la figura 4.1a tiene la sección rectangular y las propiedades del material de la figura 4.2a. La viga sufre en toda su longitud AC un incremento de temperatura de 50 °C en su cara superior, mantiene inalterada la temperatura de su cara inferior y admitimos que $\Delta T(y)$ es lineal sobre el canto. Se pide dibujar la deformada de la viga y calcular flecha en la rótula R.

Toda la viga adquiere las deformaciones:

$$\epsilon_G = \alpha \Delta T_G = 0,25 \times 10^{-3}$$

$$\chi_o = -\alpha \frac{\Delta T_s - \Delta T_i}{h} = -1,25 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$$

como aprendiste en TR §3.6. (La última dice simplemente que la curvatura es la pendiente del diagrama de deformaciones $\epsilon(y) = \alpha \cdot \Delta T(y)$.) La ley de curvaturas se dibuja en la figura 4.2b. Como toda la viga se curva “hacia abajo”, la deformada tendrá el aspecto de la figura 4.2c. Los dos tramos AR y RC deformados son arcos de circunferencia de radio $R = 1/\chi = 800$ m por lo que el alumno tiene un procedimiento geométrico —bastante más complicado que el que usaremos a continuación— para calcular los movimientos. Comprobemos si los movimientos resultan consistentes con la gráfica: θ_B y v_R deberán resultar negativos.

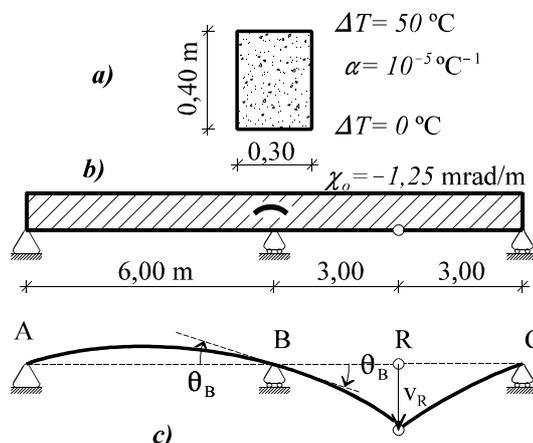


Figura 4.2

Movimientos de una viga sometida a deformaciones impuestas

Trabajamos con la ley de curvaturas como lo haríamos con una ley de flectores ya dividida por EI. Así, reemplazando M/EI por χ , extendemos las fórmulas de los giros en los apoyos para el caso de curvatura lineal entre A y B:

$$\theta_B = \frac{\chi_A L}{6} + \frac{\chi_B L}{3}$$

Aplicando la fórmula o con la condición de flecha cero en el extremo opuesto:

$$v_A = -\theta_B \times 6 - 1,25 \times 6 \times 3 = 0 \Rightarrow \theta_B = -3,75 \text{ mrad}$$

Calculamos la flecha en R partiendo del apoyo B :

$$v_R = \theta_B \times 3 - 1,25 \times 3 \times \frac{3}{2} = -16,875 \text{ mm}$$

Otros resultados son: $\theta_A = \theta_C = 3,75 \text{ mrad}$, $\theta_R^{rel} = 15 \text{ mrad}$, $u_B = 1,5 \text{ mm}$, $u_R = 2,25 \text{ mm}$, $u_C = 3 \text{ mm}$.

Observamos que la viga isostática acomoda deformaciones impuestas sin generar esfuerzos.

Problema 4.3. Cargamos la viga de la figura 4.1a con una carga puntual de 50 kN en la rótula R . Se pide: dibujar a estima la deformada y calcular el giro en el apoyo C (en función de EI).

La ley de momentos flectores de la figura 4.3a nos indica que el tramo AR se curvará todo él hacia abajo mientras que el tramo RC permanecerá recto. Por consiguiente la deformada tendrá el aspecto de la figura 4.3b.

El método general de cálculo del giro en un apoyo y en una rótula consiste en forzar que la flecha en otro apoyo sea nula. Como aquí tenemos dos incógnitas, el método general nos llevaría a resolver el sistema:

$$\left. \begin{aligned} v_B &= -\theta_C \times 6 + \theta_R^{rel} \times 3 - \frac{1}{2} \frac{150}{EI} \times 3 \times \frac{1}{3} = 0 \\ v_A &= -\theta_C \times 12 + \theta_R^{rel} \times 9 - \frac{1}{2} \frac{150}{EI} \times 3 \times \left(6 + \frac{1}{3} \times 3\right) - \frac{1}{2} \frac{150}{EI} \times 6 \times \frac{2}{3} \times 6 = 0 \end{aligned} \right\}$$

Observa en las ecuaciones anteriores cómo un giro *absoluto* θ_C positivo baja los puntos a su izquierda (los subiría a su derecha) mientras que un giro *relativo* θ_R^{rel} positivo los sube (a ambos lados, ver TR §4.3).

¡Qué pereza resolver el sistema!; es preferible acudir a trucos como el de hacer que v_R sea igual por la izquierda que por la derecha. La ley de flectores lineal en AB nos permite obtener θ_B por la fórmula $M_B L/3 EI$:

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{-150 \times 6}{3EI} = -\frac{300}{EI} \\ v_R &= \theta_B \times 3 - \frac{1}{2} \frac{150}{EI} \times 3 \times \frac{2}{3} = -\frac{1.350}{EI} \\ v_R &= -\theta_C \times 3 = -\frac{1.350}{EI} \Rightarrow \theta_C = \frac{450}{EI} \end{aligned}$$

Observa que el primer término de v_R es el giro de arrastre del “empotramiento B ” de la ménsula BR ; el segundo es la flecha $PL^3/3EI$ de la ménsula.

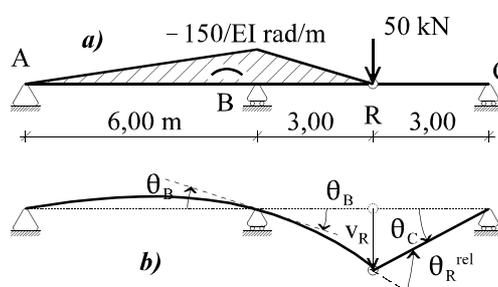


Figura 4.3
Movimientos en una viga por flexión

Problema 4.4. El arco circular de la figura 4.4 sufre el incremento de temperatura mostrado. Calcular los movimientos de su clave C.

a) *Procedimiento físico.* Si el apoyo B no fuera “avieso”, B iría a B' y C, a C', con movimientos:

$$u_B = 20 \times 50 \alpha = 10 \times 10^{-3} \text{ m}; \quad v_B = 0$$

$$u_C = v_C = 10 \times 50 \alpha = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

El apoyo avieso obliga a que en B se produzca un movimiento vertical $v_B = u_B \operatorname{tg} \varphi = 5,77 \text{ mm}$. Ello lo logra mediante un giro de compatibilidad en torno a A de valor $\theta_A = v_B / AB = 0,289 \text{ mrad}$. Observa que, por movimientos pequeños: (i) tomamos el ángulo igual a su tangente y (ii) dividimos por la distancia nominal, no por la deformada AB'. Si no lo hiciéramos así, a doble v_B no le correspondería doble θ_A : romperíamos la característica de linealidad de movimientos, tan importante para mantener los cálculos sencillos. (En cambio, con el ángulo φ no hicimos simplificación porque (i) no era pequeño sino (ii) un ángulo *geométrico*, no de movimiento.)

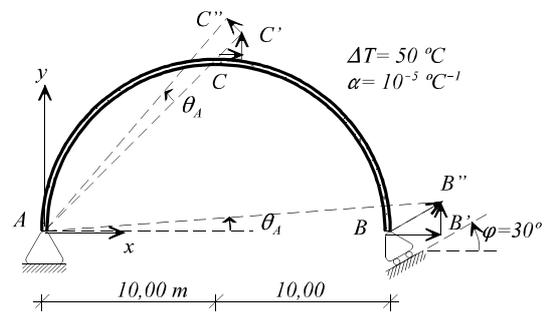


Figura 4.4
Movimientos en un arco con apoyo avieso

Además de llevar B' a B'', el giro θ_A lleva C' a C'', produciendo:

$$\Delta u_C = -\theta_A \times 10 = -2,89 \text{ mm}$$

$$\Delta v_C = \theta_A \times 10 = 2,89 \text{ mm}$$

La linealidad nos ha permitido (i) calcular estos movimientos como *giro* \times *distancia perpendicular* y (ii) sumarlos a los anteriores para obtener los valores finales: $u_C = 2,11 \text{ mm}$, $v_C = 7,89 \text{ mm}$.

b) *Procedimiento matemático.* Usamos las fórmulas de Bresse (TR §4.4) para un punto cualquiera del arco:

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} u(x,y) &= \alpha \Delta T x - \theta_A y \\ v(x,y) &= \alpha \Delta T y + \theta_A x \end{aligned} \right\}$$

Aplicamos la condición de contorno en B(20,0):

$$\frac{v_B}{u_B} = \frac{20 \times \theta_A}{20 \times \alpha \Delta T} = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \theta_A = 0,289 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Con este valor y las coordenadas de C(10,10) entramos en las fórmulas (1) anteriores y obtenemos los mismo resultados que antes: $u_C = 2,11 \text{ mm}$, $v_C = 7,89 \text{ mm}$.

Advierte que si antes no hubiéramos despreciado el alargamiento de AB frente al propio AB en el cálculo de θ_A , no habríamos obtenido los mismos resultados que con este procedimiento matemático, que lleva la linealidad incorporada en el ADN de las fórmulas de Bresse.

Discusión. ¿Qué procedimiento es mejor? Para entender lo que sucede, el físico. Para cálculos complejos, el matemático.

Problema 4.5. El pórtico triarticulado de la figura 4.5 sufre el incremento de temperatura mostrado. Calcular los movimientos de su rótula R .

Al punto R , como perteneciente a la barra AR , le pide el cuerpo irse a R' , en la prolongación de AR a la distancia:
 $RR' = \alpha \Delta T \times AR = 5,59 \text{ mm}$.

Sin embargo, como perteneciente a la barra BR querría irse a la posición simétrica R_1 . La “negociación” entre ellos (o la simetría del problema) lo llevará finalmente a R'' , girando en torno a A la cantidad θ_A necesaria para quedar en la vertical de R . La trayectoria $R' \rightarrow R''$ es en realidad una circunferencia, que en el caso de movimientos pequeños degenera en un segmento perpendicular al radio. $R'R''$ es perpendicular a AR , luego:

$$v_R = RR'' = RR' / \cos \varphi = 6,25 \text{ mm. } \theta_A = R'R'' / AR = 0,25 \text{ mrad.}$$

Observa que dividimos por la longitud de barra nominal y no por la deformada, mantener la linealidad.

De los otros movimientos sabemos que $u_R = 0$ y queda por calcular el movimiento relativo θ_R^{rel} en la rótula. Lo hacemos por observación: $\theta_R^{rel} = \theta_R^{(d)} - \theta_R^{(i)} = \theta_B - \theta_A = -2 \times \theta_A = -0,500 \text{ mrad}$ (cierre).

De otra manera: $\theta_A + \Sigma \theta_i - \theta_B = 0$ siendo $\Sigma \theta_i$ la suma o integral de todos los giros *relativos* sufridos por la estructura por cualquiera causa entre A y B (ver TR §4.3 fórmula (4.3-2)). Como entre A y B no hay más giros relativos que θ_R^{rel} , llegamos al mismo número anterior.

Resultados: $u_R = 0, v_R = 6,25 \text{ mm, } \theta_R^{rel} = -0,500 \text{ mrad.}$

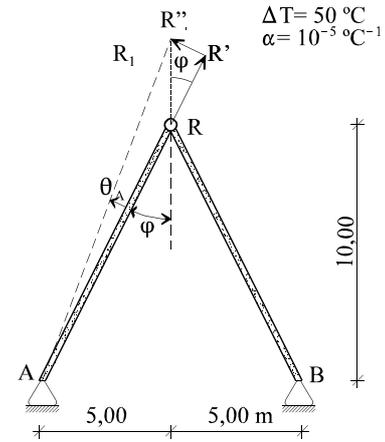


Figura 4.5
Movimientos en un pórtico triarticulado

Problema 4.6. El pórtico triarticulado de la figura 4.5 sufre el incremento de temperatura mostrado sólo en la barra RB . Calcular los movimientos de su rótula R .

a) Método “fuzzy logic”. Superponiendo los resultados de este caso con los de su simétrico tendremos que obtener los del caso anterior. De aquí, $v_R = 3,125 \text{ mm, } \theta_R^{rel} = -0,25 \text{ mrad}$.

b) Método físico. El punto R como perteneciente a BR querría irse a R' en la prolongación de BR a la distancia $\delta_{BR} = BR \times \alpha \Delta T = 5,59 \text{ mm}$ (figura 4.6). Como perteneciente a AR no querría moverse. La “negociación” consiste en que las barras giren en torno a B y a A hasta encontrarse en R'' . Los segmentos de “minicircunferencia” degeneran en los segmentos rectos $R'R''$ perpendicular a BR y RR'' perpendicular a AR .

