Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad. Examen extraordinario 10 de diciembre de 2013	Apellidos . . . . Nombre . . . . Nº.................... Curso 3º

Ejercicio 1. (Se recogerá a las 17,30 h aproximadamente.)

***A)* Para el canal biapoyado de la figura *a)*, se pide:**

a1) Dibujar la ley de momentos flectores (por unidad de longitud de canal) y acotarla en los puntos *C, A* y *M*. (*0,4 puntos*)

a2) Calcular el giro θ_A en el apoyo *A*. (*0,4 puntos*)

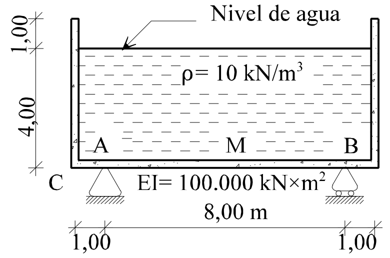


Figura *a)*

***B)* Para la estructura de dos barras triarticuladas de la figura *b)*, sometida a la carga horizontal *H*, se pide:**

b1) Calcular los esfuerzos en las barras. (*0,4 puntos*)

b2) Calcular el movimiento horizontal u_C del nudo C. (*0,5 puntos*)

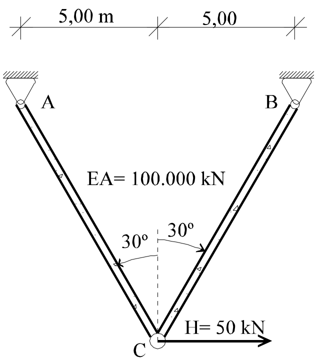


Figura *b)*

***C)* Se quiere construir un arco entre los apoyos fijos *A* y *B* de la figura *c)* que sea antifunicular de las cargas dadas y cuya cota máxima sea la indicada. Se pide:**

c1) Dibujar el arco a estima e indicar de qué tipo de curva se trata en cada tramo *AC*, *CD*, *DB*. Acotar sus ordenadas en los puntos *C* y *D*. (*0,4 puntos*)

c2) Calcular el máximo esfuerzo axil en el arco. (*0,4 puntos*)

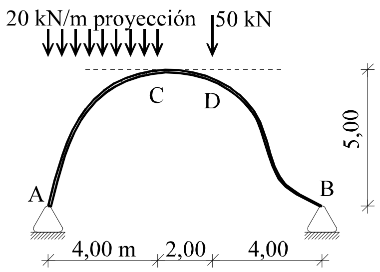


Figura *c)*

Canal

$h := 4$ $a := 1$ $L := 8$

$EI := 10^5$

$q := 10 \cdot h$ $E := \frac{1}{2} \cdot q \cdot h$

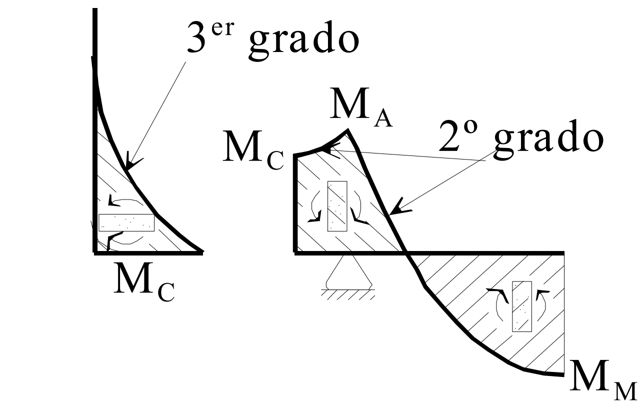
$M_C := -E \cdot \frac{h}{3}$ $M_C = -106.667$

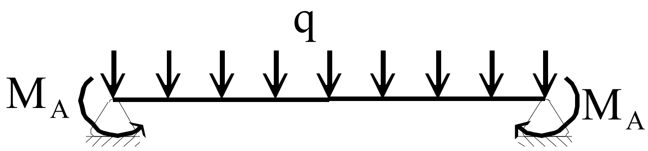
$M_A := M_C - \frac{q \cdot a^2}{2}$ $M_A = -126.667$

