

Figura 1  
Viga continua con múltiples patologías

### Problema de viga continua

Vamos a calcular todos los esfuerzos, reacciones y curvaturas, y a dibujar la deformada de la viga continua de cuatro vanos de la figura 1, empotrada en su extremo  $A$ , apoyada sobre apoyo deslizante en  $B$ , sobre apoyos fijos en  $C$  y en  $D$ , y sobre apoyo elástico en  $E$ . Tiene una rótula en el punto medio  $R$  del vano  $BC$ . Las secciones de los vanos son rectangulares, distintas todas ellas y se dibujan encima de cada vano. El material es hormigón; su módulo de elasticidad y su coeficiente de dilatación se dan en la figura. La rigidez del apoyo elástico en  $E$  se da también en la figura.

Las cargas son:

- Deformaciones impuestas por una variación térmica en el vano  $AB$  lineal sobre el canto, mostrada en la figura.
- Un movimiento impuesto consistente en un descenso del apoyo  $C$ , indicado en la figura.
- Las siguientes cargas mecánicas:
  - un momento exterior concentrado sobre el apoyo  $B$ ;
  - una carga uniforme sobre el vano  $CD$ ;
  - una carga puntual excéntrica sobre el vano  $DE$ .

Esta viga continua tiene patologías de todo tipo:

- Geométricas:
  - empotramiento en un extremo;
  - rótula en un vano intermedio;
  - apoyo elástico en un extremo;
  - apoyos fijos y deslizantes.
- De cargas:
  - Mecánicas:
    - ▶ momento aplicado sobre un nudo;
    - ▶ carga repartida;
    - ▶ carga concentrada.
  - Movimientos y deformaciones impuestos:
    - ▶ descenso de apoyo;
    - ▶ variación térmica lineal sobre el canto, que induce:
      - deformación impuesta  $\epsilon_G$ ;
      - curvatura impuesta  $\chi$ .

Patologías más adversas podrían haber sido:

- Apoyo elástico intermedio: renunciaríamos a usar el método de viga continua y emplearíamos el general, tomando la reacción en el muelle como incógnita hiperestática.
- Muelle rotativo en un apoyo. Equivale a añadir un vano no cargado confluyente en el nudo.
- Vanos de inercia variable: complicarían el cálculo de los giros en los extremos de los vanos isostáticos.
- Variación térmica no lineal sobre el canto: nos costaría más obtener  $\epsilon_G$  y  $\chi$ .
- Cargas repartidas más complejas: dificultarían el cálculo de los giros en los apoyos de su vano isostático.

### Recuento de hiperestáticas

Comparando con la ménsula, la viga dada tiene el siguiente grado de hiperestatismo: +1 por el apoyo  $B$ , -1 por la rótula, +2 por el apoyo  $C$ , +2 por el  $D$  y +1 por el  $E$ ; total 5. De ellas, dos son hiperestáticas axiales y tres, de flexión. Las axiales son las reacciones horizontales en  $C$  y  $D$  que surjan por cargas exteriores que pretendan variar las longitudes  $AC$  y  $CD$ . La carga térmica sobre la viga  $AB$  pretende variar la longitud  $AC$ ; esta hiperestática axial es real. En cambio, ninguna carga pretende variar la distancia  $CD$  por lo que la reacción horizontal en  $D$  será cero: esta hiperestática no se activa.

### Hiperestática axial

Comencemos calculando las reacciones  $H_A = -H_C$  que surgen para compensar el alargamiento térmico de  $AB$ ,  $\epsilon_G = \alpha \Delta T_G = 25 \times 10^{-5}$ . Se tendría  $\delta_{AC} = \delta_{AB} = 1,5$  mm a compensar con el acortamiento por axil  $N_{AC} = -H_A$  en todo el tramo  $AC$ . (Observa que el alargamiento total de  $AB$  no será nulo; es el de  $AC$  el que se anula). Resulta:

$$\frac{N_{AC}}{E} \left( \frac{6}{0,50 \times 0,30} + \frac{4}{0,30 \times 0,25} \right) + \delta_{AB} = 0, \Rightarrow N_{AC} = -642,86 \text{ kN}$$

Así pues,  $H_A = -H_C = 642,86$  kN y hemos terminado con las hiperestáticas horizontales.