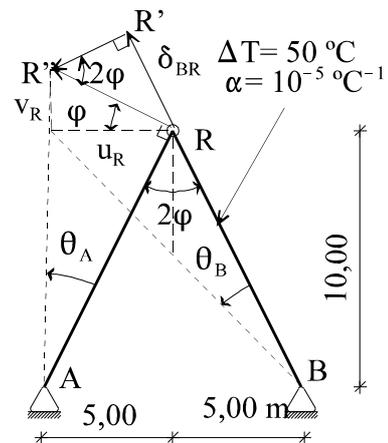


Figura 4.6
Pórtico con calentamiento de una barra

Los segmentos $R'R''$ y RR'' , por ser perpendiculares a las barras, forman entre sí el mismo ángulo que ellas, 2φ . Y RR'' forma con la horizontal el mismo ángulo que “su” barra con la vertical, φ . Por consiguiente:

$$u_R = -\frac{\delta_{BR}}{\text{sen}2\varphi} \cos\varphi = -\frac{\delta_{BR}}{2\text{sen}\varphi} = -6,25 \text{ mm}$$

$$v_R = \frac{\delta_{BR}}{\text{sen}2\varphi} \text{sen}\varphi = -\frac{\delta_{BR}}{2\cos\varphi} = 3,125 \text{ mm}$$

Ahora los ángulos:

$$\theta_A = \frac{\delta_{BR}}{\text{sen}2\varphi} = 0,625 \text{ mrad} ; \quad \theta_B = \frac{\delta_{BR}}{BR} = 0,375 \text{ mrad}$$

No hace falta que te diga que este método no resulta fácil. Veamos el:

c) *Método matemático.* Haremos que los movimientos de R proporcionados por la barra AR sean iguales que los proporcionados por la barra BR :

$$\left. \begin{aligned} u_R^{(AR)} &\equiv -\theta_A \times 10 = -5 \times \alpha \Delta T - \theta_B \times 10 \equiv u_R^{(BR)} \\ v_R^{(AR)} &\equiv \theta_A \times 5 = 10 \times \alpha \Delta T - \theta_B \times 5 \equiv v_R^{(BR)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \theta_A &= 0,625 \text{ mrad} \\ \theta_B &= 0,375 \text{ mrad} \end{aligned} \right\}$$

Ahora, volviendo con los resultados al primer miembro de las ecuaciones obtenemos los movimientos de R . Y $\theta_R^{rel} = \theta_R^{(d)} - \theta_R^{(i)} = \theta_B - \theta_A$.

En este caso el método matemático es considerablemente más fácil. Conviene, no obstante, hacer el dibujo del método físico (figura 4.6) para anticipar los signos.

Resultados: $u_R = -6,250 \text{ mm}$, $v_R = 3,125 \text{ mm}$, $\theta_R^{rel} = -0,250 \text{ mrad}$.

Problema 4.7. Calcular el movimiento horizontal del extremo B del muro de la figura 4.7a que se haya sometido al empuje hidrostático mostrado.

Estudiamos 1 m de longitud de muro con lo que la carga por unidad de longitud se iguala con la presión. La carga hidrostática es lineal desde cero en C hasta 50 kN/m en A . El empuje total es 125 kN/m ; el momento en la base es $125 \times 5/3 = 208,333 \text{ kN} \times \text{m}$. $EI = 312.500 \text{ kN} \times \text{m}^2$. Para calcular movimientos necesitamos la ley de momentos flectores, que es la parábola de 3^{er} grado (dos más que la carga) entre C y A , tangente en C (figura 4.7b).

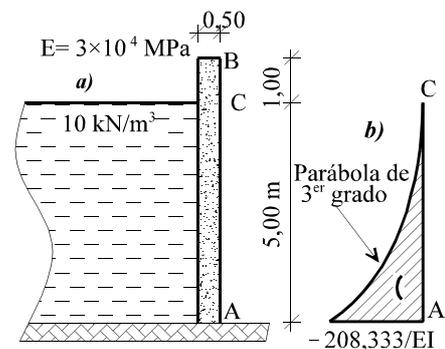


Figura 4.7
Muro sometido al empuje del agua

$$u_B = \frac{1}{4} \frac{208,333}{EI} \times 5 \times \left(6 - \frac{1}{5} \times 5 \right) = \frac{1,302}{EI} = 4,17 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Problema 4.8. Calcular el movimiento vertical del nudo B de la estructura de la figura 4.8a. Se desprecia la deformación por axil de la viga.

Para calcular los esfuerzos, descomponemos la fuerza P según las direcciones de la viga y del cable (figura 4.8b) No nos interesa el axil en la viga. En el cable es:

$$(a) \quad T \cos 30^\circ = P \Rightarrow T = 57,7 \text{ kN}$$

Con este axil el cable se alarga:

$$(b) \quad \delta_{CB} = \frac{TL}{EA} = 9,62 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Al alargarse el cable el punto B se mueve a B'' , que está allí donde se cortan las circunferencias —degeneradas en segmentos ortogonales— de radios AB y CB' (figura 4.8c):

$$v_B \cos 30^\circ = \delta_{CB} \Rightarrow v_B = 11,1 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Es muy importante que te des cuenta de la **contragradiencia**:

- al establecer el equilibrio en (a) **proyectamos las fuerzas de las barras sobre el nudo**, mientras que
- al establecer la compatibilidad en (b) **proyectamos los movimientos del nudo sobre las barras**.

Compara los triángulos de fuerzas y movimientos en las figuras 4.8b y c.

Problema 4.9. El pórtico de la figura 4.9a sufre un incremento de temperatura uniforme. Se pide calcular los movimientos del apoyo B .

Debido al alargamiento de AC , B se moverá 2,4 mm hacia la derecha. Debido al alargamiento de BC se producirá (figura 4.9b) un giro $\theta_A = v_C/AC = 0,225$ mrad. que a su vez moverá B hacia la derecha otros 1,35 mm. Total:

$$u_B = 3,75 \text{ mm}, v_B = 0, \theta_B = 0,225 \text{ mrad.}$$

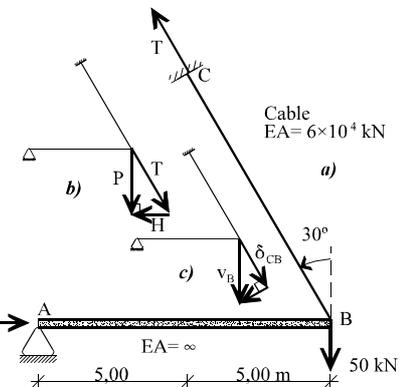


Figura 4.8
Movimientos en viga colgada

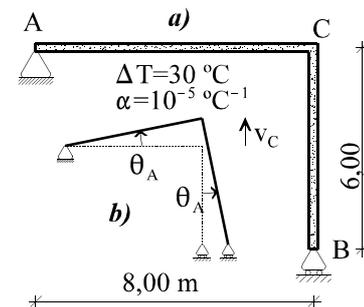


Figura 4.9
Pórtico sometido a dilatación uniforme

Problema 4.10. Debido a una variación térmica sobre el canto, el arco circular de la figura 4.4a adquiere una curvatura uniforme (adicional a la suya propia) $\chi_o = -1$ mrad/m. Calcular los movimientos de su apoyo B y de su clave C .

El giro total (distribuido en forma de curvatura) sobre el arco ACB tiene un valor de $\Theta_I = \chi_o \pi R = -31,42$ mrad y se localiza en G_I , cuya posición se determina mediante el 1^{er} teorema de Gulding (TR §1.1) $y_G = 2R/\pi = 6,366$ m (figura 4.10a). Ese giro convierte a la semicircunferencia en una semielipse al reducir su diámetro llevando B a B' (BB' perpendicular a $G_I B$, figura 4.10b). Pero B' no está en plano de deslizamiento de B ; mediante el giro θ_A lo llevaremos a B'' que sí está. Estas consideraciones físicas las hacemos para predecir los signos de los movimientos; usaremos, en cambio, el método matemático obligando simplemente a que se cumpla la condición de contorno $v_B/u_B = \tan \varphi$.

$$\frac{v_B}{u_B} = \frac{\theta_A \times 2R + \Theta_1 \times R}{\Theta_1 \times y_G} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta_A = \Theta_1 \left(\frac{y_G}{2\sqrt{3}R} - \frac{1}{2} \right) = 9,936 \text{ mrad}$$

Con este valor calculamos:

$$u_B = \Theta_1 \times y_G = -200 \text{ mm}$$

$$v_B = u_B \text{tg}30^\circ = -115 \text{ mm}$$

$$\theta_B = \theta_A + \Theta_1 = -21,48 \text{ mrad}$$

Para calcular los movimientos de C basta con reconocer que el giro total (distribuido como curvatura) entre A y C es $\Theta_1/2$ localizado en el c.d.g del arco AC, que está en G_2 (figura 4.10a):

$$u_C = -\theta_A \times 10 - \frac{\Theta_1}{2} \times (10 - 6,366) = -42,27 \text{ mm}$$

$$v_C = \theta_A \times 10 + \frac{\Theta_1}{2} \times 6,366 = -0,650 \text{ mm}$$

$$\theta_C = \theta_A + \frac{\Theta_1}{2} = -5,77 \text{ mrad}$$

Tal vez sea más fácil haciendo las integrales directamente, con las variable φ de la figura 4.10c (TR §4.4):

$$u_B = \int_0^\pi \chi_o R \text{sen}\varphi R d\varphi = -200 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$v_B = \theta_A \times 2R + \int_0^\pi \chi_o R (1 - \text{cos}\varphi) R d\varphi = \theta_A \times 2R - 0,3142$$

$$\frac{v_B}{u_B} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta_A = 9,936 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$u_C = -\theta_A \times R - \int_0^{\pi/2} \chi_o R (1 - \text{sen}\varphi) R d\varphi = -42,27 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$v_C = \theta_A \times R + \int_0^{\pi/2} R \text{cos}\varphi R d\varphi = -0,655 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Problema 4.11. El arco triarticulado de la figura 4.11a sufre una curvatura impuesta en todo su desarrollo $\chi_o = -1 \text{ mrad/m}$. Se pide calcular los movimientos de la rótula en clave R.

Si la curvatura impuesta afectara al pórtico de la figura 4.5, el problema sería trivial porque dicha deformación no cambia la longitud de las vigas rectas. En el arco de la figura 4.11a, por el contrario, la curvatura impuesta hará acercarse los puntos A y R

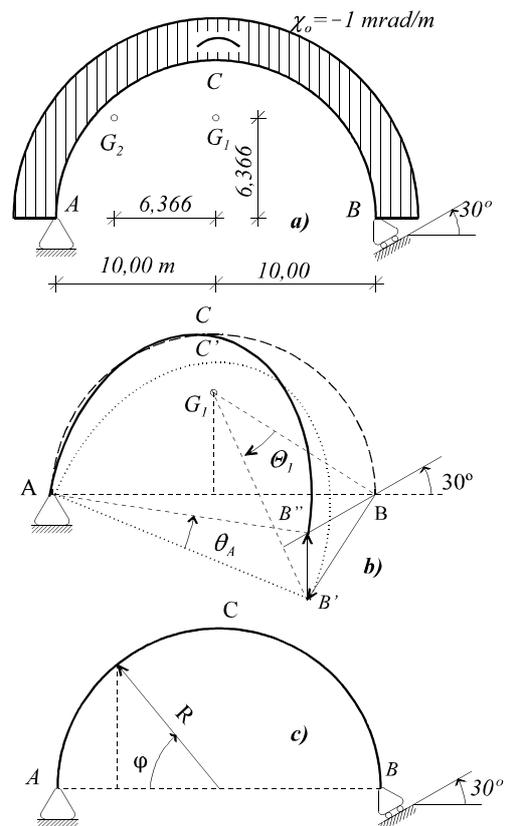


Figura 4.10 Movimientos en un arco por curvatura impuesta

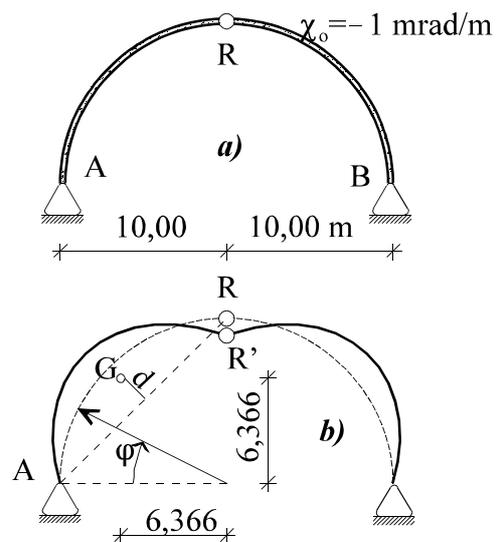


Figura 4.11 Movimientos por curvatura impuesta en arco triarticulado

(figura 4.11b) porque el c.d.g. G del arco AR no está sobre la cuerda (figura 4.11a). Podemos calcular este acortamiento fácilmente: $\delta_{AR} = \Theta \times d = -30,35 \text{ mm}$ siendo Θ el ángulo total “curvado” entre A y R $\Theta = \chi_o \pi R/2 = -15,71 \text{ mrad}$ y d la distancia de G a la recta AR : $d = (6,366 - 5)\sqrt{2} = 1,932 \text{ m}$. (La posición de G se determinó en el problema anterior). Por consiguiente: $v_R = \delta_{AR}\sqrt{2} = -42,92 \text{ mm}$.