$M_M := \frac{q \cdot L^2}{8} + M_A$ $M_M = 193.333$

$\theta_A := \frac{-q \cdot L^3}{24 \cdot EI} - \frac{M_A \cdot L}{2 \cdot EI}$

$\theta_A = -3.467 \cdot 10^{-3}$





Barras

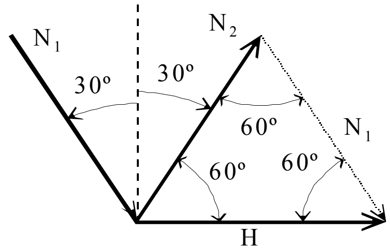
$EA := 10^5$ $d := 5$

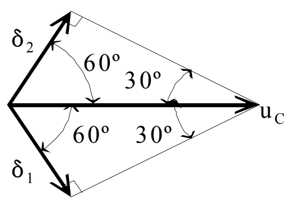
$\alpha := \frac{\pi}{6}$ $L := \frac{d}{\sin(\alpha)}$ $L = 10$

$H := 50$

$N_1 := H$ $N_2 := -H$

$\delta_1 := \frac{N_1 \cdot L}{EA}$ $u := \frac{\delta_1}{\sin(\alpha)}$ $u = 0.01$





Antifunicular

$L := 10$ $q := 20$ $a := 4$ $P := 50$ $h := 5$

$V_A := \frac{q \cdot a \cdot \left(L - \frac{a}{2}\right) + P \cdot a}{L}$ $V_A = 84$ $V_B := q \cdot a + P - V_A$ $V_B = 46$

El máximo momento flector de las cargas verticales está en D y vale $M_D := V_B \cdot a$

Lo anulamos con H*h

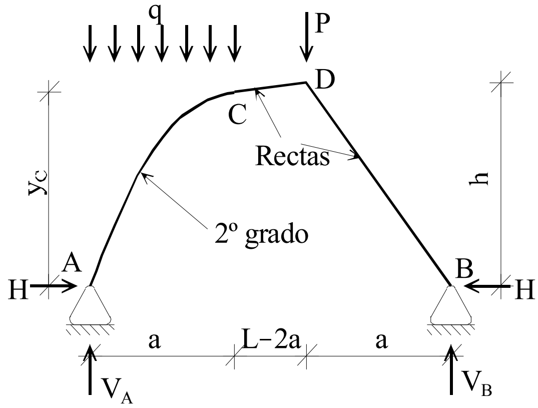
$H := \frac{M_D}{h}$ $H = 36.8$

Anulamos momento flector en C

$V_A \cdot a - q \cdot \frac{a^2}{2} - H \cdot y_C := 0$

$y_C := \frac{V_A \cdot a - q \cdot \frac{a^2}{2}}{H}$ $y_C = 4.783$

$N_A := \sqrt{V_A^2 + H^2}$ $N_A = 91.707$



Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad. Examen extraordinario 10 de diciembre de 2013	Apellidos . . . . Nombre . . . . Nº.................... Curso 3º

Ejercicio 2. (Se recogerá a las 18,00 h aproximadamente.)

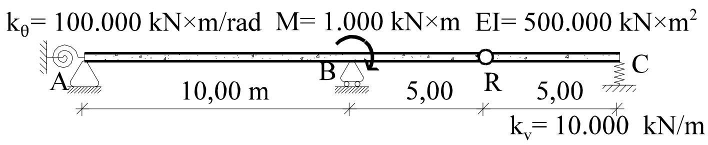
La viga continua de la figura se sustenta sobre un empotramiento elástico en *A* (reacciones H_A, V_A, M_A), un apoyo vertical rígido en *B* (reacción V_B) y un apoyo vertical elástico en *C* (reacción V_C). Tiene una rótula en *R*, punto medio del vano *BC*. Las rigideces de las vigas y de los apoyos elásticos se dan en la propia figura. Se pide:

a) Para la carga consistente en el momento exterior *M* de la figura, dibujar y acotar la ley de momentos flectores. (*0,8 puntos*)

b) Para el caso anterior, dibujar la deformada a estima y acotar sobre ella la flecha v_R en la rótula. (*0,6 puntos*)

c) Dibujar la línea de influencia del giro en *B*, θ_B, y acotar su valor en *R* para carga vertical unidad. (*0,6 puntos*)

d) Calcular el máximo giro en *B* en valor absoluto (con su signo) que puede producir una carga puntual vertical hacia abajo de 50 kN. (*0,5 puntos*)



$L := 10 \quad EI := 500000 \quad k_{\theta} := 100000 \quad M_{o} := 1000$

Ecuación hiperestática

$$\frac{-M_{A}}{\kappa_{\theta}} := \frac{M_{A}\cdot L}{3\cdot EI} + \frac{M_{o}\cdot L}{6\cdot EI}$$