El movimiento de  $B$  será:  $u_B = 1,5 \times 10^{-3} - \frac{642,86 \times 6}{E \times 0,50 \times 0,30} = 0,857 \times 10^{-3} \text{ m}$

### Hiperestáticas de flexión

Procedemos ahora a calcular las hiperestáticas de flexión por el método particular de viga continua (TR §6.4). Descomponemos la viga en tres tramos isostáticos (figura 2a), los  $AB$ ,  $BD$  y  $DE$ . Nótese que no dejamos solo el vano  $BC$  porque al tener una rótula *no* sería isostático sino un mecanismo. Lo unimos al  $CD$  como lo podríamos haber unido al  $AB$ . Cada vano soporta sus cargas; la única arbitrariedad está en asignar el momento exterior que actúa en  $B$ , que se lo hemos asignado al vano  $AB$ . (Podríamos igualmente asignarlo al tramo  $BD$  o repartido en cualquier proporción entre ellos, pero esto último nos daría más trabajo.)

Forzamos la continuidad de giro en las secciones de corte introduciendo momentos de continuidad  $M_A$ ,  $\pm M_B$  y  $\pm M_D$ . Sus consiguientes ecuaciones serán  $\theta_A^{(d)} = 0$ ,  $\theta_B^{(i)} = \theta_B^{(d)}$ ,  $\theta_D^{(i)} = \theta_D^{(d)}$ . Los superíndices  $(i)$ ,  $(d)$  indican “por la izquierda” y “por la derecha” de la sección, respectivamente. Para calcular estos giros usaremos las fórmulas de TR, §4.3, tabla 4.2 cuando sean aplicables. Para el caso de temperatura hacemos notar que las fórmulas a) y b) en dicha tabla se pueden generalizar para el caso de curvatura impuesta lineal entre  $\chi_A$  y  $\chi_B$  como se indica en la figura 4.16

de TR, §4.3:

$$\theta_A = -\frac{\chi_A L}{3} - \frac{\chi_B L}{6} ; \theta_B = \frac{\chi_A L}{6} + \frac{\chi_B L}{3}$$

cuando sobre los extremos actúan momentos exteriores  $\chi_A = -M_A/EI$  y  $\chi_B = M_B/EI$ .

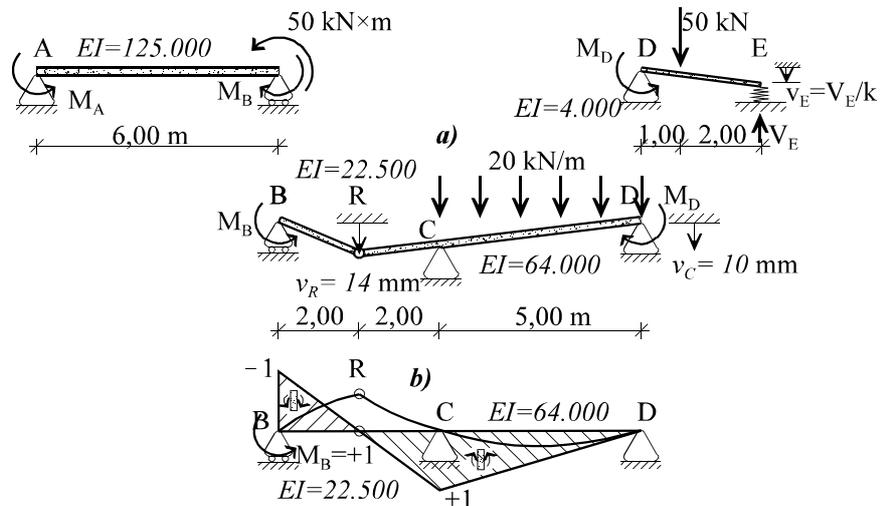


Figura 2

Descomposición en tramos isostáticos

### Giros en apoyos del tramo AB

Los escribimos en miliradianes. Las curvaturas impuestas son  $\chi_A = \chi_B = -50\alpha/0,50 = -1 \times 10^{-3}$  rad/m.

$$\theta_A^{(d)} = \frac{M_A \cdot 6}{3 \times 125} + \frac{M_B \cdot 6}{6 \times 125} - \frac{50 \times 6}{6 \times 125} - \frac{-1 \times 6}{3} - \frac{-1 \times 6}{6}$$

$$\theta_B^{(i)} = -\frac{M_A \cdot 6}{6 \times 125} - \frac{M_B \cdot 6}{3 \times 125} + \frac{50 \times 6}{3 \times 125} + \frac{-1 \times 6}{6} + \frac{-1 \times 6}{3}$$

es decir:

$$(1) \quad \begin{aligned} \theta_A^{(d)} &= 0,016M_A + 0,008M_B + 2,6 \\ \theta_B^{(i)} &= -0,008M_A - 0,016M_B - 2,2 \end{aligned}$$