Nos dejaremos de trucos de profe repelente y lo recalculamos usando el método general:

$$u_R = -\theta_A \times R - \int_0^{\pi/2} \chi_o R (1 - \sin\varphi) R d\varphi = 0 \Rightarrow \theta_A = 5,708 \text{ mrad}$$

$$v_R = \theta_A \times R + \int_0^{\pi/2} \chi_o R \cos\varphi R d\varphi = -42,92 \text{ mm}$$

Al llegar a R hemos girado $\theta_R^{(i)} = \theta_A + \Theta = -10 \text{ mrad}$ luego $\theta_R^{rel} = 20 \text{ mrad}$.

Problema 4.12. Calcular la flecha máxima de la viga cargada de la figura 4.12a.

El cálculo se simplifica bastante aprovechando que el punto central C no gira por simetría. Si te imaginas sentado en C , creerás que estás en el empotramiento de una ménsula y te parecerá que el punto B sube. Calculas ese valor con la ley de momentos flectores entre C y B (figura 4.12b):

$$v_C^B = \frac{90}{EI} \times 5 \times 2,5 - \frac{1}{3} \frac{90}{EI} \times 3 \times \frac{1}{4} \times 3 = \frac{1.057,5}{EI} \text{ m}$$

Hacemos la corrección “de astrónomo”: como B no sube será que yo bajo, luego $v_C = -1.057/EI \text{ m}$.

Visto “científicamente” (TR §4.4):

$$v_B = v_C + \int_{x_C}^{x_B} \frac{M(x)}{EI} (x_B - x) dx = 0$$

$$v_C = - \int_{x_C}^{x_B} \frac{M(x)}{EI} (x_B - x) dx = - \frac{1.057,5}{EI}$$

Problema 4.13. Calcular la flecha máxima de la viga cargada de la figura 4.13a.

Volveremos a aplicar el truco anterior de viga simétrica y otro más: para calcular el momento respecto de B del área de momentos $BTQR'$ (figura 4.13b) descompondremos ésta en suma de la parte triangular BRR' (contribución de la reacción V_B) menos la parte parabólica TRQ , que dibujamos “recta” encima como $T'R'Q'$ (contribución de la carga repartida):

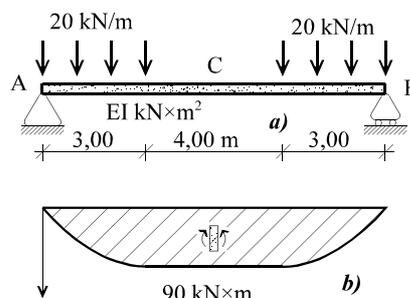


Figura 4.12

Cálculo de flecha en viga simétrica

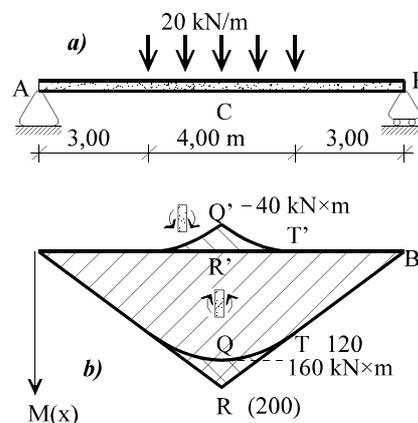


Figura 4.13

Cálculo de flecha en viga simétrica

$$v_B \equiv v_C + \int_{x_C}^{x_B} \frac{M(x)}{EI} (x_B - x) dx$$

$$v_B \equiv v_C + \frac{1}{2} \frac{200}{EI} 5 \frac{2}{3} 5 - \frac{1}{3} \frac{40}{EI} 2 \left(5 - \frac{1}{4} 2 \right) = 0 \Rightarrow v_C = -\frac{1546,7}{EI} \text{ m}$$

Ahora comprueba que la suma de las flechas del problema anterior y de éste iguala la de la carga uniforme en toda la viga $v_C = -\frac{5qL^4}{384EI}$.

Problema 4.14. Calcular la flecha en el centro C de la viga cargada de la figura 4.14a.

Como en el problema anterior, descomponemos la ley de momentos flectores en sus componentes lineal y de segundo grado (figura 4.14b). Ello nos permite calcular los movimientos sin hacer integrales:

$$v_A \equiv -\theta_B \times 10 + \frac{1}{2} \frac{250}{EI} 10 \frac{1}{3} 10 - \frac{1}{3} \frac{250}{EI} 5 \frac{1}{4} 5 = 0$$

Puede que prefieras calcular sin truco y con integrales:

$$v_A \equiv -\theta_B \times 10 + \frac{1}{2} \frac{125}{EI} 5 \left(5 + \frac{1}{3} 5 \right) + \int_0^5 \frac{75x - 10x^2}{EI} x dx = 0$$

En cualquier caso obtienes $\theta_B = 364,58/EI$ rad. Con este valor:

$$v_C = -\theta_B \times 5 + \frac{1}{2} \frac{125}{EI} 5 \frac{1}{3} 5 = -\frac{1.302}{EI} \text{ m}$$

Comprueba que, efectivamente, es la mitad de la flecha para la carga uniforme en todo el vano $v_C = -\frac{5qL^4}{384EI}$.

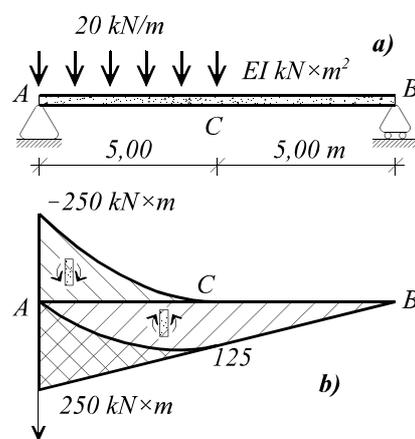


Figura 4.14
Cálculo de flecha en viga asimétrica

Problema 4.15. La ménsula de la figura 4.15a tiene por sección transversal la doble T de la figura 4.15b. El material es acero, $E=2 \times 10^8$ kN/m². Soporta la carga $P=5$ kN en el extremo (figura 4.15a). Se pide:

- a) Calcular la flecha máxima.
- Sin retirar la carga anterior, se refuerza la sección de la viga soldando platabandas a las alas (rayadas en la figura 4.15c) en la mitad del vano (figura 4.15d). A continuación se incrementa la carga hasta $P=10$ kN. Se pide:
- b) Calcular la nueva flecha máxima.

Se trata de una estructura evolutiva, como las de los problemas 3.3 y 3.5. En la sección original $I_0 = 4.099$ cm⁴ y en la sección reforzada $I_1 = 8.513$ cm⁴ (observa el notable incremento logrado por las platabandas). ($EI_0 = 8.198$ kN·m², $EI_1 = 17.026$ kN·m²).

La flecha inicial se calcula por la fórmula:

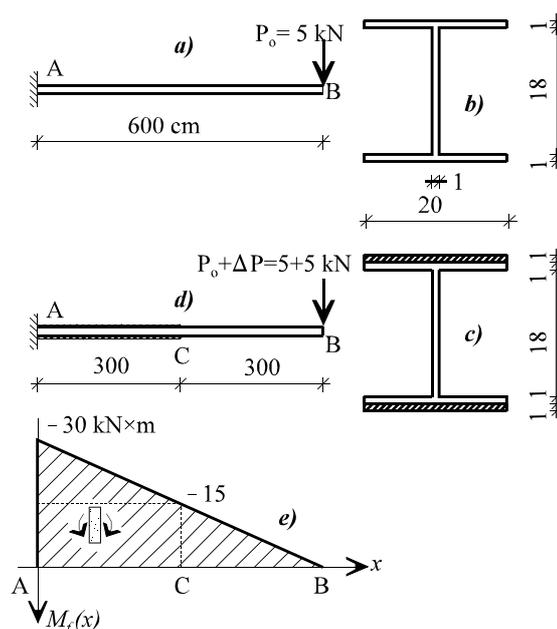


Figura 4.15

$$v_o = -\frac{PL^3}{3EI_o} = -43,9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

o bien con la ley de momentos flectores de la figura 4.15e (olvida las subdivisiones):

$$v_{B,o} = -\frac{1}{2} \frac{30}{EI_o} \times 6 \frac{2}{3} 6 = -43,9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

El incremento de flecha debido al incremento de carga lo obtenemos de la ley de *incrementos* de momentos flectores, que coincide casualmente con la dibujada en la figura 4.15e, y que se ha subdividido para tener en cuenta que una parte de la ley va a ser dividida por EI_1 y la otra, por EI_o :

$$\Delta v_B = -\frac{1}{2} \frac{15}{EI_1} \times 3 \left(6 - \frac{1}{3}\right) - \frac{15}{EI_1} \times 3 \left(6 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{15}{EI_o} \times 3 \frac{2}{3} 3 = -24,0 \times 10^{-3} \text{ m}$$

La flecha total será de $-67,9$ mm.

Problema 4.16. En la viga del problema anterior se produce la descarga total. Se pide:

- Dibujar y acotar la ley de curvaturas residuales.
- Calcular la flecha residual.

La solución más rápida se obtiene haciendo las siguientes consideraciones:

- Sólo la parte AC de la estructura puede tener valores residuales (de tensiones, curvaturas y deformaciones; no, de momentos flectores) porque sólo ella ha sido modificada (siendo isostática).
- Sólo la carga inicial P_o puede dar tensiones y deformaciones residuales porque se aplicó sobre una estructura y se retiró de otra distinta. La carga ΔP se aplicó y retiró de la misma estructura por lo que no afectará al resultado final.

La curvatura final en A será:

$$\chi_A = \frac{M_o}{EI_o} - \frac{M_1}{EI_1} = -\frac{30}{8.198} + \frac{30}{17.026} = -1,897 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$$

La curvatura residual en C tendrá la mitad del valor en A . La ley de curvaturas residuales se dibuja en la figura 4.16. Con dicha ley se calcula la flecha residual en B como sigue (esta vez descomponemos el trapecio de curvaturas en dos triángulos, por puro capricho):

$$v_{B,res} = -\frac{1}{2} 1,897 \times 3 \left(6 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} 0,949 \times 3 \left(6 - \frac{2}{3}\right) = -19,92 \text{ mm}$$

que efectivamente coincide con la flecha final del problema anterior *menos* la que se recupera con la descarga (el doble de Δv_B hallado allí).

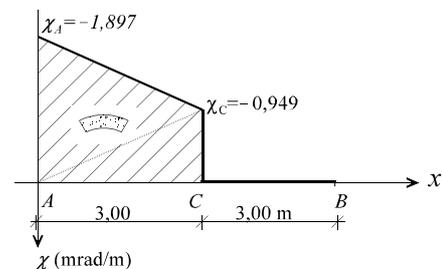


Figura 4.16
Ley de curvaturas residuales

5. Ecuaciones diferenciales

Problema 5.1. La siguiente función es la deformada de una viga $[0,L]$ sometida a una cierta carga y apoyada de alguna manera en sus extremos.

$$v(x) = -\frac{q_o L^4}{120 EI} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^5 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 2 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

Se pide: encontrar qué carga actúa sobre la viga y qué tipos de apoyos la sustentan (más verosímilmente).

Como $v(0) = 0$ y $v(L) = 0$, sospechamos que está al menos biapoyada.

$$v'(x) = -\frac{q_o L^3}{120 EI} \left[5 \left(\frac{x}{L} \right)^4 - 9 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 4 \left(\frac{x}{L} \right) \right]$$

Como además $v'(0) = 0$ y $v'(L) = 0$, debemos suponer que está biempotrada. (No se puede afirmar con toda certeza porque pudiera dar la casualidad de que los momentos y cargas aplicados en los extremos que anulan las flechas y los giros no fueran reacciones sino cargas exteriores.)

$$v''''(x) = -\frac{q_o}{EI} \left(\frac{x}{L} \right)$$

Como la ecuación diferencial de la viga es $EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x)$

deducimos que $q(x) = -q_o \frac{x}{L}$ (figura 5.1).

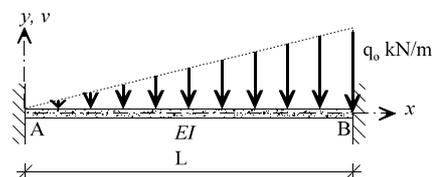


Figura 5.1
Carga y sustentación de una viga

Problema 5.2. La siguiente función es la deformada de una viga $[0,L]$ sometida a una cierta carga y apoyada de alguna manera en sus extremos.

$$v(x) = -\frac{q_o L^4}{120 EI} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^5 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 2 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

Se pide: encontrar las reacciones (o cargas exteriores) en sus extremos.