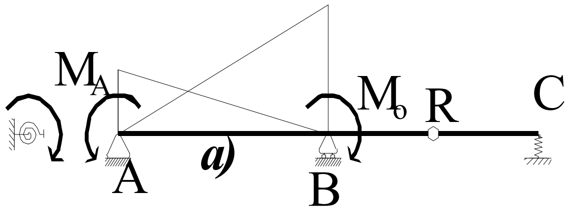
$$M_{A} := \frac{-\frac{M_{o}\cdot L}{6}}{\frac{L}{3} + \frac{EI}{k_{\theta}}} \qquad M_{A} = -200$$

$$\theta_{A} := \frac{M_{A}\cdot L}{3\cdot EI} + \frac{M_{o}\cdot L}{6\cdot EI} \qquad \theta_{A} = 2\cdot 10^{-3}$$

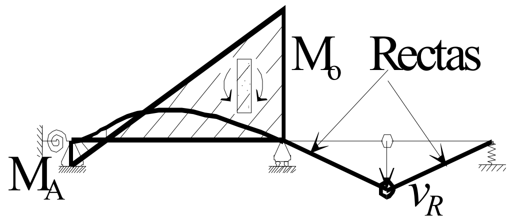
$$\theta_{B} := \frac{-M_{A}\cdot L}{6\cdot EI} - \frac{M_{o}\cdot L}{3\cdot EI} \qquad \theta_{B} = -6\cdot 10^{-3}$$

$$v_{R} := \theta_{B}\cdot\frac{L}{2} \qquad v_{R} = -0.03$$

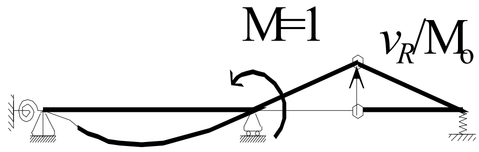
$$\theta_{Bmax} := \frac{v_{R}}{M_{o}}\cdot 50 \qquad \theta_{Bmax} = -1.5\cdot 10^{-3}$$



Descomposición en subestructuras isostáticas



Ley de momentos y deformada



Línea influencia θ_B

Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad. Examen extraordinario 10 de diciembre de 2013	Apellidos . . . . Nombre . . . . Nº.................... Curso 3º Alumnos de Adaptación marcad X aquí ☐

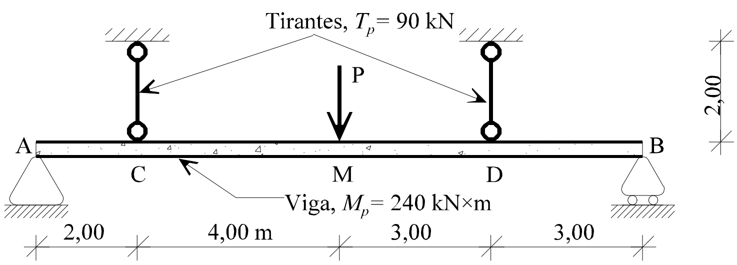
Ejercicio 3. (Se recogerá a las 20,00 h aproximadamente.)

La estructura de la figura se compone de una viga apoyada en *A* y *B* y sujeta por tirantes en los puntos *C* y *D*. Los esfuerzos de plastificación de sus miembros se dan en la figura. La única carga actuante es la puntual *P* aplicada en el punto medio *M*. Se pide:

a) Dibujar los cuatro mecanismos de rotura posibles y calcular sus cargas críticas. (*1,6 puntos*)

b) Dibujar y acotar la ley de momentos flectores del mecanismo real de colapso. (*0,6 puntos*)

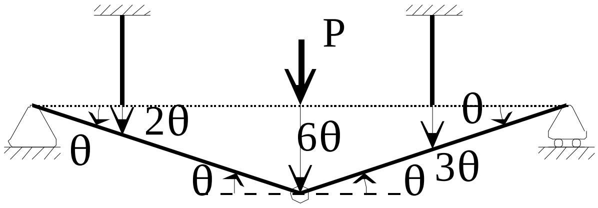
c) Dibujar y acotar la ley de esfuerzos cortantes del mecanismo real de colapso. (*0,3 puntos*)