### Giros en apoyos del tramo BD

Para calcular el giro debido a  $M_B = I$  igualamos la flecha en la rótula R por la izquierda y por la derecha (desde C, figura 2b):

$$v_R^{(i)} \equiv \theta_B^{(d)} \times 2 - \frac{1}{2} \frac{1}{22,5} \frac{2}{3} \frac{2}{2} = \frac{1 \times 5}{3 \times 64} \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{22,5} \frac{2}{3} \frac{2}{2} \equiv v_R^{(d)} \Rightarrow \theta_B^{(d)} = 0,0853M_B$$

Igualmente debido a  $M_B = I$  tenemos en D un giro que se calcula observando que es el mismo que tendríamos con  $M_C = -I$

$$\theta_D^{(i)} = \frac{1 \times 5}{6 \times 64} M_B = 0,0130M_B$$

Debido al momento exterior  $M_D$  tendremos los siguientes resultados (no dibujados):

$$\theta_D^{(i)} = -\frac{M_D \times 5}{3 \times 64}; \quad \theta_C = \frac{M_D \times 5}{6 \times 64}; \quad v_R = -\theta_C \times 2; \quad \theta_B^{(d)} = \frac{v_R}{2} = -\frac{M_D \times 5}{6 \times 64}$$

Debido al descenso de apoyo  $v_C = -1$  cm tenemos  $v_R = -1,4$  cm y los siguientes giros (figura 2a):

$$\theta_B^{(i)} = \frac{v_R}{2} = -7 \text{ mrad}; \quad \theta_D^{(i)} = -\frac{v_C}{5} = 2 \text{ mrad}$$

Por último, debido a la carga repartida en CD (no dibujado):

$$\theta_D^{(i)} = \frac{20 \times 5^3}{24 \times 64} = 1,628 \text{ mrad}; \quad \theta_B^{(d)} = 1,628 \text{ mrad}$$

Total:

$$(2) \quad \begin{aligned} \theta_B^{(d)} &= 0,0853M_B - 0,0130M_D - 7 + 1,628 \\ \theta_D^{(i)} &= 0,0130M_B - 0,0260M_D + 2 + 1,628 \end{aligned}$$

### Giros en apoyos del tramo DE

La peculiaridad de este tramo es que cada carga producirá una reacción  $V_E$  que comprimirá el muelle (si es positiva) produciendo el movimiento  $v_E = -V_E/k$ ; y éste a su vez el giro  $\theta_D^{(d)} = v_E/L$ . Por tanto:

$$\theta_D^{(d)} = M_D \left( \frac{3}{3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 10 \times 3} \right) - \frac{50 \times 1 \times 2 \times 5}{6 \times 3 \times 4} - \frac{50}{3 \times 10 \times 3}$$

Esto es:

$$(3) \quad \theta_D^{(d)} = 0,2611M_D - 7,5$$

### Ecuaciones hiperestáticas

Son las de igualdad de giros en los apoyos separados, que traemos de (1), (2) y (3):

$$\begin{aligned} \theta_A^{(i)} \equiv 0 &= 0,016M_A + 0,008M_B + 2,6 \equiv \theta_A^{(d)} \\ \theta_B^{(i)} \equiv -0,008M_A - 0,016M_B - 2,2 &= 0,0853M_B - 0,013M_D - 5,372 \equiv \theta_B^{(d)} \\ \theta_D^{(i)} \equiv 0,0130M_B - 0,0260M_D + 3,628 &= 0,2611M_D - 7,5 \equiv \theta_D^{(d)} \end{aligned}$$

que son las ecuaciones hiperestáticas que resuelven el problema. Conviene escribirlas ordenadamente de forma matricial para descubrir su “ingredientes” y verificar su “integridad”. Para ello pasamos a la izquierda del signo los términos independientes y a la derecha, las incógnitas. Resulta:

$$\begin{pmatrix} 0,016 & 0,008 & 0 \\ 0,008 & 0,016+0,0853 & -0,013 \\ 0 & -0,013 & 0,026+0,2611 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_A \\ M_B \\ M_D \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2,6-0 \\ -5,372+2,2 \\ -7,5-3,628 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} M_A &= -188,2 \\ M_B &= 51,5 \\ M_D &= 41,1 \end{aligned}$$

Es instructivo observar que:

- en la diagonal principal *se suman* (nunca se restan) los coeficientes de flexibilidad de los vanos adyacentes;
- que la matriz es *simétrica*;
- que el término independiente contiene solamente movimientos debidos a las cargas exteriores. Lo hemos escrito “raro” para poner énfasis en que sus “ingredientes” son los “menos giro relativo” =  $-\theta^{rel} = -(\theta^{(d)} - \theta^{(i)})$ . Es claro que este giro relativo es el que su momento de continuidad tiene de eliminar;
- si cambiamos las cargas sólo tendremos que recalcular el término independiente;
  - la matriz de flexibilidad del sistema no cambia; sólo hay que construirla una vez.