La ley de momentos flectores es:

$$M(x) = EI v''(x) = -\frac{q_o L^2}{120} \left[20 \left(\frac{x}{L} \right)^3 - 18 \frac{x}{L} + 4 \right]$$

De aquí sacamos $M_A = -M(0) = q_o L^2/30$, $M_B = M(L) = -q_o L^2/20$.

La ley de cortantes es:

$$Q(x) = -EI v'''(x) = \frac{q_o L}{120} \left[60 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 18 \right]$$

que arroja $V_A = -Q(0) = 3q_o L/20$, $V_B = Q(L) = 7q_o L/20$.

Problema 5.3. Dada la función $v(x)$ del problema anterior, que es la deformada de una viga $[0,L]$ sometida a una cierta carga y apoyada de alguna manera en sus extremos, se pide: encontrar la sustentación más verosímil de la viga.

$v(0) = 0, v(L) = 0; \theta(0) = 0, \theta(L) = 0$, la viga está probablemente biempotrada.

Problema 5.4. La función:

$$v(x) = -\frac{q_o L^4}{360 EI} \left[-\left(\frac{x}{L}\right)^6 + 15\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 40\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 45\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right]$$

es la deformada de una viga empotrada en el extremo $x=0$ y libre en el extremo $x=L$ (como puede comprobarse) sometida a una cierta carga repartida $q(x)$. Se pide:

a) Probar que $v(x)$ cumple las condiciones de contorno que corresponden al extremo libre $x=L$.

b) Obtener las reacciones resultantes en el extremo empotrado $x=0$.

Derivando:

$$v''(x) = -\frac{q_o L^2}{360 EI} \left[-30\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 180\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 240\frac{x}{L} + 90 \right]$$

$$v'''(x) = -\frac{q_o L}{360 EI} \left[-120\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 360\frac{x}{L} - 240 \right]$$

a) Observamos que $M(L) = EIv''(L) = 0, Q(L) = -EIv'''(L) = 0$, luego el extremo L es libre.

b) Obtenemos: $M_A = -EIv''(0) = q_o L^2/4, V_A = EIv'''(0) = 2q_o L/3$.

6. Hiperestáticas

Problema 6.1. Hallar cómo se reparte la fuerza H (aplicada en C) entre los dos muelles de la figura 6.1.

Es el problema hiperestático más sencillo que se puede proponer. La resolución “canónica” consiste en aplicar $H-X_2$ sobre el muelle 1 y X_2 sobre el 2, e igualar sus movimientos en C . En Resistencia, en lugar de trabajar con rigideces k_1 y k_2 lo hacemos con sus inversos, los coeficientes de

flexibilidad $c_i=1/k_i$. Resulta que el muelle 1 se lleva $H \frac{c_2}{c_1+c_2}$ en tracción (porque le *entra* por

la cara positiva) y el 2, $H \frac{c_1}{c_1+c_2}$ en compresión (porque le *entra* por la cara negativa). Si ahora

cambiamos la notación haciendo $c_1 \rightarrow a$, $c_2 \rightarrow b$, $a+b \rightarrow L$ los resultados son $H_A = H \frac{b}{L}$, $H_B = H \frac{a}{L}$,

que ponen énfasis en el hecho de que el reparto es el mismo que el de reacciones horizontales en una viga de sección constante (TR §6.2) y que este reparto, a su vez (sólo para sección constante), es el mismo que el de verticales en viga de cualquier sección (TR §1.1). Con esta idea clara, en adelante simplificaremos mucho, muchísimo, los cálculos hiperestáticos. Ver a continuación.

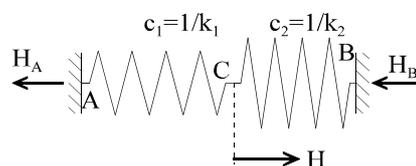


Figura 6.1
Reparto de carga entre dos muelles

Problema 6.2. Hallar el valor y el signo de las reacciones de la viga cargada axialmente de la figura 6.2.

El reparto (hiperestático) de cargas horizontales entre apoyos es, en vigas de sección constante, igual que el reparto (isostático) de cargas verticales. Lo hacemos, por consiguiente, como en el problema 1.1. Una carga uniforme de 20 kN daría $H_A = H_B = -100$. La carga parabólica que “falta”, de magnitud 200/3 y con c.d.g. en $x = 10/4$ daría $H_A = 50$, $H_B = 16,667$. Total, $H_A = -50$ kN, $H_B = -83,333$ kN.

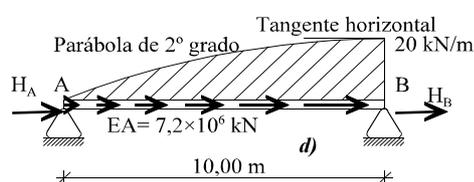
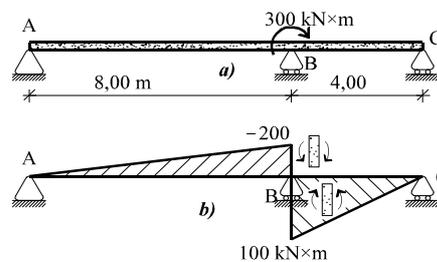


Figura 6.2
Reparto de cargas horizontales entre los apoyos

Problema 6.3. Dibujar la ley de momentos flectores en la viga continua de la figura 6.3a.

Este problema es semejante al 6.1. Basta considerar que las vigas se comportan como muelles rotativos que dificultan el giro en B con coeficientes de flexibilidad $c_i = L_i/3EI$. Así pues, habremos de repartir el momento en partes proporcionales a $c_1 = 8$, $c_2 = 4$, con lo que

$$M_1 = \frac{c_2}{c_1+c_2} M_B = -100 \text{ kN}\times\text{m} ; \quad M_2 = \frac{c_1}{c_1+c_2} M_B = -200 \text{ kN}\times\text{m}$$



Esos valores son los de los momentos *exteriores* sobre las correspondientes vigas. Los *internos* o flectores mantienen el signo si atacan por la cara positiva o lo cambian si por la negativa (TR §2.3). Por consiguiente, la ley de momentos flectores resultante es la de la figura 6.3b. Observa que el salto en *B* es el valor del momento exterior en ese punto.

Problema 6.4. Calcular los esfuerzos permanentes en los muelles de la figura 6.4 si obligamos a cerrar el intervalo *C-C'* entre ellos.

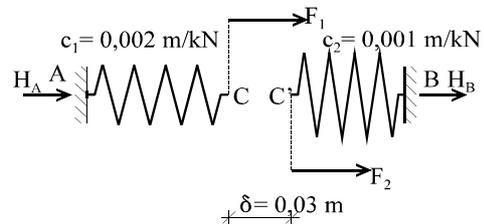


Figura 6.4

Esfuerzos en estructura evolutiva

Este es el problema más elemental de *estructura evolutiva*: aplicamos una carga sobre una estructura, modificamos la estructura (frecuentemente pasándola de isostática a hiperestática) y luego retiramos la carga de la estructura modificada. Como carga y descarga no se aplican sobre la misma estructura, quedan esfuerzos y tensiones residuales en la estructura final. Veamos que podemos actuar de distintas maneras, pero en todas ellas se llega al mismo estado final.

Procedimiento 1. Tiro del punto *C* del muelle 1 con la fuerza F_1 necesaria para conseguir que *C* alcance la posición *C'*. Entonces conecto los dos muelles y retiro la fuerza F_1 .

Carga:
$$F_1 = \frac{\delta}{c_1} = 15 \text{ kN} \Rightarrow N_1 = +15 \text{ kN} ; N_2 = 0 \text{ kN}$$

Descarga. Como en la figura 6.1 con $H = -15 \text{ kN}$, resulta $N_1 = -5 \text{ kN}$, $N_2 = 10 \text{ kN}$.

Resultado final: $N_1 = N_2 = 10 \text{ kN}$, $-H_A = H_B = 10 \text{ kN}$.

Procedimiento 2. Tiro del punto *C'* del muelle 2 con la fuerza F_2 necesaria para conseguir que *C'* alcance la posición *C*. Entonces conecto los dos muelles y retiro la fuerza F_2 .

Carga:
$$F_2 = \frac{\delta}{c_2} = -30 \text{ kN} \Rightarrow N_1 = 0 \text{ kN} ; N_2 = +30 \text{ kN}$$

Descarga. Como en la figura 6.1 con $H = 30 \text{ kN}$, resulta $N_1 = +10 \text{ kN}$, $N_2 = -20 \text{ kN}$.

Resultado final: $N_1 = N_2 = 10 \text{ kN}$, $-H_A = H_B = 10 \text{ kN}$.

Procedimiento 3. Tiro simultáneamente del punto *C* del muelle 1 con una fuerza X y del punto *C'* del muelle 2 con una fuerza $-X$ hasta cerrar el intervalo δ . Entonces conecto los dos muelles y retiro las fuerzas $\pm X$.

Carga:
$$X(c_1 + c_2) = \delta ; \Rightarrow N_1 = X = +10 \text{ kN} ; N_2 = X = +10 \text{ kN}$$

En este caso no hay descarga porque las cargas se anulan mutuamente.

Resultado final: $N_1 = N_2 = 10 \text{ kN}$, $-H_A = H_B = 10 \text{ kN}$.

Enseñanzas:

1) Por cualquier procedimiento llegamos al mismo resultado.

2) Quedan esfuerzos internos como consecuencia de haber modificado las estructuras entre la carga y la descarga.

3) Observamos que el procedimiento más económico, el que requiere hacer menos fuerza, es el de tirar simultáneamente con dos fuerzas iguales y opuestas en los dos extremos, que es el de aplicar un tensor entre ellos. Para los otros supuestos habríamos necesitado un gato y un apoyo adicional que soportara la $-F_i$ aplicada.

Problema 6.5. Dibujar y acotar la ley de momentos flectores de la viga de la figura 6.5a.

Como en una viga biapoyada cualquiera:

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{q_x L_y^2}{8} = 250 \text{ kN}\times\text{m}$$

y la ley es una parábola de 2º grado. Si no lo crees toma momentos desde A:

$$M(y) = 100y - 20y\frac{y}{2}$$

Nota: Hemos hecho uso de la propiedad por la cual las reacciones de una viga de rigidez axial EA constante son paralelas a la carga (TR §6.2). Con rigidez EA variable el razonamiento no vale porque las reacciones no son paralelas; sin embargo, el resultado sí vale porque la ley de momentos flectores no resulta afectada por la rigidez EA . En flexión la viga es isostática. Variarán el valor y la orientación de las reacciones pero el cortante en los extremos será siempre el mismo: $\pm 100\cos 30^\circ = \pm 86,6 \text{ kN}$.

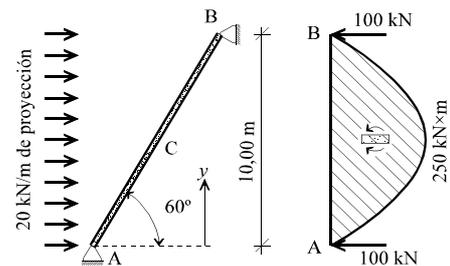


Figura 6.5
Esfuerzos en viga de sección constante.

Problema 6.6. Dibujar y acotar en magnitud y orientación las reacciones de la viga de la figura 6.6a en la que la rigidez axial EA del tramo AC es doble que la del tramo CB .

Separaremos las componentes normal Q_n y axial Q_a de la carga total $Q = 200 \text{ kN}$ (figura 6.6b) y expresémoslas por unidad de longitud real de viga $L_r = 10/\sin 60^\circ = 11,547 \text{ m}$; resultan $q_n = 15 \text{ kN/m}$, $q_a = 8,66 \text{ kN/m}$. La primera producirá la ley de momentos flectores de la figura 6.5b y la segunda, esfuerzos axiales.

Para calcular el reparto de cargas axiales entre los apoyos aplicaremos un truco. Colocamos en C un apoyo provisional (figura 6.6c). Cada tramo que en él confluye (que es de sección constante) manda hacia cada apoyo la mitad de su carga: las reacciones serán las de la figura 6.6c. Seguidamente retiramos el apoyo provisional de C , lo que equivale a eliminar su carga superponiendo otra igual y opuesta (figura 6.6d). Ésta ya no se reparte por igual entre los apoyos A y B porque la rigidez de los tramos no es igual. Sucede como en el problema 6.1, que el tramo AC , doblemente rígido, se llevará el doble que su hermano débil CB : las reacciones son las de la figura 6.6d. La situación final de cargas y reacciones es la suma de las mostradas en las figuras 6.6c y d , y se pinta en la figura 6.6e.