$M_p := 240 \qquad T_p := 90 \qquad \theta := 1$

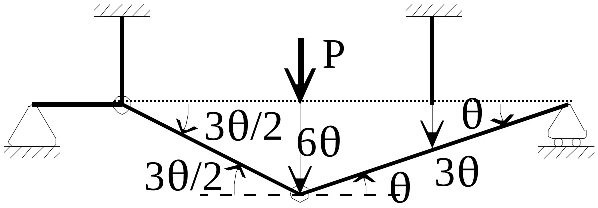
$$P_1 := \frac{M_p \cdot 2\cdot\theta + T_p \cdot (2\cdot\theta + 3\cdot\theta)}{6\cdot\theta}$$

$P_1 = 155$



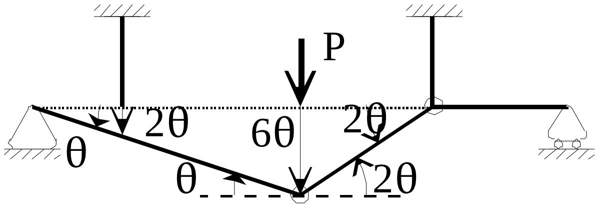
$$P_2 := \frac{M_p \cdot \left(\frac{3}{2}\cdot\theta + \frac{5}{2}\cdot\theta\right) + T_p \cdot 3\cdot\theta}{6\cdot\theta}$$

$P_2 = 205$



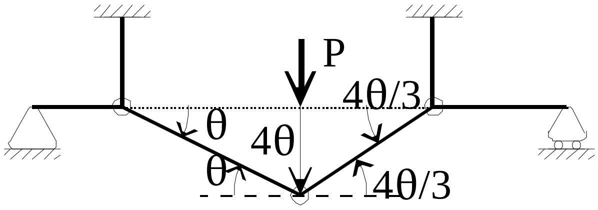
$$P_3 := \frac{M_p \cdot (3\cdot\theta + 2\cdot\theta) + T_p \cdot 2\cdot\theta}{6\cdot\theta}$$

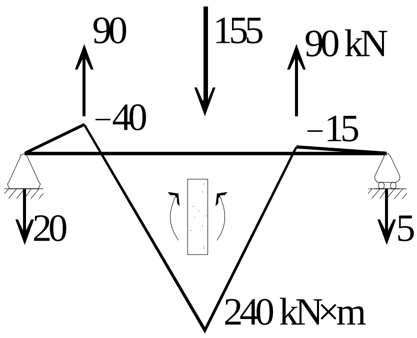
$P_3 = 230$

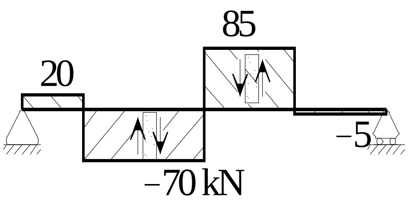


$$P_4 := \frac{M_p \cdot \left(\theta + \frac{7}{3}\cdot\theta + \frac{4}{3}\cdot\theta\right)}{4\cdot\theta}$$

$P_4 = 280$







Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad. Examen extraordinario 10 de diciembre de 2013	Apellidos . . . . Nombre . . . . Nº..................... Curso 3º Alumnos de Adaptación marcad X aquí ☐

Ejercicio 4. (Se recogerá a las 20,30 h aproximadamente.)

A) En un ensayo de una pieza sometida a **tensión plana uniforme** se miden en un punto *O* las deformaciones longitudinales de las tres direcciones que se muestran en la figura *a*. Se pide:

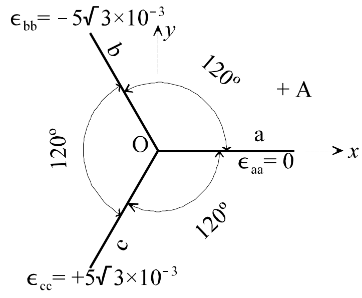


Figura *a*

a1) Determinar el tensor de deformaciones en los ejes *x,y*. (*0,6 puntos*)

a2) Calcular el alargamiento del segmento comprendido entre los puntos *O(0,0)* y *A(4,3)* (de 5 m de longitud). (*0,6 puntos*)

B) La laja delgada de la figura tiene un agujero circular en su centro de 3 cm de radio y está en equilibrio bajo la acción de las cargas uniformes que se indican. Las dimensiones de la laja son muy grandes comparadas con las dimensiones del agujero.
Se pide para el punto *A(6,0)* (coordenadas en cm, siguiendo los ejes *x-y* de la figura *b*):

b1) Tensor de tensiones. (*1,3 puntos*)

Los resultados se expresarán en los ejes *x-y* indicados en la figura *b*.