### Resultados

Con los valores obtenidos dibujamos las leyes de momentos flectores de cada tramo y calculamos sus reacciones en la figura 3a. Es claro que la ley de momentos flectores del conjunto es la *unión* de las leyes de cada tramo. Sin embargo, para las reacciones de apoyos intermedios hay que *sumar* las contribuciones de los tramos contiguos (figura 3b). Las leyes de cortantes se pueden obtener bien derivando las de momentos o bien integrando cargas verticales, incluidas las reacciones. El valor de las reacciones de cada lado de un apoyo intermedio es  $\pm$ el cortante a ese lado (figura 3b).

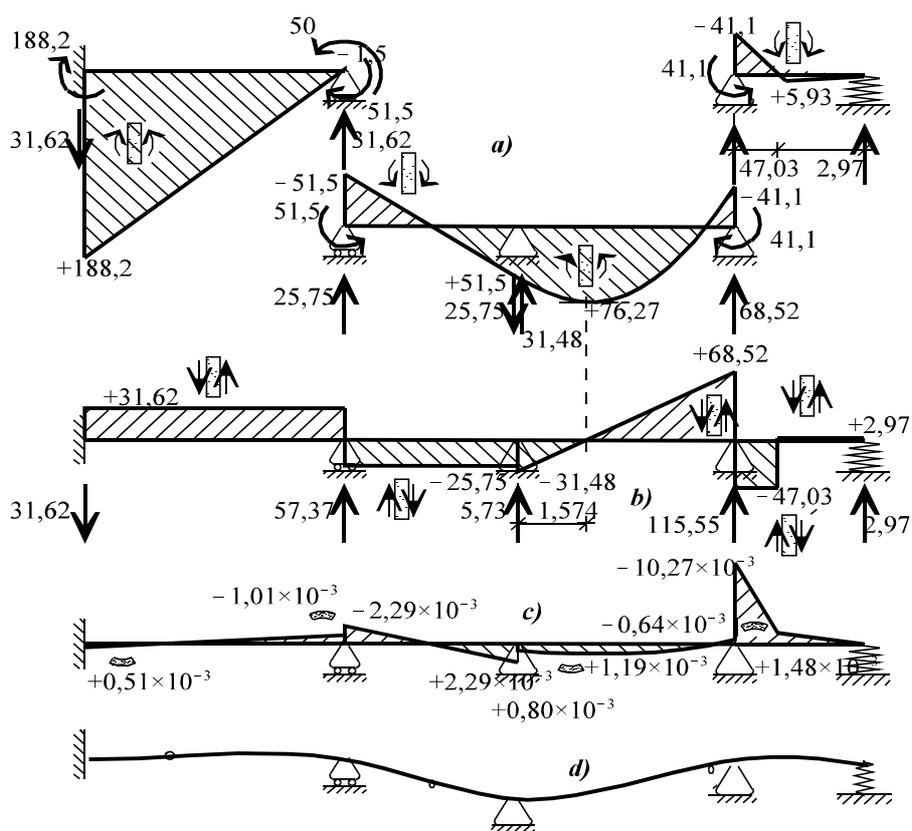


Figura 3  
Resultados del cálculo: leyes de flectores, cortantes y curvaturas; y deformada

### Curvaturas

Finalmente, en casos como éste en que hay curvaturas de dos “etiologías”, la curvatura total se obtiene sumando la de flexión  $M/EI$  con la curvatura térmica (figura 3c). Halladas las curvaturas totales, estamos en condiciones de dibujar la deformada de la estructura, que tendrá sus puntos de inflexión allí donde la curvatura es nula (figura 3d).

### Comprobaciones

Comprobemos que partiendo del nudo  $D$  llegamos al  $C$  con una flecha de 1 cm (el descenso de apoyo impuesto). El giro en  $D$  lo sacamos de la ecuación (3) y resulta 3,23 mrad. La ley de momentos flectores en  $CD$  la imaginamos descompuesta en un triángulo de valor +51,5 en  $C$  y nulo en  $D$ , otro triángulo de valor -41,1 en  $D$  y nulo en  $C$ , y una parábola de 2º grado cuyo valor en el centro del vano es  $20 \times 5^2/8$ :

$$v_C = -3,23 \times 5 - \frac{1}{2} \frac{41,1}{64} \times 5 \times \frac{2}{3} \times 5 + \frac{2}{3} \frac{20 \times 5^2}{8 \times 64} \times 5 \times \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \frac{51,5}{64} \times 5 \times \frac{5}{3} = -10,0 \text{ mm}$$