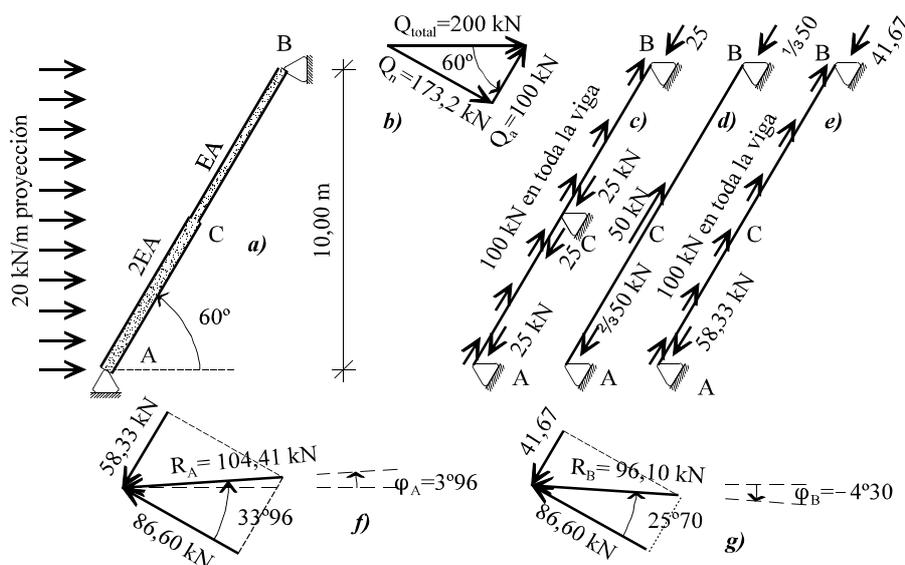


Figura 6.6

Inclinación de las reacciones en viga de rigidez axial variable

Ya tenemos las reacciones axiales; falta combinarlas con los cortantes $Q_n/2$ en cada apoyo. Esto lo hacemos en la figura 6.6f para la reacción R_A y en la figura 6.6g para la reacción R_B . En las propias figuras se obtienen sus inclinaciones respecto de la normal a la viga y respecto de la horizontal. La prueba del 9 de nuestros cálculos es que $R_A \cos \varphi_A + R_B \cos \varphi_B = Q_{total}$, $R_A \sin \varphi_A + R_B \sin \varphi_B = 0$. Sin duda este procedimiento es más económico que el general de dejar deslizar un apoyo, calcular su movimiento y buscar la reacción que nos lo anule. Y es muy ventajoso si necesitas calcular el movimiento final del punto C, que resultaría ser el resultante de la figura 6.6d.

Problema 6.7. El anillo circular de la figura 6.7a tiene la sección cuadrada de la figura 6.7b y las características del material indicadas en ella. El anillo sufre la variación de temperaturas parabólica sobre el canto indicada en la figura 6.7c. Se pide calcular el alargamiento del radio y la ley de momentos flectores.

Las tensiones “del dictador” que anularían las deformaciones térmicas (TR §3.6) son $\sigma = -\epsilon(T) \times E$ y se dan en la figura 6.7d. Éstas totalizan el axil y el momento siguientes:

$$N = \frac{1}{3}(-60.000) \times 0,5 \times 0,5 = -50 \text{ kN}$$

$$M = 50 \left(\frac{0,05}{2} - \frac{0,05}{4} \right) = 0,625 \text{ kN} \times \text{m}$$

El axil se puede liberar porque el anillo es libre para dilatarse, pero el momento no se puede liberar porque el anillo no se puede curvar (más de lo que ya está) o no cerraría. (El anillo tiene una curvatura negativa de valor 0,2 rad/m, que lo hace más largo por fuera que por dentro; la temperatura intenta agravar esa diferencia, sobrecurvarlo. El momento flector lo impide.) Así pues el anillo sufre un momento $M = 0,625 \text{ kN} \times \text{m}$ positivo uniforme sobre todo el anillo (que mantiene el ángulo de 360° que el exceso de curvatura querría “sobrecerrar” la cantidad de 188,5 mrad como en la figura 6.7e si estuviera cortado).

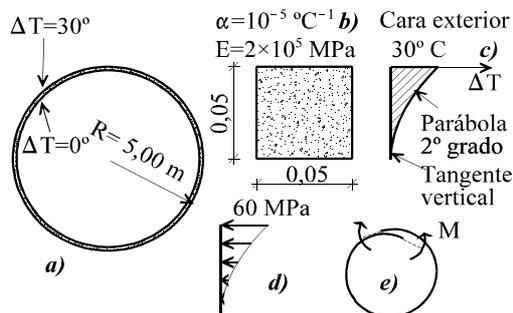


Figura 6.7

Anillo sometido a variación térmica no lineal

Al liberar N se produce una deformación $\epsilon_G = -\frac{N}{EA} = 0,1 \times 10^{-3}$ que es la deformación media que se observa en la figura 6.7c. Por la paradoja de Fernández (TR §4.4) ésta es también la deformación del radio. Así pues éste aumenta $\Delta R = 0,5$ mm.

Problema 6.8. Dibujar el diagrama de tensiones internas en una sección cualquiera del anillo del problema 6.7.

El diagrama de tensiones internas en cualquier sección se obtiene por superposición de las “del dictador” que anularían por completo las deformaciones del anillo (figura 6.8a copiada de la 6.7d) y las resultantes de liberar el axil encerrado en ese diagrama, que son una tracción uniforme de $\sigma = \frac{N}{A} = 20.000 \text{ kN/m}^2$ El diagrama final se da en la

figura 6.8c. Es fácil comprobar que no encierra axil pero es obvio que contiene un momento positivo (el calculado en el problema anterior por la “cuenta de la vieja”):

$$N = 0,05 \int_{-0,025}^{0,025} \sigma(y) dy = 0 \text{ kN}$$

$$M = -0,05 \int_{-0,025}^{0,025} \sigma(y) y dy = 0,625 \text{ kN}\times\text{m}$$

Compruébalo con $\sigma(y) = -24(y+0,025)^2 \times 10^6 + 20.000$.

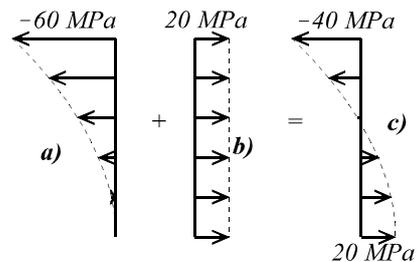


Figura 6.8
Tensiones internas en el anillo de la figura 6.7

7. Pórticos y arcos

Problema 7.1. Calcular la magnitud de la fuerza H que nos conviene aplicar en el apoyo deslizante B del pórtico de la figura 7.1a para que el máximo momento flector en la estructura sea lo menor posible.

Sin la fuerza H , la ley de momentos flectores en el pórtico es la parábola de 2º grado de puntos la figura 1.7b (nula en las patas), cuyo máximo es $qL^2/8 = 250 \text{ kN}\times\text{m}$. La fuerza exterior H en B (con su reacción igual y opuesta en el apoyo A), subirá la ley “hacia arriba” (TR §7.1) la cantidad $H\times 5$. Lo ideal es subirla la mitad del máximo anterior, para que el valor de 250 se convierta en ± 125 . Para ello necesitamos $H = 25 \text{ kN}$.

La ley de momentos flectores resultante es la de la figura 7.1b; hemos reducido a la mitad el máximo momento flector en el dintel a costa de producir flectores en las patas.

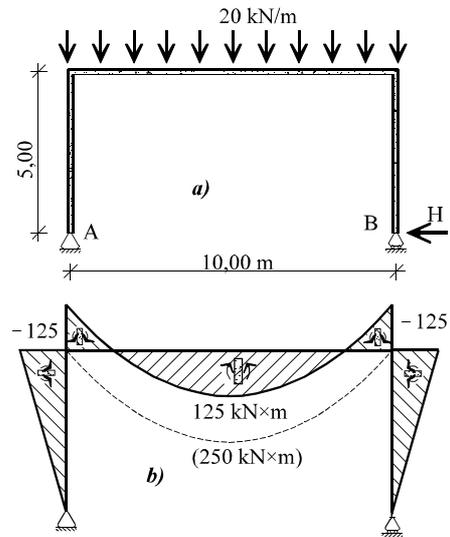


Figura 7.1

Optimización de la ley de momentos flectores

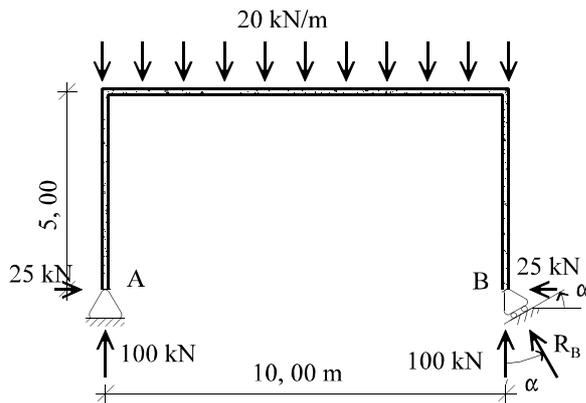


Figura 7.2

Optimización de la inclinación del apoyo deslizante B

problema anterior) necesitaremos $\text{tg}\alpha = H_B / V_B = 25/100$, $\alpha = 14^\circ 04'$.

La ley de momentos resultante será la misma de la figura 7.1b.

Problema 7.3. Dibujar la ley de momentos flectores del pórtico de la figura 7.3a.

Descomponemos la carga en simétrica y antisimétrica. La parte simétrica sólo produce un esfuerzo axial de -25 kN en el dintel. Para la parte antisimétrica la estructura se vuelve isostática y la resolvemos como en figura 7.3b mitad derecha. Extrapolamos la ley de momentos flectores a la mitad izquierda.

Problema 7.2. Calcular la inclinación α óptima del apoyo deslizante B del pórtico de la figura 7.2 para que el máximo momento flector en la estructura sea lo menor posible.

Lo que pretendemos aquí es lograr lo mismo que en el problema anterior pero gratis: que en lugar de tener que aplicar la fuerza H pagando por ella, nos la regale el terreno. Las reacciones verticales serán de 100 kN cada una en cualquier caso. Para que la horizontal valga 5 kN (resultado del

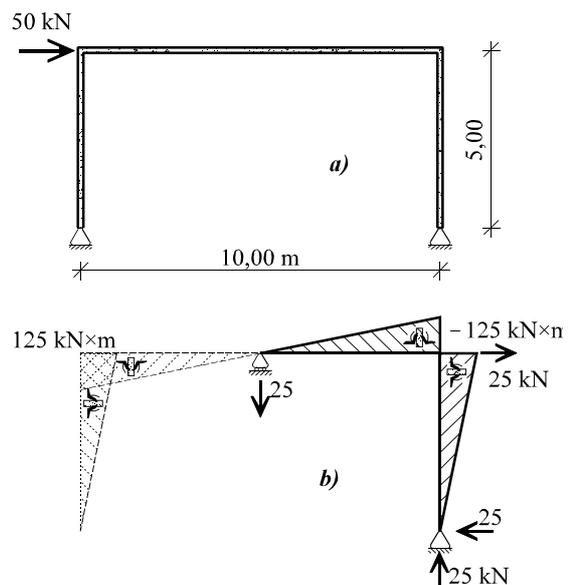


Figura 7.3

Pórtico antisimétrico salvo en axiles

Enseñanza: en un pórtico biarticulado como el de la figura 7.3a con cargas horizontales aplicadas en cualquier punto del dintel, pasamos la mitad de la carga total a cada apoyo. Las reacciones verticales y la ley de momentos flectores saldrán del equilibrio.

Problema 7.4. Dibujar la ley de momentos flectores del pórtico de la figura 7.4a.

Es un pórtico con un grado de hiperestatismo. Por simetría resulta intraslacional (el punto medio M no se moverá ni a derecha ni a izquierda, y la longitudes CM , MD no variarán porque despreciamos las deformaciones por esfuerzo axial; los puntos C y D tampoco se moverán verticalmente porque la longitud de las patas permanece inalterada por la misma razón). El método más efectivo para calcular estas hiperestáticas es el de viga continua (TR §6.4). Para ello descomponemos como en la figura 7.4b, contando ya que la simetría exige $M_D = M_C$. La ecuación hiperestática de igualdad de giros en C lado pata y en C lado dintel es:

$$\theta_C^i \equiv -\frac{M_C 5}{3EI} = \frac{M_C 10}{3EI} + \frac{M_C 10}{6EI} - \frac{20 \times 10^3}{24EI} \equiv \theta_C^d \Rightarrow M_C = 125 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Con este valor (y su simétrico en D) se dibuja la ley de momentos flectores, que (por pura casualidad) resulta igual a la de la figura 7.1b.

Problema 7.5. Calcular los esfuerzos en la clave C y en el apoyo A del arco de la figura 7.5.

Sabemos que el arco dado es antifunicular de la carga; por ello, sólo sufrirá esfuerzos axiales. Las reacciones verticales valdrán 200 kN cada una por equilibrio vertical. Las horizontales las calculamos con la condición de momento flector nulo en cualquier punto, en particular en la clave C . De ahí sale $H = 125$ kN en cada apoyo, con las orientaciones de la figura. Los esfuerzos son $N_B = H_B = -125$ kN. Para el esfuerzo axial en A no necesitamos proyectar porque la reacción total

lleva la dirección de la tangente: $N_A = -\sqrt{V_A^2 + H_A^2} = -235,8$ kN. (Te sugiero que compruebes que la reacción en A lleva la dirección de la tangente usando la propiedad en TR §2.8)

Problema 7.6. La estructura de la figura 7.6 es un arco circular, biempotrado en sus extremos, con tangente horizontal en su extremo B y sometido a una carga normal (radial). Se pide calcular los esfuerzos en los empotramientos.