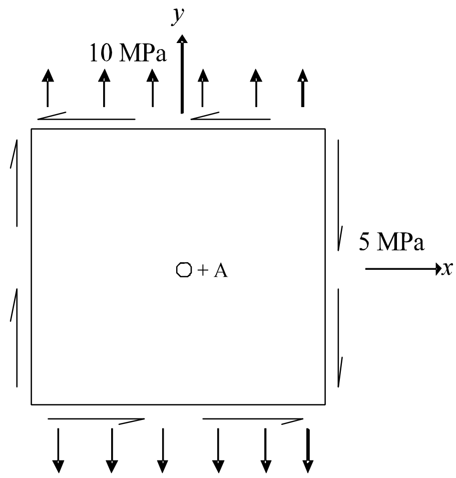


Figura *b*

$\varepsilon_{aa} := 0 \quad \varepsilon_{bb} := -5\cdot\sqrt{3}\cdot 10^{-3} \quad \varepsilon_{cc} := 5\sqrt{3}\cdot 10^{-3} \quad \alpha_1 := 0 \quad \alpha_2 := \frac{2\cdot\pi}{3} \quad \alpha_3 := \frac{-2\cdot\pi}{3} \quad \nu := 0.3$

Formula aplicable $\quad \varepsilon_{\alpha\alpha} := \varepsilon_x\cdot\cos(\alpha)^2 + 2\cdot\varepsilon_{xy}\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) + \varepsilon_y\cdot\sin(\alpha)^2$

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha_1)^2 & 2\cdot\sin(\alpha_1)\cdot\cos(\alpha_1) & \sin(\alpha_1)^2 \\ \cos(\alpha_2)^2 & 2\cdot\sin(\alpha_2)\cdot\cos(\alpha_2) & \sin(\alpha_2)^2 \\ \cos(\alpha_3)^2 & 2\cdot\sin(\alpha_3)\cdot\cos(\alpha_3) & \sin(\alpha_3)^2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \varepsilon_{aa} \\ \varepsilon_{bb} \\ \varepsilon_{cc} \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1)^2 & 2\cdot\sin(\alpha_1)\cdot\cos(\alpha_1) & \sin(\alpha_1)^2 \\ \cos(\alpha_2)^2 & 2\cdot\sin(\alpha_2)\cdot\cos(\alpha_2) & \sin(\alpha_2)^2 \\ \cos(\alpha_3)^2 & 2\cdot\sin(\alpha_3)\cdot\cos(\alpha_3) & \sin(\alpha_3)^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} := A^{-1}\cdot\begin{bmatrix} \varepsilon_{aa} \\ \varepsilon_{bb} \\ \varepsilon_{cc} \end{bmatrix}$$

En tensión plana: $\quad \varepsilon_{zz} := \frac{-\nu}{1-\nu}\cdot(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$

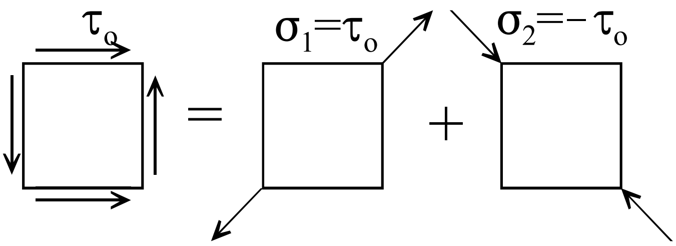
$$D := \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo del alargamiento según la dirección OA: $\quad d := \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad d_1 := \frac{d}{|d|} \qquad d_1 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\varepsilon_{OAOA} := d_1^{T}\cdot D\cdot d_1 \qquad \varepsilon_{OAOA} = 9.6\bullet 10^{-3}$

$\Delta L := \varepsilon_{OAOA}\cdot|d| \qquad \Delta L = 0.048$

Un estado de tensión tangencial τo es equivalente a σ_1=+τ_o a 45º σ_2=-τ_o a -45ºτ



$a := 0.03 \qquad r := 0.06 \quad \xi := \frac{a}{r}$

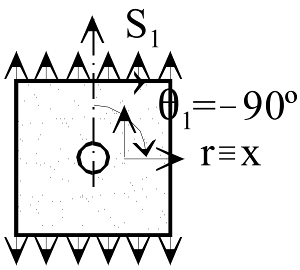
$$\sigma_r(\theta) := \frac{1}{2}\left[1 - \xi^2 + \left(1 + 3\cdot\xi^4 - 4\cdot\xi^2\right)\cos(2\cdot\theta)\right]$$