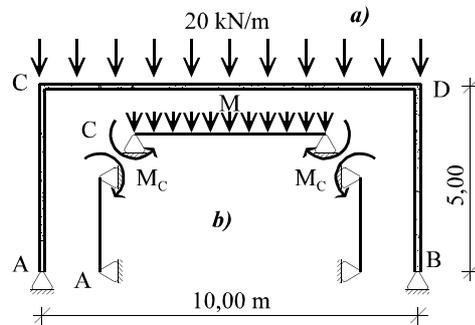


Figura 7.4
Pórtico intraslacional

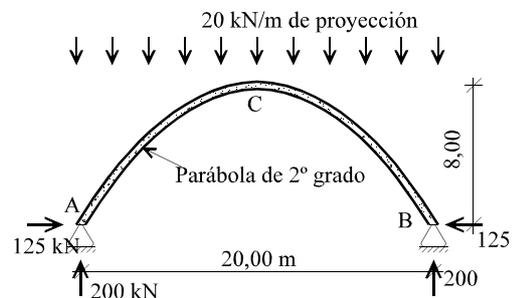


Figura 7.5
Arco parabólico

El arco circular es el antifunicular de la presión (normal) uniforme (TR §7.2); por consiguiente el único esfuerzo es el axil. Eso lo debes saber. Lo que quizás ya no sea razonable esperar que sepas es que ese axil es constante y de valor $-q_e R$ (dado por la fórmula de los tubos). Esto lo vamos a encontrar usando el equilibrio.

Tenemos que empezar por el problema geométrico de encontrar el radio y la abertura del arco. Si O es su centro (fuera del dibujo):

$$\begin{aligned} \overline{OA}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{OC}^2 \\ R^2 &= 20^2 + (R-5)^2 \Rightarrow R = 42,50 \text{ m} \\ \varphi &= \arcsen \frac{AC}{R} = 28^\circ 07' \end{aligned}$$

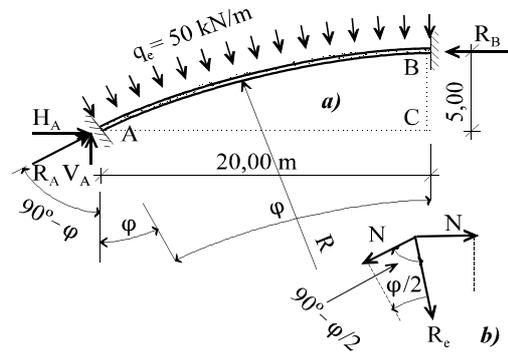


Figura 7.6
Esfuerzos en arco circular

Con el truco mental (TR §7.2) de considerar el cuerpo imaginario ACB en equilibrio sumergido todo él en posición horizontal a la profundidad necesaria para experimentar q_e en todo su contorno, deducimos que la resultante vertical del arco es $-q_e \times 20 = -1000 \text{ kN}$ y la horizontal, $q_e \times 5 = 250 \text{ kN}$. (Encuentra y razona que la inclinación con la vertical de la resultante de las cargas q_e es $\varphi/2$.)

Con esto sacamos: $V_A = 1.000 \rightarrow R_A = 2.125 \rightarrow H_A = 1.875$
 $R_B = 250 + H_A = 2.125$

Así, pues, por simple equilibrio hemos deducido que el axil es (i) constante y (ii) de valor $-q_e R$.

De otra manera. El problema es simétrico con relación a la bisectriz del arco (por eso R_A y R_B han de resultar iguales). La resultante de las cargas exteriores encontrada con el “truco mental” fue $R_e = \sqrt{1000^2 + 250^2} = 1.030,777 \text{ kN}$. El equilibrio exige (figura 7.6b): $2N \text{sen} \frac{\varphi}{2} = R_e$ de donde resultan también las reacciones anteriores.

Problema 7.7. En la figura 7.7 se ha construido el arco antifunicular de la carga dada. Se pide: Calcular los esfuerzos en la clave C , la cota que ha de tener el punto D y el esfuerzo axil en el tramo BD .

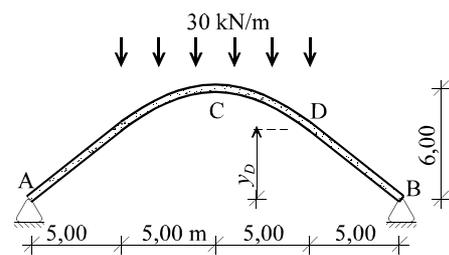


Figura 7.7
Arco antifunicular de la carga dada

Las reacciones verticales son $V_A = V_B = 150 \text{ kN}$. Para que en C el momento flector sea nulo hacen falta reacciones horizontales $H_A = -H_B = 187,5 \text{ kN}$. El axil en C será H_B , los demás esfuerzos nulos.

Para que el momento flector en D sea nulo se precisa

$V_B \times 5 + H_B \times y_D = 0$, de donde $y_D = 4 \text{ m}$. El axil en el tramo recto BD será: $N_{BD} = -\sqrt{V_B^2 + H_B^2} = -240,12 \text{ kN}$

Problema 7.8. Queremos construir entre los apoyos *A* y *B* un arco antifunicular de la carga mostrada en la figura 7.8, y queremos que sea lo más bajo posible pero sin que el máximo esfuerzo axial exceda de 200 kN. Se pide la altura mínima que habrá de tener en *C* y la cota que resultaría en *D*.

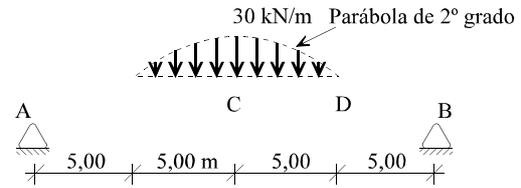


Figura 7.8
Carga en busca de antifunicular

El esfuerzo axial máximo se da en los arranques. Como la reacción vertical vale 100 kN, para que el axial no supere los 200 kN, las reacciones horizontales están

acotadas por $200 = \sqrt{100^2 + H^2} \Rightarrow H_{m\acute{a}x} = 173,2$ kN. Para que el momento flector en la clave *C* sea nulo, precisamos:

$$M_f(C) \equiv 100 \times 10 - 30 \times 5 \times \frac{5}{2} + \frac{1}{3} 30 \times 5 \times \frac{3}{4} 5 - H \times y_C = 0 \Rightarrow y_C = 4,691 \text{ m}$$

Para que en *D* el momento flector sea nulo:

$$M_f(D) \equiv V_B \times 5 - H \times y_D \Rightarrow y_D = 2,887 \text{ m}$$

Comprobación. La inclinación del tramo recto *BD* tendrá que ser la misma que la de la reacción en *B*: $y_D/5 = V/H$.

Problema 7.9. El pórtico cuya geometría se muestra en la figura 7.9a es el antifunicular de un cierto sistema de cargas. Hallar qué cargas son éstas sabiendo que el mayor esfuerzo axial en la estructura (en valor absoluto) es de 200 kN.

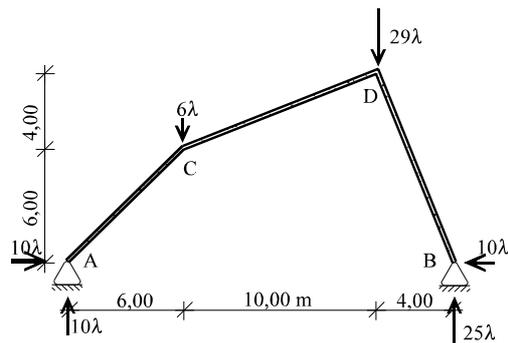


Figura 7.9
Antifunicular de unas ciertas cargas

Sabemos (TR §7.2) que el antifunicular tiene forma afín a la ley de momentos flectores producida por las cargas exteriores sobre una viga biapoyada. De una ley de flectores afín al antifunicular obtendremos las cargas afines a las buscadas. El factor de escala lo determinaremos luego con el dato del esfuerzo axial.

Empezamos por hallar las cargas a partir de una ley de momentos flectores afín al pórtico. Esto lo hicimos en el problema 2.º. Copiamos en la propia figura 2.9 los valores allí encontrados (afectados por un cierto factor de escala λ) que eran:

$$V_A = 10 \text{ kN}; V_C = -6 \text{ kN}; V_D = -29 \text{ kN}; V_B = 25 \text{ kN};$$

Con estos valores, las reacciones horizontales en el antifunicular habrían sido (para anular el momento flector en *C* y *D*):

$$H_A = -H_D = 10 \text{ kN}$$

y el mayor axial, en la barra *BD*, sería: $N_{BD} = -\sqrt{25^2 + 10^2} = -26,926$ kN

Para elevar este valor hasta -200 kN hay que multiplicar las cargas por $\lambda = 7,428$. Así pues, las cargas buscadas son las de la figura 7.9 con este valor de λ encontrado.

Problema 7.10 El arco circular biarticulado de la figura 7.10a está sometido a las cuatro cargas puntuales mostradas. Se pide: Dibujar la ley de momentos flectores y calcular los movimientos radiales de los puntos A y B.

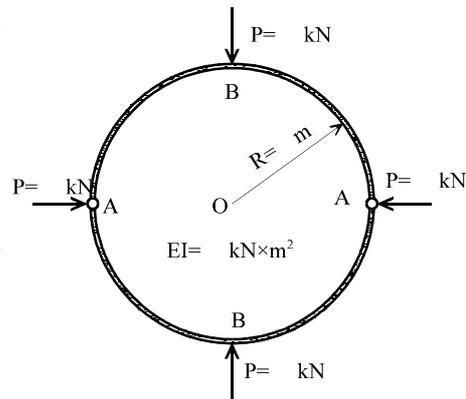


Figura 7.10 Anillo biarticulado

La estructura tiene un grado de hiperestatismo (3 de anillo - 2 de rótulas) pero su doble simetría lo reduce a cero. En efecto: considerando el equilibrio de un cuarto del anillo (figura 7.10b) vemos que todos los esfuerzos son conocidos:

$$M(\varphi) = \frac{P}{2}R(1 - \cos\varphi - \text{sen}\varphi)$$

que se dibuja en la figura 7.10c

Los movimientos son:

$$v_A = v_B + \frac{R^2}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(\varphi)(1 - \cos\varphi) d\varphi = 0$$

$$v_B = -\frac{PR^3}{2EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos\varphi - \text{sen}\varphi)(1 - \cos\varphi) d\varphi = -\frac{PR^3}{2EI} \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{5}{2} \right) = 0,0720 \frac{PR^3}{EI}$$

¡Los puntos B se mueven hacia afuera!

$$u_A = \frac{PR^3}{2EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos\varphi - \text{sen}\varphi)\text{sen}\varphi d\varphi = \frac{PR^3}{2EI} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\pi \right) = -0,143 \frac{PR^3}{EI}$$

Los puntos A se mueven hacia adentro. Lo mucho que se mueven los A hacia adentro es lo que fuerza a los B hacia afuera, al ser invariable la longitud total del arco. La estructura es simétrica en esfuerzos respecto de las bisectrices de las cargas P pero no, en movimientos porque en A los giros son libres (rótula) y en B, impedidos.

Problema 7.11. Para el pórtico de la figura 7.11a, escribir la ecuación hiperestática que resulta de tomar la reacción H_B como incógnita hiperestática y dibujar la ley de momentos flectores.

Siendo un pórtico simétrico e intraslacional, quizás fuera más sencillo resolverlo por el método de viga continua, tomando como incógnita $M_C = M_D$. Tomando H_B necesitamos los movimientos u_B producidos por la carga exterior y por $H_B = 1$. Las correspondientes leyes de momentos flectores se dan en las figuras 7.11b y c. De ellas:

$$u_B^{(ext)} = \frac{2}{3} \frac{250}{EI} 10 \times 6 = 22,22 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$u_B^{(H_B=1)} = 2 \frac{1}{2} \frac{6}{EI} 6 \times \frac{2}{3} 6 + \frac{6}{EI} 10 \times 6 = 1,12 \times 10^{-3} \text{ m}$$

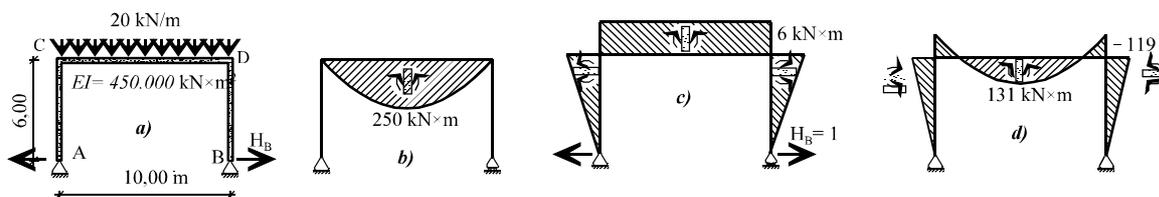


Figura 7.11 Pórtico hiperestático

La ecuación hiperestática es:

$$(7.1) \quad [1,12 \times 10^{-3}] \{H_B\} = -\{22,22 \times 10^{-3}\}$$

de donde se obtiene $H_B = -19,84$ kN y la ley de momentos flectores de la figura 7.11d.

Problema 7.12. Para el pórtico de la figura 7.11a, cuya ecuación hiperestática es la (7.1), determinar cuánto habría que aproximar (o distanciar) entre sí los apoyos A y B para que el máximo momento flector en valor absoluto fuera mínimo.

Nos habría gustado que la ley de momentos flectores de la figura 7.11d mostrara valores extremos de ± 125 kN×m en vez de los +131, -119 encontrados. Esto lo lograríamos con una $H_{B,opt} = -20,83$ kN; pero este valor no nos lo dan los apoyos rígidos (ni menos, los flexibles), a menos que los “persuadamos”.

Si en fase de construcción, antes de colocar la sobrecarga, aplicamos en B la reacción que nos falta, $H_B = -20,83 + 19,84 = -0,99$ kN, el apoyo B se acercará a A $u_B = -0,99 \times 1,12 = -1,11$ mm. Producido este movimiento, fijamos el apoyo B en B'. La estructura descargada quedará con la ley de momentos flectores de la figura 7.12a y con la deformada inicial de la figura 7.12b. Cuando, posteriormente, le apliquemos la sobrecarga de la figura 7.11a, acabaremos teniendo la ley de momentos flectores de la figura 7.12c (suma de las 7.11d y 7.12a).

Así, pues, se consigue el resultado buscado forzando al pórtico de 10 m de luz a colocarse entre apoyos distanciados 1,11 mm *menos* que su valor nominal. Antes de recibir la sobrecarga, el pórtico está “pretensado” con la ley de momentos flectores de la figura 7.12a y “predeformado” como en la figura 7.12b.

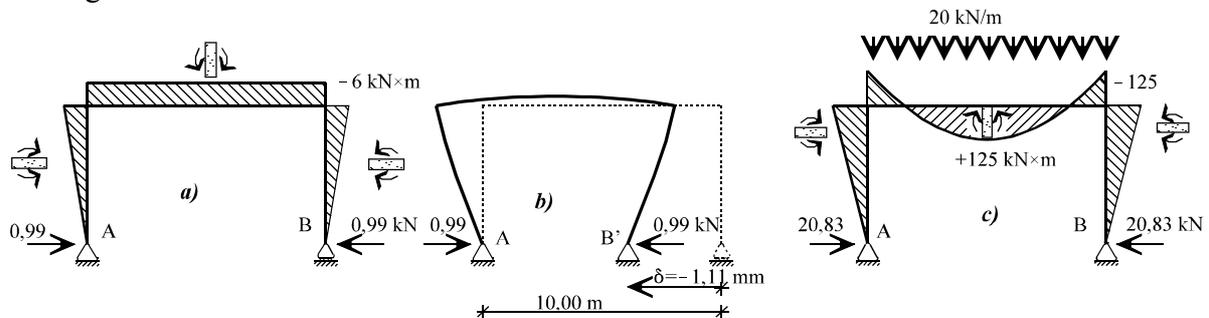


Figura 7.12
Pórtico pretensado

Problema 7.13. El pórtico de la figura 7.13a es semejante al de la figura 7.11a, del que conocemos su ecuación hiperestática (7.1). Sin embargo, ahora el terreno no es capaz de resistir empujes horizontales. Por ello, sus apoyos no son fijos sino deslizantes y las fuerzas H_B deseables se obtienen mediante un tirante entre sus apoyos. Dimensionamos un tirante de acero ($E = 2 \times 10^5$ MPa) con $A = 2$ cm² de sección (para que la $T_{opt} = 20,83$ kN a que aspiramos le produzca aproximadamente $\sigma = 100$ MPa). Se pide calcular los esfuerzos en el tirante y en el pórtico.

La ecuación hiperestática ahora es (figura 7.13b) $u_B^{(pórtico)} = \delta^{(cable)}$.

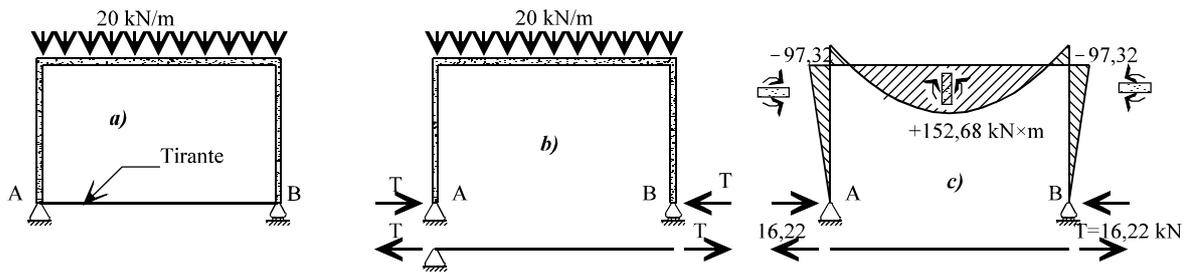


Figura 7.13
Pórtico atirantado en terreno débil

$$22,22 \times 10^{-3} - 1,12 \times 10^{-3} T = \frac{T \cdot 10}{2 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-4}}$$

$$\left[1,12 \times 10^{-3} + \frac{10}{2 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-4}} \right] \{T\} = \{22,22 \times 10^{-3}\} \Rightarrow T = 16,22$$

La ley de momentos flectores en el pórtico es la de la figura 7.13c. El cable no nos da la T_{opt} deseada sino la que su elongabilidad le permite. Para que no dé la T deseada tendremos que “persuadirlo”, como en el problema siguiente.

Problema 7.14. Calcular el acortamiento inicial δ (figura 7.14a) con que habría que colocar el cable del problema anterior para conseguir que con el pórtico cargado nos diera la $T_{\text{opt}} = 20,83$; y dibujar la ley de momentos flectores a pórtico descargado.

La ecuación hiperestática ahora es (figura 7.14b):

$$\delta^{(\text{cable})} - u_B^{(\text{pórtico})} = \delta$$

Forzamos $T = 20,83$:

$$\delta = \left[1,12 \times 10^{-3} + \frac{10}{2 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-4}} \right] \times 20,83 - 22,22 \times 10^{-3} = 6,32 \times 10^{-3}$$

A pórtico descargado la tensión (axil) T en el cable sería:

$$\left[1,12 \times 10^{-3} + \frac{10}{2 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-4}} \right] T = 6,32 \times 10^{-3} \Rightarrow T = 4,61$$

La ley de momentos flectores con en el pórtico descargado es la de la figura 7.14c. La deformada con el pórtico descargado será semejante a la de la figura 7.12b

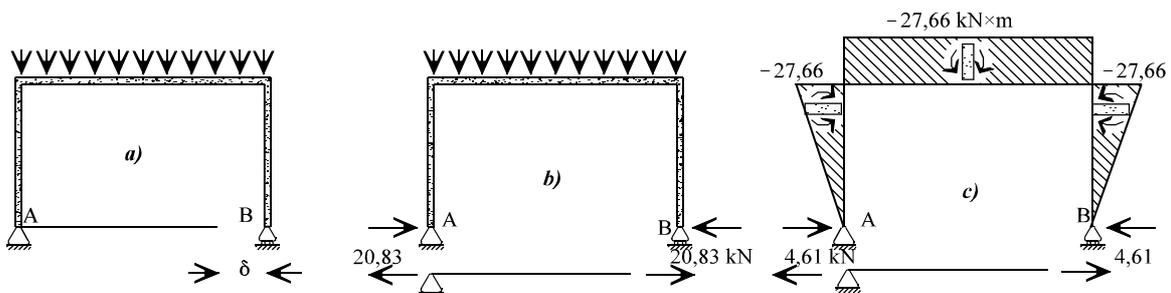


Figura 7.14
Conseguimos la T_{opt} con un cable más corto

Problema 7.15. Determinar la posición que ha de tener el nudo C del pórtico de la figura 7.15 para que éste sea el antifunicular de las cargas horizontales aplicadas.

8. Reciprocidad y líneas de influencia

Problema 8.1. Dibujar a estima la línea de influencia del giro en el apoyo B de la viga de la figura 8.1a.

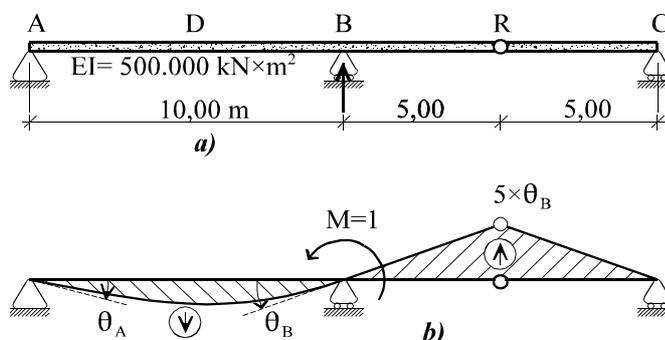


Figura 8.1
Estructura y línea de influencia del giro en B

De acuerdo con la teoría estudiada en TR¹, §8.6.1, p. 8.12, la línea de influencia buscada coincide con la deformada que se obtiene al aplicar un momento exterior $M=1$ en B. Ésta se dibuja en la figura 8.1b. Los tramos BR y RC son rectos. El convenio de signos es que el giro en B es positivo (antihorario como el momento aplicado) si la carga puntual vertical lleva el mismo sentido que la flecha dibujada. Por tanto, las cargas verticales hacia abajo producirán giros θ_B positivos si actúan sobre el vano AB y negativos si sobre BC. (Igualmente, los momentos exteriores positivos que se apliquen sobre el tramo BR producirán giros θ_B positivos, y negativos los que actúen sobre RC)

Conocemos $\theta_B = \frac{1 \times 10}{3EI} = 6,667 \times 10^{-6}$ rad. por lo que podemos acotar el valor del giro producido en B por una carga vertical unidad en R: $5 \times \theta_B = 33,333 \times 10^{-6}$ rad. Éste valor será positivo para carga en R hacia arriba, negativo para carga hacia abajo.

Problema 8.2. Dibujar y acotar la línea de influencia de la reacción vertical en el apoyo B de la viga de la figura 8.1a.

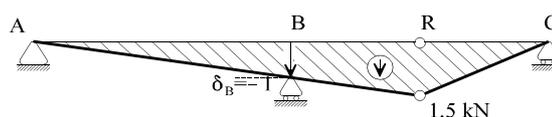


Figura 8.2
Línea de influencia de la reacción vertical en B

De acuerdo con la teoría estudiada en TR, §8.6.2, p. 8.12, la línea de influencia buscada coincide con la deformada que se obtiene al aplicar un movimiento vertical $v_B = -1$ en B (es decir, en sentido opuesto a la reacción positiva). Esta l.i. se dibuja en la figura 8.2. Todos sus tramos son rectos como corresponde a la l.i. de una reacción de una estructura isostática, que permite movimientos impuestos sin “esforzarse”. Como todos los movimientos verticales en esta l.i. son hacia abajo, implica que la reacción V_B será siempre positiva para cualquier carga vertical hacia abajo. (De igual manera, los momentos exteriores positivos producirán una V_B positiva cuando antúen en RC y negativa si lo hacen en AR).

La máxima reacción V_B positiva la producirá una carga concentrada en R, de valor 1,5 veces el valor de la carga. Una carga uniforme de 1 kN/m aplicada sobre toda la viga causará una reacción V_B de 15 kN (área de la l.i. bajo la carga).

¹ Haremos referencia continuamente a la página apropiada del *best seller TutoRES* de este mismo autor, disponible en la Librería Caminos de la E.T.S. de Ings. de Caminos de Madrid y también en Internet, en versión reducida.

Problema 8.3. Dibujar y acotar la línea de influencia del momento flector en el punto D de la viga de la figura 8.1a.

Se dibuja en la figura 8.3. Coincide con la deformada que se obtiene cuando se corta la estructura en D y se impone un giro relativo unidad entre los labios del corte, sin permitir ningún otro movimiento relativo entre los mismos (ver TR §8.6.3, p. 8.13). Conviene imaginar que se ha usado una prótesis para lograrlo.

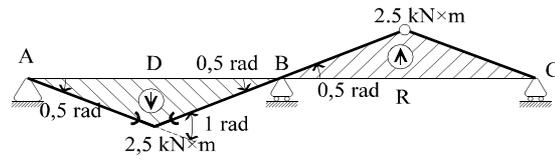


Figura 8.3

Línea de influencia del momento flector en D

El resultado ha sido una poligonal de segmentos rectos, como corresponde a toda l.i. de esfuerzos en una estructura isostática. Para carga vertical, los máximos valores se obtienen en D (flector positivo si la carga es hacia abajo) y en R (positivo si la carga es hacia arriba) y son los indicados en la figura, obtenidos por las dimensiones geométricas indicadas.

Problema 8.4. Dibujar y acotar la línea de influencia del momento flector en el punto B de la viga de la figura 8.1a.