Del formulario

$$\sigma_\theta(\theta) := \frac{1}{2}\left[1 + \xi^2 - \left(1 + 3\cdot\xi^4\right)\cos(2\cdot\theta)\right]$$

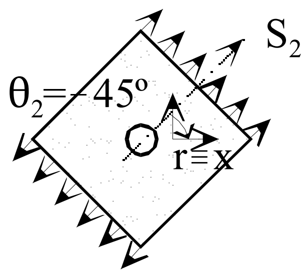
$$\tau_{r\theta}(\theta) := -\frac{1}{2}\left(1 - 3\cdot\xi^4 + 2\cdot\xi^2\right)\sin(2\cdot\theta)$$

1) Debido a σ_y $\qquad S_1 := 10 \qquad \theta_1 := -\frac{\pi}{2}$



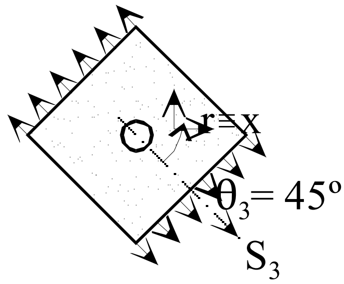
$$T_1 := S_1\cdot\begin{bmatrix}\sigma_r(\theta_1) & \tau_{r\theta}(\theta_1)\\ \tau_{r\theta}(\theta_1) & \sigma_\theta(\theta_1)\end{bmatrix} \qquad T_1 = \begin{bmatrix}2.813 & 0\\ 0 & 12.188\end{bmatrix}$$

2) Debido a σ_1=τ 45 $\qquad S_2 := -5 \qquad \theta_2 := -\frac{\pi}{4}$



$$T_2 := S_2\cdot\begin{bmatrix}\sigma_r(\theta_2) & \tau_{r\theta}(\theta_2)\\ \tau_{r\theta}(\theta_2) & \sigma_\theta(\theta_2)\end{bmatrix} \qquad T_2 = \begin{bmatrix}-1.875 & -3.281\\ -3.281 & -3.125\end{bmatrix}$$

3) Debido a σ_2=-τ α 45 $\qquad S_3 := 5 \qquad \theta_3 := \frac{\pi}{4}$



$$T_3 := S_3\cdot\begin{bmatrix}\sigma_r(\theta_3) & \tau_{r\theta}(\theta_3)\\ \tau_{r\theta}(\theta_3) & \sigma_\theta(\theta_3)\end{bmatrix} \qquad T_3 = \begin{bmatrix}1.875 & -3.281\\ -3.281 & 3.125\end{bmatrix}$$

$$T := T_1 + T_2 + T_3 \qquad T = \begin{bmatrix}2.813 & -6.562\\ -6.562 & 12.188\end{bmatrix}$$

Otra manera. El tensor de tensiones sin agujero es:

$$T_o := \begin{bmatrix} 0 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{bmatrix}$$

Las tensiones princupales y sus direcciones son

$$\sigma_1 := \frac{S_1}{2} + \sqrt{\frac{S_1^{\,2}}{4} + S_2^{\,2}} \qquad \phi_1 := \operatorname{atan}\left(\frac{\sigma_1}{S_2}\right) \qquad \sigma_1 = 12.071 \qquad \frac{\phi_1 \cdot 180}{\pi} = -67.5$$

$$\sigma_2 := \frac{S_1}{2} - \sqrt{\frac{S_1^{\,2}}{4} + S_2^{\,2}} \qquad \phi_2 := \operatorname{atan}\left(\frac{\sigma_2}{S_2}\right) \qquad \sigma_2 = -2.071 \qquad \frac{\phi_2 \cdot 180}{\pi} = 22.5$$

$$T_n := \sigma_1 \cdot \begin{bmatrix} \sigma_r(-\phi_1) & \tau_{r\theta}(-\phi_1) \\ \tau_{r\theta}(-\phi_1) & \sigma_\theta(-\phi_1) \end{bmatrix} + \sigma_2 \cdot \begin{bmatrix} \sigma_r(-\phi_2) & \tau_{r\theta}(-\phi_2) \\ \tau_{r\theta}(-\phi_2) & \sigma_\theta(-\phi_2) \end{bmatrix} \qquad T_n = \begin{bmatrix} 2.813 & -6.563 \\ -6.563 & 12.187 \end{bmatrix}$$