Se dibuja en la figura 8.4. Coincide con la deformada que se obtiene cuando se corta la estructura en B y se impone un giro relativo unidad entre los labios del corte, sin permitir ningún otro movimiento relativo entre los mismos (ver TR §8.6.3, p. 8.13). Conviene imaginar que se ha usado una prótesis para lograrlo. Como el vano AB se resiste a girar, el giro de 1 radián se logra todo él sin esfuerzo en el vano BC .

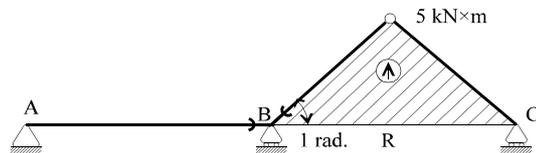


Figura 8.4

Línea de influencia del momento flector en B

El resultado ha sido una poligonal de segmentos rectos, como corresponde a toda l.i. de esfuerzos en una estructura isostática. Se observa que con cargas verticales hacia abajo sólo se puede generar en B momento flector negativo, el máximo de $5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ colocando la carga puntual en la rótula R . Una carga uniforme hacia abajo de 1 kN/m en todo el vano BC (o en toda la viga AC) produciría en B un momento flector negativo de $25 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

Problema 8.5. Dibujar y acotar la línea de influencia del esfuerzo cortante a la izquierda del apoyo B de la viga de la figura 8.1a.

En todo apoyo hay una carga puntual aplicada (su reacción) que hace que el cortante sea distinto a la izquierda del apoyo que a la derecha. Aquí obtenemos la l.i. del cortante a la izquierda y en el problema siguiente la del cortante a la derecha. Se dibuja en la figura 8.5. Coincide con la deformada que se obtiene cuando se corta la estructura en B^- y se impone un desplazamiento relativo vertical unidad entre los labios del corte, sin permitir ningún otro movimiento relativo entre los mismos (ver TR §8.6.3, p. 8.13); por ello, la pendiente de la deformada debe resultar la misma a un lado y a otro del corte. Como tenemos que mantener apoyado el punto B , que queda a la derecha, el movimiento relativo de 1 m se tiene que imponer todo él a la izquierda de B , descendiendo

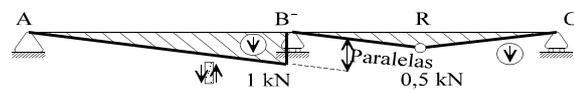


Figura 8.5

Línea de influencia del esfuerzo cortante en B^-

este labio 1m. Al vano BC sólo se le exige que la pendiente en B por la derecha sea la que resultó por la izquierda.

El resultado ha sido una poligonal de segmentos rectos, como corresponde a toda l.i. de esfuerzos en una estructura isostática. Se observa que con cargas verticales hacia abajo sólo se puede generar en B^- cortante negativo, el máximo de 1 kN colocando la carga puntual justo en B . Una carga uniforme hacia abajo de 1 kN/m en toda la viga produciría en B un cortante negativo de 7,5 kN.

Problema 8.6. Dibujar y acotar la línea de influencia del esfuerzo cortante a la derecha del apoyo B de la viga de la figura 8.1a.

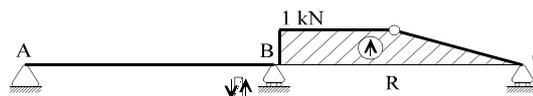


Figura 8.6
Línea de influencia del esfuerzo cortante en B^+

Se dibuja en la figura 8.6. Coincide con la deformada que se obtiene cuando se corta la estructura en B y se impone un desplazamiento relativo vertical unidad entre los labios del corte, sin permitir ningún otro movimiento relativo entre los mismos (ver TR §8.6.3, p. 8.13); por ello, la pendiente de la deformada debe resultar la misma a un lado y a otro del corte. Como tenemos que mantener apoyado el punto B , que está a la izquierda, el movimiento relativo de 1 m se tiene que imponer todo él a la derecha de B . Como el vano AC no se deforma, la pendiente en B por la derecha tiene que ser la que exige el vano de la izquierda, o sea nula.

El resultado ha sido una poligonal de segmentos rectos, como corresponde a toda l.i. de esfuerzos en una estructura isostática. Se observa que con cargas verticales hacia abajo sólo se puede generar en B^+ cortante negativo, el máximo de 1 kN colocando la carga puntual en cualquier lugar entre B y R . Una carga uniforme hacia abajo de 1 kN/m en toda la viga produciría en B un cortante negativo de 7,5 kN.

Problema 8.7. Dibujar y estima la línea de influencia del giro en el apoyo B de la viga de la figura 8.7a.

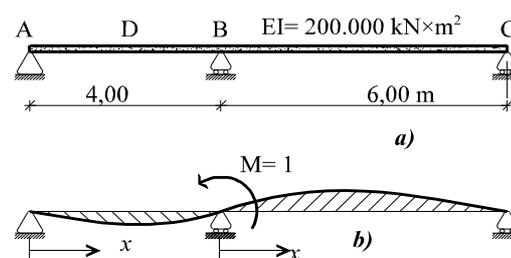


Figura 8.7
Estructura y línea de influencia del giro en B

De acuerdo con la teoría estudiada en TR, §8.6.1, p. 8.12, la línea de influencia buscada coincide con la deformada que se obtiene al aplicar un momento exterior $M=1$ en B . Ésta se dibuja en la figura 8.7b. El problema es semejante al 8.1 excepto en que aquí se curva también el vano BC .

Como el momento $M=1$ se tiene que dividir entre los dos vanos, al AB le tocará $6/10$ y al BC , $4/10$ para que el giro sea igual a ambos lados de B . Llamando x a la coordenada desde el apoyo izquierdo de cada vano, las expresiones analíticas son (T.R. §8.1, p. 8.2):

$$i_1(x) = \frac{0,6x(4-x)(4+x)}{6 \times 4 EI}$$

$$i_2(x) = -\frac{0,4x(6-x)(12-x)}{6 \times 6 EI}$$

con el signo positivo hacia abajo, consistente con cargas verticales positivas hacia abajo. El máximo en todos los casos se encuentra en $d = L/\sqrt{3}$ desde el apoyo sin momento, y vale $v_{m\acute{a}x} = \frac{\sqrt{3}}{27} \frac{ML^2}{EI}$

Problema 8.8. Dibujar a estima la línea de influencia de la reacción vertical en el apoyo B de la viga de la figura 8.7a.

De acuerdo con la teoría estudiada en TR, §8.6.2, p. 8.12, la línea de influencia buscada coincide con la deformada que se obtiene al aplicar un movimiento vertical $v_B = -1$ en B (es decir, en sentido opuesto a la reacción positiva). Esta l.i. se dibuja en la figura 8.8. El problema es semejante al 8.2 excepto que aquí la estructura es hiperestática y la l.i. resulta curva.

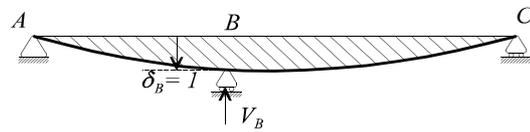


Figura 8.8
Línea de influencia de la reacción V_B

Problema 8.9. Dibujar y acotar la línea de influencia del momento flector en el punto D de la viga de la figura 8.7a.

Se dibuja en la figura 8.9. Coincide con la deformada que se obtiene cuando se corta la estructura en D y se impone un giro relativo unidad entre los labios del corte, sin permitir ningún otro movimiento relativo entre los mismos (ver TR §8.6.3, p. 8.13). Conviene imaginar que se ha usado una prótesis para lograrlo. El problema es semejante al 8.3 excepto en que aquí la viga es hiperestática y la l.i. resulta curva. En T.R. §8.8 se resuelven problemas como éste en los que se obtienen expresiones analíticas de las curvas.

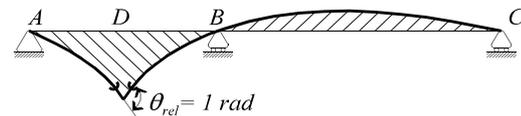


Figura 8.9
Línea de influencia del momento flector en D

Problema 8.10. Dibujar a estima la línea de influencia del momento flector en el punto B de la viga de la figura 8.7a.

Se dibuja en la figura 8.10. Coincide con la deformada que se obtiene cuando se corta la estructura en D y se impone un giro relativo unidad entre los labios del corte, sin permitir ningún otro movimiento relativo entre los mismos (ver TR §8.6.3, p. 8.13). Conviene imaginar que se ha usado una prótesis para lograrlo. El problema es semejante al 8.4 excepto en que aquí la viga es hiperestática y la l.i. resulta curva. En T.R. §8.8 se resuelven problemas como éste en los que se obtienen expresiones analíticas de las curvas.

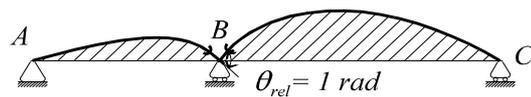


Figura 8.10
Línea de influencia del momento flector en B

Problema 8.11. Dibujar a estima la línea de influencia del esfuerzo cortante a la izquierda del apoyo B de la viga de la figura 8.7a.

En todo apoyo hay una carga puntual aplicada (su reacción) que hace que el cortante sea distinto a la izquierda del apoyo que a la derecha. Aquí obtenemos la l.i. del cortante a la izquierda y en el

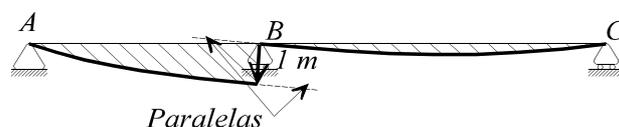


Figura 8.11
Línea de influencia del esfuerzo cortante en B^-

problema siguiente, la del cortante a la derecha. Se dibuja en la figura 8.11. Coincide con la deformada que se obtiene cuando se corta la estructura en D y se impone un desplazamiento relativo unidad entre los labios del corte, sin permitir ningún otro movimiento relativo entre los mismos (ver TR §8.6.3, p. 8.13). Conviene imaginar que se ha usado una prótesis para lograrlo. Como no se permite giro relativo, los tangentes a las curvas en los extremos de la prótesis han de ser paralelas. El problema es semejante al 8.5 excepto en que aquí la viga es hiperestática y la l.i. resulta curva. En T.R. §8.8 se resuelven problemas como éste en los que se obtienen expresiones analíticas de las curvas.

Problema 8.12. Dibujar a estima la línea de influencia del esfuerzo cortante a la derecha del apoyo B de la viga de la figura 8.7a.

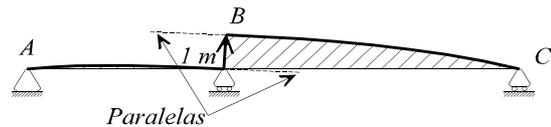


Figura 8.12

Línea de influencia del esfuerzo cortante en B^+

En todo apoyo hay una carga puntual aplicada (su reacción) que hace que el cortante sea distinto a la izquierda del apoyo que a la derecha. Aquí obtenemos la l.i. del cortante a la derecha y en el problema anterior, la del cortante a la izquierda. Se dibuja en la figura 8.12. Coincide con la deformada que se obtiene cuando se corta la estructura en D y se impone un desplazamiento relativo unidad entre los labios del corte, sin permitir ningún otro movimiento relativo entre los mismos (ver TR §8.6.3, p. 8.13). Conviene imaginar que se ha usado una prótesis para lograrlo. Como no se permite giro relativo, los tangentes a las curvas en los extremos de la prótesis han de ser paralelas. El problema es semejante al 8.6 excepto en que aquí la viga es hiperestática y la l.i. resulta curva. En T.R. §8.8 se resuelven problemas como éste en los que se obtienen expresiones analíticas de las curvas.

Problema 8.13. Dibujar la línea de influencia de la flecha v_R de la sección R de la viga de la figura 8.13a (apoyada en A, B y C , y con una rótula en R) y acotarla en las secciones con nombre.

La l.i. pedida es la deformada debida a una carga vertical unidad en R (figura 8.13b). El valor de v_R se calcula como en el problema 4.3. El tramo RD será recto porque en él no hay momentos flectores. Por semejanza, $v_D = -v_R$.

$$\theta_B = \frac{M_B \times 10}{3EI} = \frac{16,667}{EI}$$

$$v_R = \theta_B \times 5 + \frac{1}{2} \frac{M_B}{EI} \times 5 \times \frac{2}{3} \times 5 = \frac{125}{EI}$$

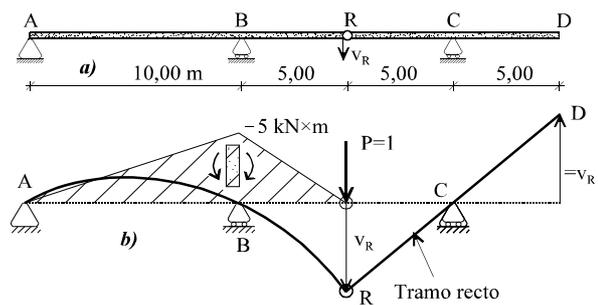


Figura 8.13

Línea de influencia del movimiento v_R

